DOI: 10.37863/umzh.v73i8.6755

УДК 517.51

А. С. Романюк, С. Я. Янченко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ОЦІНКИ АПРОКСИМАЦІЙНИХ ХАРАКТЕРИСТИК І ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАТОРІВ НАЙКРАЩОГО НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ У ПРОСТОРІ $B_{1,1}$

We obtain the exact-order estimates for orthoprojection widths and similar approximation characteristics of the Sobolev classes $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ and Nikol'skii – Besov classes $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ of periodic functions of one and several variables in the norm of the space $B_{1,1}$. In addition, we establish that the sequence of norms of linear operators that realize the orders of the best approximation of the classes $B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}$ in space $B_{1,1}$ using trigonometric polynomials with "numbers" of harmonics from step hyperbolic crosses is unbounded in the multidimensional case.

Отримано точні за порядком оцінки ортопоперечників і близьких до них апроксимаційних характеристик класів Соболєва $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ та класів Нікольського – Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ періодичних функцій однієї та багатьох змінних у просторі $B_{1,1}$. Крім того, встановлено, що у багатовимірному випадку послідовність норм лінійних операторів, які реалізують порядкові значення найкращого наближення класів $B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}$ у просторі $B_{1,1}$ за допомогою тригонометричних поліномів з „номерами" гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів, є необмеженою.

1. Вступ. У роботі досліджуються апроксимаційні характеристики класів Нікольського – Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ і Соболєва $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ періодичних функцій однієї та багатьох змінних у просторі $B_{1,1}$, норма в якому є не слабшою, ніж L_1-норма. Як зазначено в роботах [1, 2], мотивацією до розгляду питань апроксимації функціональних класів у цьому просторі була та обставина, що деякі з відповідних питань у просторі L_1 дотепер залишаються відкритими (див., наприклад, [3, 4]).

Робота складається з трьох частин. У першій частині (пп. 2 – 4) наведено всі необхідні позначення, означення та допоміжні твердження. У другій частині отримано точні за порядком оцінки ортопоперечників, а також схожих за означенням величин класів $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ та $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ у просторі $B_{1,1}$, для одновимірного $(d = 1)$ і багатовимірного $(d \geq 2)$ випадків (пп. 5 і 6 відповідно). Третю частину роботи, п. 7, присвячено вивченню властивостей лінійних операторів, які реалізують порядок найкращого наближення класів $B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}$ тригонометричними поліномами з „номерами" гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів у просторі $B_{1,1}$. За результатами проведених досліджень виявлено, що у багатовимірному випадку (на противагу одновимірному) послідовність норм таких операторів є необмеженою.

2. Означення функціональних класів. Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, — евклідів простір з елементами $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ і $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + \ldots + x_d y_d$. Через $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^{d} [0, 2\pi]$, $1 \leq p \leq \infty$, позначимо простір функцій f, які є 2π-періодичними за кожною змінною і такі, що

$$\|f\|_p := \|f\|_{L_p(\pi_d)} = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} \left| f(\boldsymbol{x}) \right|^p d\boldsymbol{x} \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{L_\infty(\pi_d)} = \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x} \in \pi_d} \left| f(\boldsymbol{x}) \right| < \infty, \quad p = \infty.$$

Далі будемо розглядати лише ті функції $f \in L_p(\pi_d)$, для яких виконано умову

$$\int_0^{2\pi} f(\boldsymbol{x})dx_j = 0, \quad j = \overline{1,d}.$$

Множину таких функцій будемо позначати $L_p^0(\pi_d)$.

Наведемо означення функціональних класів $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, які досліджуються в роботі. При цьому нам буде зручно користуватись їхніми означеннями у термінах так званого декомпозиційного нормування (див. зауваження 2.1 у [5]).

Нехай $V_l(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{N}$, позначає ядро Валле Пуссена вигляду

$$V_l(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{l} \cos kt + 2\sum_{k=l+1}^{2l-1}\left(1 - \frac{k-l}{l}\right)\cos kt.$$

Кожному вектору $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$, поставимо у відповідність поліном

$$A_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d}\left(V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j)\right)$$

і для $f \in L_p^0(\pi_d)$, $1 \leq p \leq \infty$, покладемо

$$A_{\boldsymbol{s}}(f) := A_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x}) = (f * A_{\boldsymbol{s}})(\boldsymbol{x}),$$

де $*$ — операція згортки. Тоді при $1 \leq p \leq \infty$, $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1,d}$, з точністю до абсолютних сталих класи $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ можна означити таким чином:

$$B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} = \left\{ f \colon \|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} = \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta}\big\|A_{\boldsymbol{s}}(f)\big\|_p^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \leq 1 \right\}, \quad 1 \leq \theta < \infty,$$

$$B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty} \equiv H^{\boldsymbol{r}}_p = \left\{ f \colon \|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}} = \sup_{s\in\mathbb{N}^d} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})}\big\|A_{\boldsymbol{s}}(f)\big\|_p \leq 1 \right\}.$$

Зазначимо, що у випадку $1 < p < \infty$ класи $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ можна означити у термінах двійкових „блоків” ряду Фур’є функції $f \in L_p^0(\pi_d)$.

Для векторів $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$, і $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1,d}$, покладемо

$$\rho(\boldsymbol{s}) = \left\{ \boldsymbol{k} \colon \boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d) \colon 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = \overline{1,d} \right\}$$

і для $f \in L_p^0(\pi_d)$ позначимо

$$\delta_{\boldsymbol{s}}(f) := \delta_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho(\boldsymbol{s})} \widehat{f}(\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})},$$

де $\widehat{f}(\boldsymbol{k}) = \displaystyle\int_{\pi_d} f(\boldsymbol{t})e^{-i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{t})}d\boldsymbol{t}$ — коефіцієнти Фур’є функції f.

Нехай $p \in (1,\infty)$ і $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_d)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1,d}$. Тоді з точністю до абсолютних сталих класи $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ можна означити таким чином (див., наприклад, [5, 6]):

$$B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} = \left\{ f : \|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} = \left(\sum_{s \in \mathbb{N}^d} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \big\| \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \big\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \le 1 \right\}, \quad 1 \le \theta < \infty,$$

$$B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty} \equiv H^{\boldsymbol{r}}_p = \left\{ f : \|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}} = \sup_{s \in \mathbb{N}^d} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \big\| \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \big\|_p \le 1 \right\}.$$

Нагадаємо означення класів $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$, які також досліджуються в роботі.

Нехай $F_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha})$ — багатовимірні аналоги ядер Бернуллі, тобто

$$F_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}) = 2^d \sum_{\boldsymbol{k}} \prod_{j=1}^d k_j^{-r_j} \cos\Big(k_j x_j - \frac{\alpha_j \pi}{2}\Big), \qquad r_j > 0, \quad \alpha_j \in \mathbb{R},$$

і підсумовування проводиться за векторами $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d)$, для яких $k_j > 0$, $j = \overline{1,d}$. Тоді через $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ позначимо клас функцій f вигляду

$$f(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}) * F_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} \varphi(\boldsymbol{y}) F_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{y},$$

$$\varphi \in L_p(\pi_d), \quad \|\varphi\|_p \le 1.$$

З історією дослідження класів $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$, $H^{\boldsymbol{r}}_p$ і $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, $1 \le \theta < \infty$, можна ознайомитись у монографіях [3, 4, 7, 8] і роботах [5, 6, 9, 10]. Нагадаємо лише, що для введених класів справджуються такі вкладення:

$$B^{\boldsymbol{r}}_{p,p} \subset W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}} \subset B^{\boldsymbol{r}}_{p,2}, \quad 1 < p \le 2,$$

$$B^{\boldsymbol{r}}_{p,2} \subset W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}} \subset B^{\boldsymbol{r}}_{p,p}, \quad 2 \le p < \infty,$$

$$W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}} \subset B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty} \equiv H^{\boldsymbol{r}}_p, \quad 1 \le p \le \infty.$$

Зокрема, при $\theta = p = 2$

$$W^{\boldsymbol{r}}_{2,\boldsymbol{\alpha}} \subset B^{\boldsymbol{r}}_{2,2} \subset W^{\boldsymbol{r}}_{2,\boldsymbol{\alpha}}.$$

Далі вважаємо, що координати вектора $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_d)$ в означених класах впорядковано так, що $0 < r_1 = r_2 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \le \ldots \le r_d$, а також $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$ — вектор із координатами $\gamma_j = \dfrac{r_j}{r_1}$, $j = \overline{1,d}$, і $\boldsymbol{\gamma'} = (\gamma'_1, \ldots, \gamma'_d)$, де $\gamma'_j = \gamma_j$ при $j = \overline{1,\nu}$ і $1 < \gamma'_j < \gamma_j$ при $j = \overline{\nu+1,d}$.

Отримані результати будемо формулювати у термінах порядкових співвідношень. Для додатних величин a і b використовується запис $a \asymp b$, який означає, що існують такі додатні сталі C_1, C_2, які не залежать від одного істотного параметра у величинах a і b, що $C_1 a \le b$ (пишемо $a \ll b$) і $C_2 a \ge b$ (пишемо $a \gg b$). Всі сталі C_i, $i = 1, 2, \ldots$, які зустрічаються в роботі, можуть залежати лише від тих параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій оцінюється похибка наближення, та розмірності простору $\mathbb{R}^d$. У деяких випадках цю залежність будемо вказувати в явному вигляді, а в інших вона буде зрозумілою із контексту. Якщо $\mathfrak{N}$ — деяка скінченна множина, то через $|\mathfrak{N}|$ будемо позначати кількість її елементів.

Тепер наведемо означення норми $\|\cdot\|_{B_{1,1}}$ у підпросторах $B_{1,1}$ функцій $f \in L_1$. Для тригонометричних поліномів t за кратною тригонометричною системою $\{e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\}_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ норма $\|t\|_{B_{1,1}}$ визначається за формулою

$$\|t\|_{B_{1,1}} := \sum_{\boldsymbol{s}} \|A_{\boldsymbol{s}}(t)\|_1.$$

Аналогічно визначається норма $\|f\|_{B_{1,1}}$ для будь-якої функції $f \in L_1$ такої, що ряд $\sum_{\boldsymbol{s}} \|A_{\boldsymbol{s}}(f)\|_1$ збігається. Зазначимо, що для $f \in B_{1,1}$ виконується співвідношення

$$\|f\|_1 \ll \|f\|_{B_{1,1}}. \tag{1}$$

3. Апроксимаційні характеристики. Нехай $\{u_i\}_{i=1}^M$ — ортонормована у просторі $L_2(\pi_d)$ система функцій $u_i \in L_\infty(\pi_d)$, $i = \overline{1, M}$. Кожній функції $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$, поставимо у відповідність апроксимаційний агрегат вигляду $\sum_{i=1}^M (f, u_i)u_i$, тобто ортогональну проєкцію функції f на підпростір, породжений системою функцій $\{u_i\}_{i=1}^M$. Тут і далі $(f, u_i) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(\boldsymbol{x})\overline{u}_i(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$. Якщо $F \subset L_q(\pi_d)$, то величина

$$d_M^\perp\big(F, L_q\big) = \inf_{\{u_i\}_{i=1}^M \subset L_\infty(\pi_d)} \sup_{f\in F} \left\| f - \sum_{i=1}^M (f, u_i)u_i \right\|_q \tag{2}$$

називається ортопоперечником (Фур'є-поперечником) класу F у просторі $L_q(\pi_d)$. Поперечник $d_M^\perp\big(F, L_q\big)$ увів В. М. Темляков [11]. Крім того, В. М. Темляков [7] розглянув близьку до Фур'є-поперечника величину $d_M^B\big(F, L_q\big)$, яка визначається за формулою

$$d_M^B\big(F, L_q\big) = \inf_{G\in L_M(B)_q} \sup_{f\in F\cap\mathcal{D}(G)} \|f - Gf\|_q. \tag{3}$$

Тут $L_M(B)_q$ позначає множину лінійних операторів, що підпорядковані таким умовам:

а) область визначення $\mathcal{D}(G)$ цих операторів містить усі тригонометричні поліноми, а область їхніх значень міститься у підпросторі розмірності M простору L_q;

б) існує таке число $B \ge 1$, що для всіх векторів $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d)$ виконується нерівність

$$\big\|Ge^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\big\|_2 \le B.$$

Зазначимо, що до $L_M(1)_2$ належать оператори ортогонального проєктування на підпростори простору L_2 розмірності M, а також оператори, які задаються на ортонормованій системі функцій за допомогою мультиплікатора, який визначається такою послідовністю $\{\lambda_l\}$, що $|\lambda_l| \le \le 1$ для всіх l. Легко бачити, що згідно з означеннями (2), (3) справджується співвідношення

$$d_M^B\big(F, L_q\big) \le d_M^\perp\big(F, L_q\big). \tag{4}$$

Зрозуміло, що таке співвідношення має місце і у просторі $B_{1,1}$, тобто

$$d_M^B\big(F, B_{1,1}\big) \le d_M^\perp\big(F, B_{1,1}\big). \tag{5}$$

Величини (2), (3) для різноманітних функціональних класів F як у просторах Лебега $L_q(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$, так і в інших функціональних просторах досліджувались у роботах [11– 28]. З детальною бібліографією можна ознайомитися у монографіях [3, 4, 7, 8].

У деяких випадках при встановленні оцінок знизу величин $d_M^B\big(B^r_{p,\theta}, B_{1,1}\big)$ будемо використовувати оцінки колмогоровських поперечників цих класів, і тому нагадаємо означення відповідної апроксимаційної характеристики.

Нехай $\mathscr{X}$ — нормований простір із нормою $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$, $\mathfrak{L}_M(\mathscr{X})$ — сукупність підпросторів у просторі $\mathscr{X}$ розмірності, що не перевищує M, і W — центрально-симетрична множина в $\mathscr{X}$.

Величина

$$d_M\big(W, \mathscr{X}\big) = \inf_{L_M \in \mathfrak{L}_M(\mathscr{X})} \sup_{w \in W} \inf_{u \in L_M} \|w-u\|_{\mathscr{X}}$$

називається колмогоровським M-поперечником множини W у просторі $\mathscr{X}$.

Поперечник $d_M\big(W, \mathscr{X}\big)$ увів у 1936 р. А. М. Колмогоров [29]. Зауважимо, що означені вище апроксимаційні характеристики у просторах $\mathscr{X} = L_q(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$, або $\mathscr{X} = B_{1,1}$ пов'язані між собою співвідношеннями

$$d_M\big(F, \mathscr{X}\big) \le d_M^B\big(F, \mathscr{X}\big) \le d_M^{\perp}\big(F, \mathscr{X}\big). \tag{6}$$

4. Допоміжні твердження. Попередньо зазначимо, що в допоміжних твердженнях, які наведено нижче, а також в одержаних результатах $\log M$ означає логарифм числа M за основою 2.

Теорема А. *Нехай* $d \ge 1$, $1 < p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $r_1 > 0$. *Тоді*

$$d_M^{\perp}\big(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}, L_1\big) \asymp d_M^B\big(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}, L_1\big) \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1 + (\frac{1}{p^*} - \frac{1}{\theta})_+}, \tag{7}$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$, $p^* = \min\{2, p\}$.

Теорема Б. *Нехай* $d \ge 1$, $1 \le \theta \le \infty$, $r_1 > 0$. *Тоді*

$$d_M^B\big(B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}, L_1\big) \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1 + 1 - \frac{1}{\theta}}. \tag{8}$$

Оцінки (7), (8) при $1 \le \theta < \infty$ одержано в [20], а при $\theta = \infty$ — у [14].

Теорема В [1]**.** *Нехай* $1 \le p, \theta \le \infty$, $r_1 > 0$. *Тоді*

$$d_M\big(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}, B_{1,1}\big) \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1 + 1 - \frac{1}{\theta}}.$$

Для формулювання наступного твердження нам знадобляться деякі позначення.

Нехай $Q_n^{\gamma} = \bigcup\limits_{(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{\gamma}) \le n} \rho(\boldsymbol{s})$, $n \in \mathbb{N}$. Множину Q_n^{γ} називають східчастим гіперболічним хрестом.

Покладемо

$$T(Q_n^{\gamma}) = \Big\{ t \colon t(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in Q_n^{\gamma}} c_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x})}, c_{\boldsymbol{k}} \in \mathbb{C}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \Big\}.$$

Для нормованого функціонального простору $\mathscr{Y}$ з нормою $\|\cdot\|_{\mathscr{Y}}$ і $f \in \mathscr{Y}$ позначимо через

$$E_{Q_n^{\gamma}}\big(f\big)_{\mathscr{Y}} := \inf_{t \in T(Q_n^{\gamma})} \|f - t\|_{\mathscr{Y}}$$

величину найкращого наближення функції f у просторі $\mathscr{Y}$ за допомогою поліномів, що належать множині $T(Q_n^{\gamma})$. Якщо $F \subset \mathscr{Y}$ — деякий функціональний клас, то покладемо

$$E_{Q_n^{\gamma}}\big(F\big)_{\mathscr{Y}} := \sup_{f \in F} E_{Q_n^{\gamma}}\big(f\big)_{\mathscr{Y}}.$$

У випадку $\boldsymbol{\gamma} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^d$ будемо писати $T(Q_n)$ замість $T(Q_n^{\boldsymbol{\gamma}})$ і відповідно $E_{Q_n}\big(F\big)_{\mathscr{Y}}$ замість $E_{Q_n^{\boldsymbol{\gamma}}}\big(F\big)_{\mathscr{Y}}$.

Для величин $E_{Q_n}\big(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}\big)_{B_{1,1}}$, $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_1) \in \mathbb{R}^d_+$, як наслідок оцінки колмогоровського поперечника $d_M\big(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}, B_{1,1}\big)$, $M \asymp 2^n n^{d-1}$ [1], можна сформулювати таке твердження.

Теорема Г. *Нехай* $d \geq 1$, $1 \leq p, \theta \leq \infty$, $r_1 > 0$. *Тоді*

$$E_{Q_n}\big(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}\big)_{B_{1,1}} \asymp 2^{-nr_1} n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Наступні твердження є аналогами теорем Б, В і Г для класів $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$.

Теорема Д [1]. *Нехай* $d \geq 1$, $1 < p < \infty$, $r_1 > 0$. *Тоді при* $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$ *справедливою є оцінка*

$$d_M\big(W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}, B_{1,1}\big) \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1 + \frac{1}{2}}.$$

Теорема Е. *Нехай* $d \geq 1$, $1 < p < \infty$, $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_1) \in \mathbb{R}^d_+$. *Тоді при* $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$

$$E_{Q_n}\big(W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}\big)_{B_{1,1}} \asymp 2^{-nr_1} n^{\frac{d-1}{2}}. \tag{9}$$

Оцінка зверху в (9) є наслідком теореми Г при $\theta = 2$, а відповідна оцінка знизу випливає з теореми Д при $M \asymp 2^n n^{d-1}$ і $\nu = d$.

Теорема Ж [14]. *Нехай* $d \geq 1$, $r_1 > 0$. *Тоді при* $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$

$$d^B_M\big(W^{\boldsymbol{r}}_{1,\boldsymbol{\alpha}}, L_1\big) \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{r_1+1}.$$

Лема А [7, с. 11]. *Справджується оцінка*

$$\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}') \geq n} 2^{-\beta(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})} \asymp 2^{-\beta n} n^{\nu-1}, \quad \beta > 0.$$

Лема Б [7] (гл. 1, §2). *Для будь-якого* $\eta > 0$ *знайдеться така стала* $C(\eta) > 0$, *що для довільного полінома* $t \in T(Q_n)$ *виконується нерівність*

$$\sum_{\boldsymbol{k} \in Q_n} |\widehat{t}(\boldsymbol{k})| \leq C(\eta) n^{\eta} 2^n \|t\|_1.$$

5. Апроксимаційні характеристики класів періодичних функцій однієї змінної. Одержані у цьому пункті результати стосуються оцінок величин $d^{\perp}_M\big(F, B_{1,1}\big)$ і $d^B_M\big(F, B_{1,1}\big)$, де F — класи $B^{r_1}_{p,\theta}$ або $W^{r_1}_{p,\alpha}$.

Справедливим є таке твердження.

Теорема 1. *Нехай* $d = 1$, $1 < p \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ *і* $r_1 > 0$. *Тоді виконуються співвідношення*

$$d^{\perp}_M\big(B^{r_1}_{p,\theta}, B_{1,1}\big) \asymp d^B_M\big(B^{r_1}_{p,\theta}, B_{1,1}\big) \asymp M^{-r_1}. \tag{10}$$

Доведення. Попередньо зауважимо, що згідно зі співвідношенням (6) для доведення (10) достатньо встановити оцінку зверху для ортопоперечника $d^{\perp}_M\big(B^{r_1}_{p,\theta}, B_{1,1}\big)$, $1 < p < \infty$, а знизу — для величини $d^B_M\big(B^{r_1}_{p,\theta}, B_{1,1}\big)$.

Крім того, оскільки $B^{r_1}_{\infty,\theta} \subset B^{r_1}_{p,\theta} \subset H^{r_1}_p$, $1 < p < \infty$, оцінку зверху достатньо отримати для ортопоперечника $d^{\perp}_M\big(H^{r_1}_p, B_{1,1}\big)$. Отже, нехай $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 4$, і $f \in H^{r_1}_p$, $1 < p < \infty$. Розглянемо наближення функції f за допомогою поліномів $t_n(f)$ вигляду

$$t_n(f) = \sum_{s=1}^{n} \delta_s(f),$$

де число $n \in \mathbb{N}$ пов'язане з M співвідношенням $2^{n+1} \le M \le 2^{n+2}$. Тоді згідно з означенням норми у просторі $B_{1,1}$, беручи до уваги властивість згортки, одержуємо

$$\|f - t_n(f)\|_{B_{1,1}} = \left\| \sum_{s=n+1}^{\infty} \delta_s(f) \right\|_{B_{1,1}} = \sum_{s\in\mathbb{N}} \left\| A_s * \sum_{s'=n+1}^{\infty} \delta_{s'}(f) \right\|_1 \le$$

$$\le \sum_{s=n}^{\infty} \left\| A_s * \sum_{s'=s-1}^{s+1} \delta_{s'}(f) \right\|_p \le \sum_{s=n}^{\infty} \|A_s\|_1 \left\| \sum_{s'=s-1}^{s+1} \delta_{s'}(f) \right\|_p = J_1. \tag{11}$$

Для продовження оцінки величини J_1 зазначимо, що згідно зі співвідношенням $\|V_{2^s}\|_1 \le C_3$ (див., наприклад, [8], гл. 1, § 1) маємо

$$\|A_s\|_1 = \|V_{2^s} - V_{2^{s-1}}\|_1 \le \|V_{2^s}\|_1 + \|V_{2^{s-1}}\|_1 \le C_4. \tag{12}$$

Крім того, беручи до уваги, що (див., наприклад, [8], гл. 1, § 3)

$$\|\delta_{s'}(f)\|_p \ll 2^{-s'r_1}, s' \in \mathbb{N},$$

можемо записати

$$\left\| \sum_{s'=s-1}^{s+1} \delta_{s'}(f) \right\|_p \le \sum_{s'=s-1}^{s+1} \|\delta_{s'}(f)\|_p \ll \sum_{s'=s-1}^{s+1} 2^{-s'r_1} \ll 2^{-sr_1}. \tag{13}$$

Отже, з (11) із урахуванням (12), (13) випливає, що

$$J_1 \ll \sum_{s=n}^{\infty} 2^{-sr_1} \ll 2^{-nr_1},$$

і з огляду на співвідношення між числами M і n приходимо до оцінок

$$d_M^B\big(B_{p,\theta}^{r_1}, B_{1,1}\big) \le d_M^{\perp}\big(B_{p,\theta}^{r_1}, B_{1,1}\big) \ll M^{-r_1}.$$

Оцінка знизу величини $d_M^B\big(B_{p,\theta}^{r_1}, B_{1,1}\big)$ випливає з теореми А згідно з нерівністю $\|\cdot\|_{B_{1,1}} \gg$ $\gg \|\cdot\|_1$.

Теорему 1 доведено.

Як наслідок одержаного результату і відомих оцінок величин $d_M^B\big(W_{p,\alpha}^{r_1}, L_1\big)$ [14] сформулюємо відповідне теоремі 1 твердження для класів $W_{p,\alpha}^{r_1}$.

Теорема 2. *Нехай* $d = 1,\ 1 < p \le \infty,\ r_1 > 0$. *Тоді при* $\alpha \in \mathbb{R}$ *справджуються співвідношення*

$$d_M^{\perp}\big(W_{p,\alpha}^{r_1}, B_{1,1}\big) \asymp d_M^B\big(W_{p,\alpha}^{r_1}, B_{1,1}\big) \asymp M^{-r_1}. \tag{14}$$

Доведення. Оцінки зверху в (14) для обох величин випливають з теореми 1 при $\theta = \infty$ згідно з вкладенням $W^{r_1}_{p,\alpha} \subset H^{r_1}_p$. Відповідна оцінка знизу для величини $d^B_M\big(W^{r_1}_{p,\alpha}, B_{1,1}\big)$, $1 < p \leq \infty$, є наслідком оцінки [14]

$$d^B_M\big(W^{r_1}_{p,\alpha}, L_1\big) \asymp M^{-r_1}$$

і співвідношення (1).

Теорему 2 доведено.

У теоремах 1, 2 залишився не розглянутим випадок $p = 1$, для якого вдалося встановити тільки порядки величин $d^B_M\big(B^{r_1}_{1,\theta}, B_{1,1}\big)$ і $d^B_M\big(W^{r_1}_{1,\alpha}, B_{1,1}\big)$.

Справедливим є таке твердження.

Теорема 3. *Нехай* $d = 1,\ r_1 > 0,\ 1 \leq \theta \leq \infty$. *Тоді*

$$d^B_M\big(B^{r_1}_{1,\theta}, B_{1,1}\big) \asymp M^{-r_1}. \tag{15}$$

Доведення. Як і при доведенні теореми 1, оцінку зверху достатньо одержати для класів $H^{r_1}_1$. Розглянемо наближення функцій $f \in H^{r_1}_1$ тригонометричними поліномами вигляду

$$\widetilde{t}_n(f) = \sum_{s=1}^{n-1} A_s(f),$$

де число $n \in \mathbb{N}$ пов'язане з M співвідношенням $2^n \leq M \leq 2^{n+1}$. Вище було зазначено, що оператор G, який ставить у відповідність функції f поліном такого вигляду, належить $L_M(1)_2$.

Отже, згідно з означенням норми у просторі $B_{1,1}$ можемо записати

$$\|f - \widetilde{t}_n(f)\|_{B_{1,1}} = \left\|\sum_{s=n}^{\infty} A_s(f)\right\|_{B_{1,1}} = \sum_{s\in\mathbb{N}} \left\|A_s * \sum_{s'=n}^{\infty} A_{s'}(f)\right\|_1 \leq$$

$$\leq \sum_{s=n-1}^{\infty} \left\|A_s * \sum_{s'=s-1}^{s+1} A_{s'}(f)\right\|_1 \leq \sum_{s=n-1}^{\infty} \|A_s\|_1 \left\|\sum_{s'=s-1}^{s+1} A_{s'}(f)\right\|_1 \ll$$

$$\ll \sum_{s=n-1}^{\infty} \sum_{s'=s-1}^{s+1} \big\|A_{s'}(f)\big\|_1 \ll \sum_{s=n-2}^{\infty} \big\|A_s(f)\big\|_1 \ll \sum_{s=n-2}^{\infty} 2^{-sr_1} \ll 2^{-nr_1}.$$

Враховуючи співвідношення між числами M і n, одержуємо

$$d^B_M\big(B^{r_1}_{1,\theta}, B_{1,1}\big) \ll M^{-r_1}.$$

Оцінка знизу в (15) випливає з теореми Б згідно зі співвідношенням (1).

Теорему 3 доведено.

Аналогічне твердження є справедливим і для класів $W^{r_1}_{1,\alpha}$.

Теорема 4. *Нехай* $d = 1,\ r_1 > 0$. *Тоді при* $\alpha \in \mathbb{R}$

$$d^B_M\big(W^{r_1}_{1,\alpha}, B_{1,1}\big) \asymp M^{-r_1}. \tag{16}$$

Доведення. Оцінка зверху в (16) випливає з теореми 3 при $\theta = \infty$ згідно з вкладенням $W^{r_1}_{1,\alpha} \subset H^{r_1}_1$. Відповідна оцінка знизу є наслідком теореми Ж та співвідношення (1).

Теорему 4 доведено.

Прокоментуємо одержані результати.

Насамперед зазначимо, що розглянуті апроксимаційні характеристики класів $B^{r_1}_{p,\theta}$, $1 \leq \leq \theta < \infty$, $H^{r_1}_p$ і $W^{r_1}_{p,\alpha}$ у просторі $B_{1,1}$ однакові за порядком. Більше того, ці характеристики мають такі ж порядки й у просторі L_1. Крім того, в усіх розглянутих випадках одержані оцінки не залежать від параметрів p і θ.

6. Апроксимаційні характеристики класів періодичних функцій багатьох змінних. У цьому пункті встановимо точні за порядком оцінки розглянутих вище апроксимаційних характеристик, але вже у багатовимірному випадку ($d \geq 2$).

Справедливим є таке твердження.

Теорема 5. *Нехай* $d \geq 2$, $1 < p \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$. *Тоді при* $r_1 > 0$ *виконуються співвідношення*

$$d^{\perp}_M\big(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}, B_{1,1}\big) \asymp d^B_M\big(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}, B_{1,1}\big) \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}. \tag{17}$$

Доведення. Як зазначено при доведенні теореми 1, оцінку зверху достатньо встановити для ортопоперечника $d^{\perp}_M\big(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}, B_{1,1}\big)$, $1 < p < \infty$, а знизу — для величини $d^B_M\big(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}, B_{1,1}\big)$, $1 < p \leq \infty$.

Отже, нехай числа M і $n \in \mathbb{N}$ пов'язані співвідношенням $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$. Розглянемо для $f \in B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, $1 < p < \infty$, наближаючий поліном

$$S_{Q_n^{\boldsymbol{\gamma}'}}(f, \boldsymbol{x}) = \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')<n} \delta_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}),$$

який називають східчасто-гіперболічною сумою Фур'є функції f. Тоді, покладаючи $\boldsymbol{\gamma}'(d) = = \gamma'_1 + \ldots + \gamma'_d$, згідно з означенням норми у просторі $B_{1,1}$ можемо записати

$$\Bigg\| f - \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')<n} \delta_{\boldsymbol{s}}(f) \Bigg\|_{B_{1,1}} = \Bigg\| \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\geq n} \delta_s(f) \Bigg\|_{B_{1,1}} =$$

$$= \sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d} \Bigg\| A_{\boldsymbol{s}} * \sum_{\substack{\boldsymbol{s}'\in\mathbb{N}^d \\ (\boldsymbol{s}',\boldsymbol{\gamma}')\geq n}} \delta_{\boldsymbol{s}'}(f) \Bigg\|_1 \leq \sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d} \Bigg\| A_{\boldsymbol{s}} * \sum_{\substack{\boldsymbol{s}'\in\mathbb{N}^d \\ (\boldsymbol{s}',\boldsymbol{\gamma}')\geq n}} \delta_{\boldsymbol{s}'}(f) \Bigg\|_p \leq$$

$$\leq \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\geq n-\boldsymbol{\gamma}'(d)} \Bigg\| A_{\boldsymbol{s}} * \sum_{\substack{\boldsymbol{s}'\in\mathbb{N}^d \\ \|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty\leq 1}} \delta_{\boldsymbol{s}'}(f) \Bigg\|_p \leq$$

$$\leq \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\geq n-\boldsymbol{\gamma}'(d)} \|A_{\boldsymbol{s}}\|_1 \Bigg\| \sum_{\substack{\boldsymbol{s}'\in\mathbb{N}^d \\ \|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty\leq 1}} \delta_{\boldsymbol{s}'}(f) \Bigg\|_p \ll$$

$$\ll \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\geq n-\boldsymbol{\gamma}'(d)} \sum_{\substack{\boldsymbol{s}'\in\mathbb{N}^d \\ \|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty\leq 1}} \|\delta_{\boldsymbol{s}'}(f)\|_p \leq \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\geq n-2\boldsymbol{\gamma}'(d)} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p = J_2. \qquad (18)$$

Для подальшої оцінки величини J_2 розглянемо три випадки.

Нехай $1<\theta<\infty$. Тоді, застосовуючи до J_2 нерівність Гельдера з показником θ, можемо записати

$$J_2 \leq \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\geq n-2\boldsymbol{\gamma}'(d)} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta}\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\geq n-2\boldsymbol{\gamma}'(d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta'}\right)^{\frac{1}{\theta'}} \ll$$

$$\ll \|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\geq n-2\boldsymbol{\gamma}'(d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta'}\right)^{\frac{1}{\theta'}} \ll \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\geq n-2\boldsymbol{\gamma}'(d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})r_1\theta'}\right)^{\frac{1}{\theta'}}.$$

Далі, використовуючи лему А, отримуємо

$$J_2 \ll 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)(1-\frac{1}{\theta})} \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}$$

і з огляду на (18) приходимо до шуканої оцінки.

Нехай $\theta=1$. Тоді величина J_2 оцінюється таким чином:

$$J_2 = \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\geq n-2\boldsymbol{\gamma}'(d)} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})}\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})r_1} \leq$$

$$\leq \sup_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\geq n-2\boldsymbol{\gamma}'(d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')r_1}\|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,1}} \ll 2^{-nr_1} \asymp M^{-r_1}\left(\log^{\nu-1} M\right)^{r_1}. \qquad (19)$$

Із (18), (19) випливає шукана оцінка зверху при $\theta=1$.

Якщо ж $\theta=\infty$, то враховуючи, що для $f\in B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}$ справджується співвідношення $\|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p \ll$ $\ll 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})}$, $\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d$, з огляду на лему А маємо

$$J_2 \ll \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\geq n-2\boldsymbol{\gamma}'(d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} = \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\geq n-2\boldsymbol{\gamma}'(d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})r_1} \ll$$

$$\ll 2^{-nr_1} n^{\nu-1} \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+1}. \qquad (20)$$

Поєднуючи (18) і (20), приходимо до шуканої оцінки.

Отже, оцінку зверху для ортопоперечника $d^\perp_M\left(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}, B_{1,1}\right)$ при $1\leq\theta\leq\infty$ і $1<p<\infty$ доведено.

Якщо ж $p=\infty$, то оцінка зверху величини $d^\perp_M\left(B^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}, B_{1,1}\right)$, згідно з вкладенням $B^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}\subset$ $\subset B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, $1<p<\infty$, є наслідком щойно одержаної оцінки.

Що стосується оцінки знизу величини $d^B_M\left(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}, B_{1,1}\right)$, то вона є наслідком теореми В, оскільки

$$d^B_M\left(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}, B_{1,1}\right) \geq d_M\left(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}, B_{1,1}\right) \asymp M^{-r_1}\left(\log^{\nu-1} M\right)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}.$$

Теорему 5 доведено.

Наступне твердження містить аналогічні теоремі 5 результати для класів $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$.

Теорема 6. *Нехай* $d \geq 2,\ 1 < p \leq \infty,\ r_1 > 0$. *Тоді при* $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$ *справджуються співвідношення*

$$d_M^{\perp}\big(W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}, B_{1,1}\big) \asymp d_M^{B}\big(W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}, B_{1,1}\big) \asymp M^{-r_1}\big(\log^{\nu-1} M\big)^{r_1+\frac{1}{2}}. \tag{21}$$

Доведення. Оцінки знизу в (21) є наслідком теореми Д, оскільки

$$d_M^{B}\big(W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}, B_{1,1}\big) \geq d_M\big(W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}, B_{1,1}\big).$$

Відповідну оцінку зверху для ортопоперечника $d_M^{\perp}\big(W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}, B_{1,1}\big)$ одержимо, скориставшись теоремою 5.

Нехай $p \in (1, 2]$. Тоді, беручи до уваги, що $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}} \subset B^{\boldsymbol{r}}_{p,2}$, згідно з (17) при $\theta = 2$ записуємо

$$d_M^{\perp}\big(W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}, B_{1,1}\big) \ll d_M^{\perp}\big(B^{\boldsymbol{r}}_{p,2}, B_{1,1}\big) \asymp M^{-r_1}\big(\log^{\nu-1} M\big)^{r_1+\frac{1}{2}}. \tag{22}$$

Якщо ж $p \in (2, \infty)$, то, використовуючи (22), маємо

$$d_M^{\perp}\big(W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}, B_{1,1}\big) \ll d_M^{\perp}\big(W^{\boldsymbol{r}}_{2,\boldsymbol{\alpha}}, B_{1,1}\big) \ll M^{-r_1}\big(\log^{\nu-1} M\big)^{r_1+\frac{1}{2}}.$$

Теорему 6 доведено.

На завершення цього пункту встановимо порядки величин $d_M^{B}\big(B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}, B_{1,1}\big)$ і $d_M^{B}\big(W^{\boldsymbol{r}}_{1,\boldsymbol{\alpha}}, B_{1,1}\big)$.

Теорема 7. *Нехай* $r_1 > 0,\ 1 \leq \theta \leq \infty$. *Тоді при* $d \geq 2$

$$d_M^{B}\big(B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}, B_{1,1}\big) \asymp M^{-r_1}\big(\log^{\nu-1} M\big)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}. \tag{23}$$

Доведення. Для встановлення оцінки зверху підберемо число $n \in \mathbb{N}$ зі співвідношення $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$ і розглянемо для функції $f \in B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}$ наближаючий поліном вигляду

$$\bar{t}_n(f) = \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')<n} A_{\boldsymbol{s}}(f).$$

Як зазначалося вище, оператор G, який ставить у відповідність функції f поліном такого вигляду, належить $L_M(1)_2$. Тому, використовуючи оцінку [1]

$$\|f - \bar{t}_n(f)\|_{B_{1,1}} \ll 2^{-nr_1} n^{(\nu-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)},$$

де число $n \in \mathbb{N}$ задовольняє умову $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$, можемо записати

$$d_M^{B}\big(B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}, B_{1,1}\big) \ll M^{-r_1}\big(\log^{\nu-1} M\big)^{r_1+1-\frac{1}{\theta}}.$$

Оцінка знизу в (23) є наслідком теореми Б.

Теорему 7 доведено.

Аналог теореми 7 для класів $W^{\boldsymbol{r}}_{1,\boldsymbol{\alpha}}$ має такий вигляд.

Теорема 8. *Нехай* $r_1 > 0$. *Тоді при* $d \geq 2$ *і* $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$

$$d_M^{B}\big(W^{\boldsymbol{r}}_{1,\boldsymbol{\alpha}}, B_{1,1}\big) \asymp M^{-r_1}\big(\log^{\nu-1} M\big)^{r_1+1}. \tag{24}$$

Доведення. Оцінка зверху в (24) випливає з теореми 7 при $\theta = \infty$, оскільки $W^{\boldsymbol{r}}_{1,\boldsymbol{\alpha}} \subset H^{\boldsymbol{r}}_1$. Відповідна оцінка знизу є наслідком теореми Ж.

Теорему 8 доведено.

Прокоментуємо теореми 5 – 8. У багатовимірному випадку $(d \geq 2)$, на відміну від одновимірного, одержані оцінки розглянутих апроксимаційних характеристик класів $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, $1 \leq \theta < \infty$, у просторі $B_{1,1}$ залежать від параметра θ. Крім цього, в результаті проведених досліджень величин $d^B_M\big(W^{\boldsymbol{r}}_{1,\boldsymbol{\alpha}}, B_{1,1}\big)$ і $d^B_M\big(H^{\boldsymbol{r}}_1, B_{1,1}\big)$ виявлено, що для них справджується співвідношення

$$d^B_M\big(W^{\boldsymbol{r}}_{1,\boldsymbol{\alpha}}, B_{1,1}\big) \asymp d^B_M\big(H^{\boldsymbol{r}}_1, B_{1,1}\big).$$

З іншого боку, при $1 \leq \theta < \infty$

$$d^B_M\big(B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}, B_{1,1}\big) \asymp d^B_M\big(F^{\boldsymbol{r}}_1, B_{1,1}\big)\big(\log^{\nu-1} M\big)^{-\frac{1}{\theta}},$$

де $F^{\boldsymbol{r}}_1 = W^{\boldsymbol{r}}_{1,\boldsymbol{\alpha}}$ або $F^{\boldsymbol{r}}_1 = H^{\boldsymbol{r}}_1$.

Варто зазначити, що на всіх трьох класах $B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}$, $W^{\boldsymbol{r}}_{1,\boldsymbol{\alpha}}$ і $H^{\boldsymbol{r}}_1$ згадані апроксимативні характеристики у просторах L_1 і $B_{1,1}$ мають однакові порядки. Що стосується цих характеристик, а також ортопоперечників класів $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ і $H^{\boldsymbol{r}}_p$, $1 < p \leq \infty$, у просторі $B_{1,1}$, то вони відрізняються за порядком від відповідних апроксимаційних характеристик у просторі L_1 (див. теореми А, 5, 6, а також теореми 4.1, 4.1′ [14]).

7. Властивість операторів найкращого наближення класів $B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}$ у просторі $B_{1,1}$. Насамперед наведемо деякі зауваження стосовно питання, яке досліджується у цій частині роботи.

Повертаючись до теореми Г, у якій, зокрема, при $d \geq 2$ і $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_1) \in \mathbb{R}^d_+$ одержано оцінку

$$E_{Q_n}\big(B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}\big)_{B_{1,1}} \asymp 2^{-nr_1} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}, \qquad 1 \leq \theta \leq \infty, \quad r_1 > 0, \tag{25}$$

зазначимо, що вона реалізується за допомогою наближення класів $B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}$ у просторі $B_{1,1}$ лінійним методом. Більш конкретно, в якості такого лінійного методу використовувалась послідовність лінійних операторів $\big\{\mathbb{V}_{Q_n}\big\}_{n=1}^{\infty}$, які співставляють функції $f \in B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}$ поліном вигляду

$$\mathbb{V}_{Q_n} f = V_{Q_n}(f) := \sum_{(\boldsymbol{s},1) \leq n} A_{\boldsymbol{s}}(f) = f * V_{Q_n},$$

де

$$V_{Q_n}(\boldsymbol{x}) = \sum_{(\boldsymbol{s},1) \leq n} A_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x}).$$

Проте послідовність цих операторів має один суттєвий недолік, який полягає в тому, що норма оператора $\mathbb{V}_{Q_n}$, як оператора із L_1 в L_1, дорівнює $\|V_{Q_n}\|_1$, і як показано в [7] (див. наслідок з теореми 1.2.1), справджується оцінка

$$\|V_{Q_n}\|_1 \gg n^{d-1}.$$

Іншими словами, послідовність лінійних операторів $\big\{\mathbb{V}_{Q_n}\big\}_{n=1}^{\infty}$, яка реалізує порядок величин $E_{Q_n}\big(B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}\big)_{B_{1,1}}$ при $d \geq 2$, виявилася необмеженою. У зв'язку з цією обставиною природно виникає питання про існування обмеженої послідовності операторів $\mathbb{L}_{Q_n} : L_1 \to T(Q_n)$, яка б найкращим чином наближала класи $B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}$ у просторі $B_{1,1}$. Відповідь на це питання дається у наступному твердженні.

Теорема 9. *Нехай на* $L_1^0(\pi_d)$, $d \geq 2$, *визначено послідовність обмежених лінійних операторів* $\mathbb{L}_{Q_n}$, *які співставляють кожній функції з* $L_1^0(\pi_d)$ *тригонометричний поліном з множини* $T(Q_n)$ *таким чином, що для функцій* $f \in B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}$, $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_1) \in \mathbb{R}^d_+$, $1 \leq \theta \leq \infty$, *виконується співвідношення*

$$\|f - \mathbb{L}_{Q_n} f\|_{B_{1,1}} \ll E_{Q_n}\big(B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}\big)_{B_{1,1}}.$$

Тоді для норми оператора $\mathbb{L}_{Q_n}$ *і будь-якого* $\varepsilon > 0$ *справджується оцінка*

$$\|\mathbb{L}_{Q_n}\| \gg n^{(d-1)(1-\varepsilon)}.$$

Доведення. Схема доведення аналогічна тій, що використовувалась у роботі [30] при дослідженні подібного питання, пов'язаного з наближенням класів $B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}$ у просторі L_1.

Отже, нехай $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_d)$, $\tau_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, d}$, і $\mathbb{I}_{\boldsymbol{\tau}}$ — оператор зсуву аргументу функції f на вектор $\boldsymbol{\tau}$, тобто $\mathbb{I}_{\boldsymbol{\tau}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\tau})$. Наслідуючи Ю. Марцинкевича [31], будемо розглядати обмежений лінійний оператор $\mathbb{T}_{Q_n}$, який діє на функцію f згідно з формулою

$$\mathbb{T}_{Q_n} f(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} (\mathbb{I}_{-\boldsymbol{\tau}} \mathbb{L}_{Q_n} \mathbb{I}_{\boldsymbol{\tau}} f)(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{\tau}.$$

Тоді, внаслідок інваріантності норми відносно зсуву аргументу між нормами операторів $\mathbb{T}_{Q_n}$ і $\mathbb{L}_{Q_n}$, виконується співвідношення

$$\|\mathbb{T}_{Q_n}\| \leq \|\mathbb{L}_{Q_n}\|. \tag{26}$$

Крім того, легко переконатися, що

$$\mathbb{T}_{Q_n} e^{i(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x})} = \begin{cases} c_{n,\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x})}, & \boldsymbol{k} \in Q_n, \\ 0, & \boldsymbol{k} \overline{\in} Q_n, \end{cases}$$

і тому оператор $\mathbb{T}_{Q_n}$ діє на функцію f, як оператор згортки, тобто

$$\mathbb{T}_{Q_n} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) * \sum_{\boldsymbol{k} \in Q_n} c_{n,\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x})}. \tag{27}$$

Далі, нехай $f \in B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}$. Тоді $\mathbb{I}_{\boldsymbol{\tau}} f \in B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}$ і згідно з умовою теореми маємо

$$\|\mathbb{I}_{\boldsymbol{\tau}} f - \mathbb{L}_{Q_n}(\mathbb{I}_{\boldsymbol{\tau}} f)\|_{B_{1,1}} \ll E_{Q_n}\big(B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}\big)_{B_{1,1}}. \tag{28}$$

Нехай $\mathbb{I}$ позначає одиничний оператор. Тоді, використовуючи (28), записуємо

$$\big\|f - \mathbb{T}_{Q_n} f\big\|_{B_{1,1}} = (2\pi)^{-d} \left\| \int\limits_{\pi_d} \mathbb{I}_{-\boldsymbol{\tau}} (\mathbb{I} - \mathbb{L}_{Q_n})(\mathbb{I}_{\boldsymbol{\tau}} f) d\boldsymbol{\tau} \right\|_{B_{1,1}} \leq$$

$$\leq (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} \Big\| \mathbb{I}_{-\boldsymbol{\tau}} \big(\mathbb{I}_{\boldsymbol{\tau}} f - \mathbb{L}_{Q_n}(\mathbb{I}_{\boldsymbol{\tau}} f)\big) \Big\|_{B_{1,1}} d\boldsymbol{\tau} =$$

$$= (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} \big\| \mathbb{I}_{\boldsymbol{\tau}} f - \mathbb{L}_{Q_n}(\mathbb{I}_{\boldsymbol{\tau}} f) \big\|_{B_{1,1}} d\boldsymbol{\tau} \ll E_{Q_n}\big(B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}\big)_{B_{1,1}}. \tag{29}$$

Таким чином, зі співвідношень (26) і (29) випливає, що доведення достатньо провести для послідовності операторів, які діють згідно з формулою (27).

Отже, нехай $f \in B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}$ і

$$\mathbb{L}_{Q_n} f(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) L_{Q_n}(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y},$$

де

$$L_{Q_n}(\boldsymbol{y}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in Q_n} c_{n,\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{y})}.$$

Тоді для норми оператора $\mathbb{L}_{Q_n}$ справджується співвідношення

$$\|\mathbb{L}_{Q_n}\| = \|L_{Q_n}\|_1. \tag{30}$$

Для проведення подальших міркувань нам знадобиться допоміжне твердження.

Лема 1. *Для будь-якого $\delta > 0$ існує така стала $C(\delta) > 0$, що для всіх n виконується нерівність*

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in Q_n} |c_{n,\boldsymbol{k}}| \geq C(\delta)|Q_n| n^{-(d-1)\delta}.$$

Доведення. Нехай задано число $n \in \mathbb{N}$. Розглянемо функцію

$$\upsilon_n(\boldsymbol{x}) = C_5 (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} \prod_{j=1}^{d} V_{2^n}(x_j - y_j) F_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{y},$$

яка з деякою сталою $C_5 > 0$ належить класу $W^{\boldsymbol{r}}_{1,\boldsymbol{\alpha}}$, а отже і класу $H^{\boldsymbol{r}}_1$, оскільки $W^{\boldsymbol{r}}_{1,\boldsymbol{\alpha}} \subset \subset H^{\boldsymbol{r}}_1$. Таким чином, згідно з означенням норми у просторі $H^{\boldsymbol{r}}_1$ для кожного вектора $\boldsymbol{s} \in \mathbb{N}^d$ виконується нерівність

$$\|A_{\boldsymbol{s}}(\upsilon_n)\|_1 \ll 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})}.$$

Покладемо $S_n = \left\{\boldsymbol{s} \in \mathbb{N}^d \colon (\boldsymbol{s},1) \leq n\right\}$, $\Delta S_{n,d} = S_{n+3d} - S_{n-d}$ і розглянемо функцію

$$g_n(\boldsymbol{x}) = C_6 n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{\boldsymbol{s}\in\Delta S_{n,d}} A_{\boldsymbol{s}}(\upsilon_n,\boldsymbol{x}), C_6 > 0,$$

яка, як показано в [30], з відповідною сталою $C_6 > 0$ належить класу $B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}$.

Далі розглянемо наближення функції g_n у просторі $B_{1,1}$ поліномами вигляду

$$V_{Q_{n+d}}(g_n) := V_{Q_{n+d}}(g_n,\boldsymbol{x}) = \sum_{(\boldsymbol{s},1)\leq n+d} A_{\boldsymbol{s}}(g_n,\boldsymbol{x}).$$

Повторивши міркування, які було використано при доведенні теореми 7 [1], отримаємо

$$\|g_n - V_{Q_{n+d}}(g_n)\|_{B_{1,1}} \ll 2^{-nr_1} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{31}$$

Оскільки для поліномів $V_{Q_{n+d}}(g_n)$ при всіх $\boldsymbol{k} \in Q_n$ справджується рівність

$$\widehat{g}_n(\boldsymbol{k}) = \widehat{V}_{Q_{n+d}}(g_n(\boldsymbol{k})),$$

то

$$\mathbb{L}_{Q_n} g_n = \mathbb{L}_{Q_n} V_{Q_{n+d}}(g_n).$$

Окрім цього, згідно з умовою теореми маємо

$$\|g_n - \mathbb{L}_{Q_n} g_n\|_{B_{1,1}} \ll E_{Q_n}\big(B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}\big)_{B_{1,1}}. \tag{32}$$

Легко переконатися, що із (31), (32) випливає оцінка

$$\|V_{Q_{n+d}}(g_n) - \mathbb{L}_{Q_n} g_n\|_1 \ll 2^{-nr_1} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Справді, беручи до уваги нерівність $\|\cdot\|_1 \ll \|\cdot\|_{B_{1,1}}$ і використовуючи теорему Г та співвідношення (31), (32), маємо

$$\|V_{Q_{n+d}}(g_n) - \mathbb{L}_{Q_n} g_n\|_1 \ll \|V_{Q_{n+d}}(g_n) - \mathbb{L}_{Q_n} g_n\|_{B_{1,1}} \le$$
$$\le \|g_n - \mathbb{L}_{Q_n} g_n\|_{B_{1,1}} + \|g_n - V_{Q_{n+d}}(g_n)\|_{B_{1,1}} \ll$$
$$\ll E_{Q_n}\big(B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}\big)_{B_{1,1}} + 2^{-nr_1} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} \asymp 2^{-nr_1} n^{(d-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Далі, повторюючи міркування, які було використано при доведенні леми 3.3 [30], одержуємо оцінку

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in Q_n} |c_{n,\boldsymbol{k}}| \ge C(\delta)|Q_n| n^{-(d-1)\delta}.$$

Лему 1 доведено.

Для завершення доведення теореми скористаємося рівністю (30), лемами 1 і Б при $\eta = \delta$. В результаті отримаємо

$$\|\mathbb{L}_{Q_n}\| = \|L_{Q_n}\|_1 \gg n^{-\delta} 2^{-n} \sum_{\boldsymbol{k}\in Q_n} |c_{n,\boldsymbol{k}}| \gg$$
$$\gg n^{-\delta} 2^{-n} 2^n n^{d-1} n^{-(d-1)\delta} = n^{(d-1)\left(1-\frac{d\delta}{d-1}\right)}.$$

Поклавши $\varepsilon = \dfrac{d\delta}{d-1}$, прийдемо до шуканої оцінки.

Теорему 9 доведено.

Таким чином, з одержаного результату робимо висновок, що у багатовимірному випадку $(d \ge 2)$ послідовність норм лінійних операторів, які наближають класи $B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}$ у просторі $B_{1,1}$ за порядком найкращих наближень, є необмеженою.

Далі розглянемо одновимірний випадок і переконаємося, що тут ситуація є іншою.

Нехай $T(2^n)$ — множина тригонометричних поліномів вигляду

$$T(2^n) = \Big\{t \colon t(x) = \sum_{k=-2^{n-1}}^{2^{n-1}} c_k e^{ikx}\Big\}$$

і

$$E_n\big(f\big)_{B_{1,1}} = \inf_{t\in T(2^n)} \|f - t\|_{B_{1,1}}$$

— найкраще наближення функції f поліномами із множини $T(2^n)$ у просторі $B_{1,1}$. Для класу $B^{r_1}_{1,\theta}$ покладемо

$$E_n\big(B^{r_1}_{1,\theta}\big)_{B_{1,1}} = \sup_{f\in B^{r_1}_{1,\theta}} E_n\big(f\big)_{B_{1,1}}.$$

Справедливим є таке твердження.

Теорема 10. *Нехай* $d=1,\ 1\le\theta\le\infty,\ r_1>0$. *Тоді*

$$E_n\big(B^{r_1}_{1,\theta}\big)_{B_{1,1}} \asymp 2^{-nr_1}. \qquad (33)$$

Доведення. Оцінка зверху реалізується за наближення поліномами вигляду

$$\widetilde{t}_n(f) = \sum_{s=1}^{n-1} A_s(f)$$

і встановлена при доведенні теореми 3.

Для доведення в (33) оцінки знизу розглянемо функцію

$$f_1(x) = 2^{-nr_1} e^{i2^{n+1}x},$$

яка, як легко бачити, належить класу $B^{r_1}_{1,\theta},\ 1\le\theta\le\infty$.

Нехай

$$t^*_n(x) = \sum_{k=-2^{n-1}}^{2^{n-1}} c^*_k e^{ikx}$$

— поліном найкращого наближення функції f_1 у просторі $B_{1,1}$. Тоді, з одного боку,

$$\Big(\big(f_1(x)-t^*_n(x)\big), e^{i2^{n+1}x}\Big) = \big(f_1(x), e^{i2^{n+1}x}\big) = 2^{-nr_1}, \qquad (34)$$

а з іншого —

$$\Big(\big(f_1(x)-t^*_n(x)\big), e^{i2^{n+1}x}\Big) \le \|f_1-t^*_n\|_1 \|e^{i2^{n+1}x}\|_\infty \ll$$
$$\ll \|f_1-t^*_n\|_{B_{1,1}} = E_n\big(f_1\big)_{B_{1,1}}. \qquad (35)$$

Отже, поєднуючи (34) і (35), приходимо до оцінок

$$E_n\big(B^{r_1}_{1,\theta}\big)_{B_{1,1}} \ge E_n\big(f_1\big)_{B_{1,1}} \gg 2^{-nr_1}.$$

Теорему 10 доведено.

У зв'язку з теоремою 10 зазначимо, що норми операторів $\mathbb{A}_n$, які діють згідно з формулою

$$\mathbb{A}_n f = \widetilde{t}_n(f) = \sum_{s=1}^{n-1} A_s(f),$$

є обмеженими, оскільки

$$\|A_n\| = \left\|\sum_{s=1}^{n-1} A_s\right\|_1 \le \|V_{2^0}\|_1 + \|V_{2^{n-1}}\|_1 \le C_7, \quad C_7>0.$$

Насамкінець зауважимо, що аналогічні властивості операторів найкращого наближення класів $B^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}$ у просторі $B_{\infty,1}$ тригонометричними поліномами з „номерами" гармонік зі східчастих гіперболічних хрестів встановлено у роботі [32].

Література

1. А. С. Романюк, *Энтропийные числа и поперечники классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных*, Укр. мат. журн., **68**, № 10, 1403 – 1417 (2016).
2. М. В. Гембарський, С. Б. Гембарська, *Поперечники класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі $B_{1,1}$*, Укр. мат. вісн., **15**, № 1, 43 – 57 (2018).
3. D. Dung, V. N. Temlyakov, T. Ullrich, *Hyperbolic cross approximation*, Adv. Courses Math., Birkhäuser, CRM Barselona (2019).
4. А. С. Романюк, *Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных*, Праці Ін-ту математики НАН України, **93** (2012).
5. П. И. Лизоркин, С. М. Никольский, *Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения*, Тр. Мат. ин-та АН СССР, **187**, 143 – 161 (1989).
6. Т. И. Аманов, *Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^{(r)}_{p,\theta}B(\mathbb{R}_n)$ и $S^{(r)*}_{p,\theta}B$ $(0 \leq x_j \leq 2\pi;\ j = 1, \ldots, n)$*, Тр. Мат. ин-та АН СССР, **77**, 5 – 34 (1965).
7. В. Н. Темляков, *Приближение функций с ограниченной смешанной производной*, Тр. Мат. ин-та АН СССР, **178**, 1 – 112 (1986).
8. V. N. Temlyakov, *Approximation of periodic function*, Nova Sci. Publ., Inc., New York (1993).
9. А. С. Романюк, В. С. Романюк, *Апроксимаційні характеристики класів періодичних функцій багатьох змінних у просторі $B_{\infty,1}$*, Укр. мат. журн., **71**, № 2, 271 – 282 (2019).
10. А. С. Романюк, В. С. Романюк, *Оцінки деяких апроксимаційних характеристик класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних*, Укр. мат. журн., **71**, № 8, 1102 – 1115 (2019).
11. В. Н. Темляков, *Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных*, Докл. АН СССР, **267**, № 2, 314 – 317 (1982).
12. Динь Зунг, *Приближение функций многих переменных на торе тригонометрическими полиномами*, Мат. сб., **131(173)**, № 2, 251 – 271 (1986).
13. Э. М. Галеев, *Порядки ортопроекционных поперечников классов периодических функций одной и нескольких переменных*, Мат. заметки, **43**, № 2, 197 – 211 (1988).
14. В. Н. Темляков, *Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью*, Тр. Мат. ин-та АН СССР, **189**, 138 – 168 (1989).
15. Э. М. Галеев, *Приближение классов периодических функций нескольких переменных ядерными операторами*, Мат. заметки, **47**, № 3, 32 – 41 (1990).
16. А. В. Андрианов, В. Н. Темляков, *О двух методах распространения свойств систем функций от одной переменной на их тензорное произведение*, Тр. Мат. ин-та РАН, **219**, 32 – 43 (1997).
17. А. С. Романюк, *Оценки аппроксимативных характеристик классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q. I*, Укр. мат. журн., **53**, № 9, 1224 – 1231 (2001).
18. А. С. Романюк, *Оценки аппроксимативных характеристик классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q. II*, Укр. мат. журн., **53**, № 10, 1402 – 1408 (2001).
19. С. А. Стасюк, О. В. Федуник, *Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних*, Укр. мат. журн., **58**, № 5, 692 – 704 (2006).
20. А. С. Романюк, *Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций многих переменных*, Мат. сб., **199**, № 2, 93 – 114 (2008).
21. Н. Н. Пустовойтов, *Ортопоперечники классов многомерных периодических функций, мажоранта смешанных модулей непрерывности которых содержит как степенные, так и логарифмические множители*, Anal. Math., **34**, № 3, 187 – 224 (2008).
22. Г. А. Акишев, *Об ортопоперечниках классов Никольского и Бесова в пространствах Лоренца*, Изв. вузов. Математика, № 2, 25 – 33 (2009).
23. Д. Б. Базарханов, *Оценки поперечников Фурье классов типа Никольского – Бесова и Лизоркина – Трибеля периодических функций многих переменных*, Мат. заметки, **87**, № 2, 305 – 308 (2010).
24. А. С. Романюк, *Поперечники и наилучшее приближение классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных*, Anal. Math., **37**, 181 – 213 (2011).
25. Д. Б. Базарханов, *Приближение всплесками и поперечники Фурье классов периодических функций многих переменных. II*, Anal. Math., **38**, № 4, 249 – 289 (2012).

26. K. A. Bekmaganbetov, Je. Toleugazy, *Order of the orthoprojection widths of the anisotropic Nikol'skii – Besov classes in the anisotropic Lorentz space*, Eurasian Math. J., **7**, № 3, 8 – 16 (2016).
27. Ш. А. Балгимбаева, Т. И. Смирнов, *Оценки поперечников Фурье классов периодических функций с заданной мажорантой смешанного модуля гладкости*, Сиб. мат. журн., **59**, № 2, 277 – 292 (2018).
28. O. V. Fedunyk-Yaremchuk, S. B. Hembars'ka, *Estimates of approximative characteristics of the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic functions of several variables with given majorant of mixed moduli of continuity in the space L_q*, Carpathian Math. Publ., **11**, № 2, 281 – 295 (2019).
29. A. Kolmogoroff, *Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse*, Ann. Math., **37**, 107 – 110 (1936).
30. А. С. Романюк, *Приближение классов $B^{r}_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных линейными методами и наилучшие приближения*, Мат. сб., **195**, № 2, 91 – 116 (2004).
31. J. Marcinkiewicz, *Quelgues remargues sur l'interpolation*, Acta Math. (Szeged), **8**, № 2 – 3, 127 – 130 (1937).
32. А. С. Романюк, В. С. Романюк, *Апроксимаційні характеристики і властивості операторів найкращого наближення класів функцій з просторів Соболєва та Нікольського – Бєсова*, Укр. мат. вісн, **17**, № 3, 372 – 395 (2020).

Одержано 25.05.21