DOI: 10.37863/umzh.v73i10.6756

УДК 531.36; 531.011

С. П. Сосницький (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ОДИН ОКРЕМИЙ ВИПАДОК РУХУ В ЗАДАЧІ ТРЬОХ ТІЛ

We study the three-body problem in a particular case where two bodies have equal masses, which implies the existence of a manifold of symmetric motions. We are looking for the conditions of existence of bounded (unbounded) symmetric motions. Our analysis of boundedness (unboundedness) of motions shows that both the structure of the manifold of symmetrical motions and the integrals of energy and angular momentum are essential.

Досліджується окремий випадок задачі трьох тіл, коли два з них мають однакові маси, що обумовлює існування многовиду симетричних рухів. Розглянуто умови існування обмежених (необмежених) симетричних рухів. Для аналізу обмеженості (необмеженості) руху як структура многовиду симетричних рухів, так і інтеграли енергії та моменту кількостей руху є істотними.

1. Вступ. Нині, в еру освоєння космічного простору, коли запуск штучних космічних об'єктів із різним цільовим призначенням став буденним явищем, практичного значення набуває задача трьох тіл, яка з чисто академічної перетворилась в прикладну. І хоча в практичних дослідженнях дуже часто використовують комп'ютерне моделювання і числові методи, проте, коли йдеться про необмежені інтервали часу, аналітичні методи, зокрема якісне дослідження руху, відіграють ключову роль. Якраз у цьому сенсі нижче буде розглянуто один із досить відомих окремих випадків задачі трьох тіл, пов'язаний із симетричними рухами тіл [1 – 5].

При дослідженні стійкості руху за Лагранжем у задачі трьох тіл як у випадку обмеженої задачі трьох тіл, так і у загальному її випадку, вдалося запропонувати підхід [6], який дозволив еліптичну обмежену і загальну задачі трьох тіл розглянути з єдиної точки зору і виокремити спільні для них ключові умови, що забезпечують стійкість за Лагранжем. Цими умовами є наявність стійкої за Хіллом пари матеріальних точок і дистальність (обмеженість знизу взаємних відстаней матеріальних точок) руху. Однак у рамках запропонованого підходу залишився поза розглядом випадок, коли маси, що утворюють стійку за Хіллом пару, рівні й у процесі руху відстані третього тіла до кожного з тіл пари також рівні. Хоча в цьому випадку вищезгадані ключові умови виконуються, проте довести стійкість за Лагранжем не вдалось. Як переконаємося нижче, цей факт не є випадковим і пов'язаний саме з особливостями симетричних рухів, до аналізу яких переходимо.

Почнемо з розгляду базових рівнянь задачі трьох тіл, які запишемо у вигдяді [7]

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\rho}_1'' &= \mu_2 \frac{\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|^3} + \mu_3 \frac{\boldsymbol{\rho}_3 - \boldsymbol{\rho}_1}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3}, \\
\boldsymbol{\rho}_2'' &= -\mu_1 \frac{\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|^3} + \mu_3 \frac{\boldsymbol{\rho}_3 - \boldsymbol{\rho}_2}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|^3}, \qquad (1.1)\\
\boldsymbol{\rho}_3'' &= -\mu_1 \frac{\boldsymbol{\rho}_3 - \boldsymbol{\rho}_1}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3} - \mu_2 \frac{\boldsymbol{\rho}_3 - \boldsymbol{\rho}_2}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|^3},
\end{aligned}$$

де штрих означає диференціювання по τ ($\tau = t\sqrt{GM}/r_0^{3/2}$), $\mu_i = m_i/M,\ M = m_1 + m_2 + m_3$, r_0 — параметр, що має розмірність одиниці довжини. В рівняннях (1.1) $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{r}_i/r_0,\ i = 1, 2, 3,$ де

$\mathbf{r}_i$ — радіуси-вектори точок в інерційній системі відліку з початком у центрі мас m_i. Параметр r_0 введено для того, щоб у подальшому оперувати безрозмірними величинами, що дуже зручно для викладу матеріалу.

Далі істотно використовуватимемо властивість консервативності системи (1.1) [8, 9], тобто наявність інтеграла енергії

$$\frac{1}{2}\sum_{i}^{3}\mu_i\boldsymbol{\rho}_i'^2 - \sum_{i<j}\frac{\mu_i\mu_j}{|\boldsymbol{\rho}_{ij}|} = h = \text{const},$$

а також векторного інтеграла моменту кількостей руху

$$\sum_{i}^{3}\mu_i\left(\boldsymbol{\rho}_i \times \boldsymbol{\rho}_i'\right) = \mathbf{C}.$$

Припускатимемо, що $\mathbf{C} \neq \mathbf{0}$.

Далі без обмеження загальності міркувань вважатимемо справедливою рівність

$$\sum_{i}^{3}\mu_i\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}, \tag{1.2}$$

що відповідає вибору початку системи відліку у центрі мас матеріальних точок (тіл), що розглядаються.

За умови, що дві маси рівні, а також $|\boldsymbol{\rho}_{13}| = |\boldsymbol{\rho}_{23}|$, на підставі (1.1) з урахуванням рівності (1.2) приходимо до многовиду симетричних рухів у вигляді [10]

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\rho}_{12}'' = -2\mu\,\frac{\boldsymbol{\rho}_{12}}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|^3} - \mu_3\,\frac{\boldsymbol{\rho}_{12}}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3},\\ \boldsymbol{\rho}_3'' = -\frac{\boldsymbol{\rho}_3}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3},\end{gathered} \tag{1.3}$$

де відстані $|\boldsymbol{\rho}_{12}|$, $|\boldsymbol{\rho}_{13}|$ і $|\boldsymbol{\rho}_3|$ зв'язані рівністю

$$\boldsymbol{\rho}_3^2 = \mu^2\left(-\boldsymbol{\rho}_{12}^2 + 4\boldsymbol{\rho}_{13}^2\right). \tag{1.4}$$

Аналогічна рівність має місце і для узагальнених швидкостей:

$$v_3^2 = \mu^2\left(-v_{12}^2 + 4v_{13}^2\right), \tag{1.5}$$

де $v_{12}^2 = \boldsymbol{\rho}_{12}'^2$, $v_{13}^2 = \boldsymbol{\rho}_{13}'^2$, $v_3^2 = \boldsymbol{\rho}_3'^2$.

Симетричність рухів, які досліджуються в рамках системи (1.3), проявляється в тому, що геометрія руху однієї з матеріальних точок пари (μ,μ) збігається з геометрією руху іншої матеріальної точки, що в свою чергу зумовлює можливість звести якісне дослідження системи (1.3) до системи з меншою кількістю ступенів вільності. Саме система (1.3) виявилася поза межами можливостей запропонованого в [6] підходу.

2. Про характерні властивості симетричних рухів. Наведемо основні означення, якими будемо користуватися нижче.

Означення 1. *Рух* $\boldsymbol{\rho}(\tau) = (\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_3)^T$ *системи* (1.1) *назвемо стійким за Лагранжем, якщо виконується умова*

$$c_1 \leq |\boldsymbol{\rho}_{ij}(\tau)| \leq c_2 \quad \forall \tau \in R =]-\infty, \infty[\quad \forall i < j,$$

де c_1, c_2 *— додатні сталі.*

Означення 2. *Рух* $\boldsymbol{\rho}(\tau) = (\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_3)^T$ *системи* (1.1) *назвемо дистальним, якщо виконується нерівність*

$$|\boldsymbol{\rho}_{ij}(\tau)| \geq c_3 \quad \forall \tau \in R \quad \forall i < j, \quad 0 < c_3 = \text{const}. \tag{2.1}$$

Означення 3. *Фіксовану пару точок* (μ_i, μ_j), $i < j$, *системи* (1.1) *згідно з* [11] *назвемо стійкою за Хіллом, якщо виконується нерівність*

$$|\boldsymbol{\rho}_{ij}(\tau)| < c_4 \quad \forall \tau \in R, \quad 0 < c_4 = \text{const}.$$

Характерними ознаками многовиду симетричних рухів (1.3) є стійкість за Хіллом пари матеріальних точок (μ, μ) за умови, що $h < 0$, а також дистальність руху за умови, що модуль моменту кількостей руху пари (μ, μ) відмінний від нуля. Крім того, якщо рух на многовиді (1.3) є обмеженим, то ця обмеженість стосується як координат ρ_{12}, ρ_3, так і швидкостей v_{12}, v_3, тобто має місце стійкість за Лагранжем.

Оскільки для многовиду симетричних рухів (1.3) справедливі рівності

$$\boldsymbol{\rho}_{12} \times \boldsymbol{\rho}'_{12} = \mathbf{C_1}, \quad \boldsymbol{\rho}_3 \times \boldsymbol{\rho}'_3 = \mathbf{C_2}, \tag{2.2}$$

де $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$ — сталі вектори, то враховуючи, що

$$v_{12}^2 = \boldsymbol{\rho}_{12}'^2 = \rho_{12}'^2 + \frac{|\boldsymbol{\rho}_{12} \times \boldsymbol{\rho}'_{12}|^2}{\rho_{12}^2}, \tag{2.3}$$

$$v_3^2 = \boldsymbol{\rho}_3'^2 = \rho_3'^2 + \frac{|\boldsymbol{\rho}_3 \times \boldsymbol{\rho}'_3|^2}{\rho_3^2}, \tag{2.4}$$

якісне дослідження системи (1.3) можна звести до системи з двома ступенями вільності:

$$\begin{gathered} {\rho_{12}^2}'' = 2v_{12}^2 - \frac{4\mu}{\rho_{12}} - 2\mu_3 \frac{\rho_{12}^2}{\rho_{13}^3}, \\ {\rho_3^2}'' = 2v_3^2 - 2\, \frac{\rho_3^2}{\rho_{13}^3}, \end{gathered} \tag{2.5}$$

де $\rho_{12} = |\boldsymbol{\rho}_{12}|$, $\rho_{13} = |\boldsymbol{\rho}_{13}|$, $v_{12}^2 = \boldsymbol{\rho}_{12}'^2$, $v_3^2 = \boldsymbol{\rho}_3'^2$.

Далі, беручи до уваги структуру многовиду симетричних рухів, а також рівність (1.5), інтеграл енергії використовуватимемо в одній із форм

$$\left(\mu^2 v_{12}^2 + 2\mu\mu_3 v_{13}^2\right) - \frac{2\mu^2}{\rho_{12}} - \frac{4\mu\mu_3}{\rho_{13}} = 2h, \tag{2.6}$$

$$\frac{1}{2\mu}\left(\mu^2 v_{12}^2 + \mu_3 v_3^2\right) - \frac{2\mu^2}{\rho_{12}} - \frac{4\mu\mu_3}{\rho_{13}} = 2h, \tag{2.7}$$

$$\left(-v_3^2 + 2\mu v_{13}^2\right) - \frac{2\mu^2}{\rho_{12}} - \frac{4\mu\mu_3}{\rho_{13}} = 2h. \tag{2.8}$$

Якщо $\mathbf{C}_2 = \mathbf{0}$, то система (2.7) допускає рух, при якому тіло з масою μ_3 здійснює коливання вздовж осі, що проходить через центр мас системи і є перпендикулярною до площини, в якій рухаються інші два тіла з рівними масами. Саме цей випадок розглядав К. А. Ситніков [1], з яким пов'язують доведення існування осцилюючих фінальних еволюцій у випадку обмеженої задачі трьох тіл ($\mu_3 = 0$). Згодом твердження Ситнікова, враховуючи, що саму можливість існування таких рухів допускав Шазі [2], послужило поштовхом для подальших досліджень в цьому напрямку у загальному випадку задачі трьох тіл [3 – 5]. Зазначимо, що сам Шазі в поняття „осцилюючі фінальні еволюції" вкладав дещо ширший зміст, зокрема брав до уваги і той теоретично можливий випадок, коли не можна виокремити стійку за Хіллом пару, тобто коли при необмеженому русі системи найменшими почергово можуть ставати різні взаємні відстані. Рухи, розглянуті Ситніковим і його послідовниками, є звичайними коливними рухами (з необмеженою амплітудою) тіла з масою μ_3 вздовж прямої. При цьому залишається відкритим практичне питання про те, як вибрати початкові умови в явному вигляді, щоб отримати цей коливний рух, оскільки в існуючих дослідженнях йдеться лише про його існування.

Як випливає з роботи [6], якщо необмежений дистальний рух у задачі трьох тіл існує, то він пов'язаний з віддаленням третього тіла у нескінченність по прямолінійній параболі чи гіперболі, що належать системі (1.3). Як показують дослідження [3 – 5], необмежений рух третього тіла може бути ще й коливним. Саме внаслідок існування необмежених рухів на многовиді симетричних рухів (1.3) останній і залишився поза дослідженням [6]. Однак існування необмежених рухів на многовиді (1.3) — ще не привід залишити поза увагою питання про отримання в явному вигляді умов обмеженості (необмеженості) руху на ньому. До цього і переходимо.

Перш ніж розпочати наш аналіз, зазначимо, що далі поряд з (2.5) використовуватимемо многовид симетричних рухів ще й у такій формі [12]:

$$\begin{gathered}
{\rho_{12}^2}'' = 2E_{12} + (1+\mu_3)\frac{2}{\rho_{12}} - 2\mu_3\frac{\rho_{12}^2}{\rho_{13}^3},\\
{\rho_{13}^2}'' = 2E_{13} + \frac{2}{\rho_{13}} + \mu\left(-\frac{1}{\rho_{12}} + \frac{\rho_{12}^2}{\rho_{13}^3}\right),\\
E_{12}' = \mu_3 {\rho_{12}^2}'\left(\frac{1}{\rho_{12}^3} - \frac{1}{\rho_{13}^3}\right),\\
E_{13}' = -\frac{\mu}{2}{\rho_{12}^2}'\left(\frac{1}{\rho_{12}^3} - \frac{1}{\rho_{13}^3}\right),
\end{gathered} \tag{2.9}$$

де

$$E_{12} = v_{12}^2 - \frac{2}{\rho_{12}}, \quad E_{13} = v_{13}^2 - \frac{2}{\rho_{13}}.$$

Враховуючи рівності (1.4), (1.5), а також рівності (2.2) – (2.4), бачимо, що це також система з двома ступенями вільності. Зокрема, перші два її рівняння утворюють замкнену систему, наслідком якої є останні два рівняння.

Інтеграл енергії для системи (2.9) можна записати в одній із форм

$$\mu^2 E_{12} + 2\mu\mu_3 E_{13} = 2h,$$

$$\frac{\mu}{2}E_{12} + \frac{\mu_3}{2\mu}E_3 + \frac{\mu\mu_3}{\rho_{12}} = 2h,$$

$$2\mu E_{13} - E_3 - 2\,\frac{\mu^2}{\rho_{12}} = 2h,$$

де

$$E_3 = v_3^2 - 8\,\frac{\mu^2}{\rho_{13}}.$$

Далі обмежимося такими симетричними рухами системи (2.9) (або (2.5)), які належать множині

$$\Omega = \left\{(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') : T - U = h < 0\right\}.$$

У цьому випадку, як показано у роботі [10], за умови $|\mathbf{C_1}| \neq 0$, виконанню якої будемо далі слідувати, рухи, що розглядаються, є дистальними, а пара матеріальних точок (μ, μ) стійка за Хіллом.

3. Про обмежені й необмежені симетричні рухи. Для подальшого викладу знадобляться деякі відомості щодо задачі двох тіл [13], яку будемо розглядати, коли маси тіл рівні. В її рамках замість позначення ρ_{12} використовуватимемо r, замість $\boldsymbol{\rho}_{12}$ — $\mathbf{r}$. Рівняння для r запишемо у вигляді

$$r^{2''} = 2v^2 - \frac{2}{r},$$

де

$$v^2 = \mathbf{r}'^2 = r'^2 + \frac{|\mathbf{r} \times \mathbf{r}'|^2}{r^2} = r'^2 + \frac{c^{*2}}{r^2}, \quad c^* = \mathrm{const}.$$

Інтеграл енергії представимо у формі

$$\frac{1}{4}\left(\mathbf{r}'^2 - \frac{2}{r}\right) = 2\widetilde{h} = \mathrm{const}.$$

Крім того, зауважимо, що справджуються рівності

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{c^{*2}}\,(1 + e\cos f), \tag{3.1}$$

$$r'^2 = \frac{e^2}{c^{*2}}\,\sin^2 f, \tag{3.2}$$

$$v^2 = \frac{1}{c^{*2}}\,\left[1 + e^2 + 2e\cos f\right], \tag{3.3}$$

де стала

$$e = \sqrt{\frac{\mu^2 + 2c^{*2}\widetilde{h}}{\mu^2}}$$

є ексцентриситетом еліптичної орбіти, f — істинна аномалія.

Теорема 1. *Нехай* $\boldsymbol{\rho}(\tau) = (\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_3)^T$ — *симетричний рух системи* (2.5), *який належить множині* Ω. *Тоді якщо*

$$\mu^3 + c^2 h \leq 0, \tag{3.4}$$

де

$$c^2 = \left|\boldsymbol{\rho}_{12} \times \boldsymbol{\rho}'_{12}\right|^2, \quad 0 < c = \mathrm{const},$$

то симетричний рух, що розглядається, є обмеженим.

Доведення. Записуючи інтеграл енергії (2.7) у вигляді

$$\mu^2 \left[\frac{1}{2\mu}\left(\rho'^2_{12} + \frac{|\boldsymbol{\rho}_{12} \times \boldsymbol{\rho}'_{12}|^2}{\rho^2_{12}}\right) - \frac{2}{\rho_{12}}\right] + \frac{\mu_3}{2\mu}\, v_3^2 - 4\,\frac{\mu\mu_3}{\rho_{13}} = 2h,$$

розглядатимемо його далі як квадратне рівняння відносно величини $1/\rho_{12}$. В результаті отримуємо

$$\frac{c^2\mu}{2}\left(\frac{1}{\rho_{12}}\right)^2 - 2\mu^2\,\frac{1}{\rho_{12}} + \left(\frac{\mu\rho'^2_{12}}{2} + \frac{\mu_3}{2\mu}\,v_3^2 - 4\frac{\mu\mu_3}{\rho_{13}} - 2h\right) = 0. \tag{3.5}$$

На підставі (3.5) маємо

$$\frac{1}{\rho_{12}} = \frac{2\mu}{c^2} \pm \frac{2}{c^2\sqrt{\mu}}\sqrt{\mu^3 + c^2 h - \frac{c^2}{2}\left(\frac{\mu\rho'^2_{12}}{2} + \frac{\mu_3}{2\mu}\,v_3^2 - 4\,\frac{\mu\mu_3}{\rho_{13}}\right)}.$$

Далі отриману рівність запишемо у вигляді

$$\frac{1}{\rho_{12}} - \frac{2\mu}{c^2} = \pm\frac{2}{c^2\sqrt{\mu}}\sqrt{\mu^3 + c^2 h - \frac{c^2}{2}\left(\frac{\mu\rho'^2_{12}}{2} + \frac{\mu_3}{2\mu}\,v_3^2 - 4\,\frac{\mu\mu_3}{\rho_{13}}\right)}. \tag{3.6}$$

За умов теореми 1 ліва частина рівності (3.6) завжди є дійсним числом.

Припустимо тепер, що при виконанні умов теореми 1 симетричний рух $\boldsymbol{\rho}(\tau) = (\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_3)^T$, що досліджується, не є обмеженим. Тоді існує така послідовність $\{\tau_k\},\ k = 1, 2, 3, \ldots,$ що

$$\lim_{k\to\infty} \tau_k = \infty, \quad \lim_{k\to\infty} \rho_{13}(\tau_k) = \infty, \quad \rho_{13}(\tau_k) = |\boldsymbol{\rho}_{13}(\tau_k)|. \tag{3.7}$$

Розглянемо спочатку випадок умови (3.4), коли виконується строга нерівність

$$\mu^3 + c^2 h < 0. \tag{3.8}$$

Тоді відповідно до (3.7) існує таке достатньо велике число k, що величина $1/\rho_{13}(\tau_k)$ стає як завгодно малим числом, і, як наслідок, права частина рівності (3.6) стає уявною. Отримали суперечність.

Нехай тепер

$$\mu^3 + c^2 h = 0.$$

Якщо припустити тепер необмеженість руху в умовах цієї рівності, то виконується (3.7) і, як наслідок, $\rho_{12}(\tau_k)$, згідно з рівняннями (2.5), при $k \to \infty$ наближається до еліптичного кеплерівського руху. Тепер, беручи до уваги (3.2), бачимо, що член $\rho_{12}'^2$ під знаком радикала в (3.6), який пов'язаний із парою (μ, μ), можна записати у формі

$$\rho_{12}'^2 = \frac{\widetilde{e}^2}{c^2} \sin^2 \widetilde{f},$$

де $\widetilde{e}$, c і $\widetilde{f} = \widetilde{f}(\tau)$ за своїм змістом означають те ж саме, що і величини e, c^* і f у рівності (3.2).

Оскільки на елементах послідовності $\{\tau_k\}$

$$\frac{1}{\rho_{13}(\tau_k)} \to 0, \tag{3.9}$$

якщо $k \to \infty$, то граничний вираз для суми членів під знаком радикала в (3.6) є таким:

$$\left\{-\frac{c^2}{2}\left(\frac{\mu\rho_{12}'^2}{2} + \frac{\mu_3}{2\mu}\,v_3^2 - 4\,\frac{\mu\mu_3}{\rho_{13}}\right)\right\}_\infty = -c^2\,\frac{\mu}{4}\left\{\frac{\widetilde{e}^2}{c^2}\sin^2 \widetilde{f} + \frac{\mu_3}{\mu^2}v_3^2\right\}. \tag{3.10}$$

Розглянемо більш докладно рівність (3.10). Функція $\sin^2 \widetilde{f}$, яка входить в її праву частину, дорівнює одиниці при $\widetilde{f} = (2i+1)\pi/2$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Отже, права частина рівності (3.10) стає від'ємною, якщо $\sin^2 \widetilde{f} = 1$.

Згідно з умовами теореми 1, пара матеріальних точок (μ, μ) є стійкою за Хіллом, а розглядуваний рух — дистальним, що обумовлює обмеженість швидкостей матеріальних точок системи (2.5). Період еліптичного кеплерівського руху, до якого наближається $\rho_{12}(\tau_k)$ при $k \to \infty$, також є обмеженим. В його межах $\sin^2 \widetilde{f}$, як неперервна функція, набуває всіх своїх значень. Таким чином, беручи до уваги (3.9) і (3.10), можемо стверджувати, що існує таке значення $\tau^*(k)$, при якому вираз

$$\left[-\frac{c^2}{2}\left(\frac{\mu\rho_{12}'^2}{2} + \frac{\mu_3}{2\mu}v_3^2 - 4\,\frac{\mu\mu_3}{\rho_{13}}\right)\right]\Bigg|_{\tau=\tau^*(k)}$$

стає від'ємним і, як наслідок, права частина рівності (3.6) стає уявним числом. З іншого боку, як зазначено вище, в умовах теореми 1 ліва частина рівності (3.6) завжди є дійсною. Приходимо до суперечності, отже, справджується теорема 1.

Прикладом рухів, що задовольняють теорему 1, є стаціонарні рухи, розглянуті в роботі [12]. Цікавим є те, що якщо нерівність (3.4) є достатньою умовою обмеженості симетричних рухів, то строга нерівність (3.8) є необхідною і достатньою умовою існування стаціонарних симетричних рухів. Таким чином, на многовиді симетричних рухів крім коливного руху тіла з масою μ_3 існує його обертальний рух, який відповідає круговій задачі двох тіл. Зрозуміло, що при цьому $\mathbf{C}_2 \neq \mathbf{0}$.

Теорема 2. *Нехай $\boldsymbol{\rho}(\tau) = (\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_3)^T$ — симетричний рух системи* (2.5), *який належить множині Ω. Тоді якщо $\mu_3 \ll \mu$ і виконуються умови:*

1) $E_{12}^0 < 0$,
2) $E_{12}^0 + E_{13}^0 - E_3^0/2\mu = O(\mu_3)$,
3) $\inf \dfrac{1}{\rho_{12}} - \dfrac{1}{\rho_{12}^0} = O(\mu_3)$,

де

$$E_{12}^0 = E_{12}\,|_{\tau=0}, \quad E_{13}^0 = E_{13}\,|_{\tau=0}, \quad E_3^0 = E_3\,|_{\tau=0}, \quad \rho_{12}^0 = \rho_{12}\,|_{\tau=0},$$

то симетричний рух, що розглядається, є необмеженим і неколивним.

Доведення. Запишемо рівності (2.7), (2.8) відповідно у вигляді

$$E_{12}\Big|_0^\tau = -\frac{2\mu_3}{\rho_{12}}\Big|_0^\tau - \frac{\mu_3}{\mu^2}E_3\Big|_0^\tau, \quad E_{13}\Big|_0^\tau = \frac{\mu}{\rho_{12}}\Big|_0^\tau + \frac{1}{2\mu}E_3\Big|_0^\tau.$$

Тоді з їх урахуванням перші два рівняння системи (2.9) наберуть вигляду

$$\begin{aligned} {\rho_{12}^2}'' &= 2E_{12}^0 - 2\,\frac{\mu_3}{\mu^2}\,E_3 + 2\mu_3\left(\frac{2}{\rho_{12}} + \frac{1}{\mu^2}E_3\right)\Bigg|_0 + \frac{4\mu}{\rho_{12}} - 2\mu_3\,\frac{\rho_{12}^2}{\rho_{13}^3}, \\ {\rho_{13}^2}'' &= 2E_{13}^0 - \frac{1}{\mu}\,E_3^0 + \frac{1}{\mu}\,E_3 - 2\frac{\mu}{\rho_{12}}\Big|_0 + \frac{2}{\rho_{13}} + \mu\left(\frac{1}{\rho_{12}} + \frac{\rho_{12}^2}{\rho_{13}^3}\right). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Віднімемо тепер від другого рівняння системи (3.11) помножене на $1/2\mu$ друге рівняння системи (2.5). В результаті отримаємо

$${\rho_{13}^2}'' - \frac{1}{2\mu}{\rho_3^2}'' = \frac{\mu_3}{4\mu^2}{\rho_3^2}'' + \frac{1}{4}\,{\rho_{12}^2}'' = 2E_{13}^0 - \frac{1}{\mu}\,E_3^0 - 2\,\frac{\mu}{\rho_{12}}\Big|_0 + \frac{2\mu_3}{\rho_{13}} + \mu\left(\frac{1}{\rho_{12}}\right). \tag{3.12}$$

Додаючи до (3.12) перше рівняння системи (3.11), приходимо до рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\mu_3}{4\mu^2}\,{\rho_3^2}'' + \frac{5}{4}{\rho_{12}^2}'' &= 2E_{12}^0 + 2E_{13}^0 - \frac{1}{\mu}\,E_3^0 - 2\,\frac{\mu}{\rho_{12}}\Big|_0 + \frac{5\mu}{\rho_{12}} + \\ &+ \frac{2\mu_3}{\rho_{13}} - 2\,\frac{\mu_3}{\mu^2}\,E_3 - 2\mu_3\,\frac{\rho_{12}^2}{\rho_{13}^3} + 2\mu_3\left(\frac{2}{\rho_{12}} + \frac{1}{\mu^2}\,E_3\right)\Bigg|_0, \end{aligned}$$

яке, беручи до уваги умови теореми 2, записуємо у вигляді

$$\frac{\mu_3}{4\mu^2}\,{\rho_3^2}'' + \frac{5}{4}\,{\rho_{12}^2}'' = 2\left(\frac{\mu}{\rho_{12}} - \frac{\mu}{\rho_{12}}\Big|_0\right) + \frac{3\mu}{\rho_{12}} + O(\mu_3). \tag{3.13}$$

Оскільки пара (μ, μ) стійка за Хіллом і $\mu_3 \ll \mu$, що робить її рух близьким до задачі двох тіл, то відповідно до (3.13) отримуємо оцінку

$$\frac{\mu_3}{4\mu^2}{\rho_3^2}'' + \frac{5}{4}\,{\rho_{12}^2}'' > \delta, \quad 0 < \delta = \mathrm{const}.$$

Звідси робимо висновок про справедливість теореми 2.

4. Про фінальні еволюції дистальних рухів. Як випливає з дослідження [6], якщо необмежені дистальні рухи в задачі трьох тіл, для яких стала інтеграла енергії h є від'ємною, існують, то вони належать многовиду симетричних рухів (1.3). Згідно з класифікацією Шазі [2], фінальним еволюціям дистальних рухів у задачі трьох тіл, які належать множині Ω, відповідають такі рухи:

1) обмежений,
2) гіперболо-еліптичний,
3) параболо-еліптичний,
4) осцилюючий,

і, таким чином, все розмаїття необмежених дистальних рухів, кожному з яких відповідає фіксована стійка за Хіллом пара, припадає саме на многовид симетричних рухів, розмірність якого мала в порівнянні з розмірністю початкової системи. Справді, розмірність системи (2.5), якій можуть належати необмежені рухи, дорівнює 4, а розмірність початкової системи у бароцентричних координатах — 12. Отже, обмежених дистальних рухів у порівнянні з необмеженими є значно більше. Цей факт, звичайно, є позитивним з практичної точки зору.

У зв'язку з важливістю дистальності руху, як фактора його обмеженості за умови, що тіла, які утворюють стійку за Хіллом пару, мають різні маси, постає питання вибору початкових умов і параметрів системи, які б забезпечували цю властивість руху, наслідком якої є відсутність парних зіткнень. На жаль, це питання залишається відкритим. У цьому випадку, згідно з Веєрштрассом [14], можемо лише стверджувати, що типовій ситуації відповідають рухи без зіткнень. Однак умова дистальності руху більш жорстка, ніж умова відсутності парних зіткнень, і в цьому сенсі питання лебегової міри дистальних рухів у 12-вимірному просторі початкової системи потребує додаткових досліджень. Крім того, варто зауважити, що реальні небесні тіла не є матеріальними точками і вимога дистальності може набувати не менш жорсткого практичного змісту. Наприклад, якщо ми розглядаємо систему Земля-Місяць-космічний апарат, то вибір сталої c_3 у правій частині нерівності (2.1) повинен бути узгодженим із радіусами Землі і/або Місяця.

5. Висновки. Ми вказали достатні умови обмеженості (необмеженості) симетричних рухів, які є конструктивними. Отримані теореми охоплюють як ті симетричні рухи, для яких момент кількостей руху тіла з масою μ_3 є нуль-вектором, тобто тіло рухається вздовж осі, що проходить через центр мас системи і є перпендикулярною до площини, в якій рухаються інші два тіла з рівними масами, так і ті, які включають обертальний рух третього тіла. При цьому, якщо взяти до уваги, що необмежені симетричні рухи пов'язані з рухом третього тіла вздовж фіксованої прямої, то умовою $\mathbf{C}_2 \neq \mathbf{0}$ ми „знімаємо" третє тіло з фіксованої прямої і автоматично забезпечуємо обмеженість симетричних рухів. Таким чином, якщо йдеться про обмеженість симетричних рухів, то поряд з моментом кількостей руху пари (μ, μ) також безсумнівною є вагома роль моменту кількостей руху третього тіла.

Якщо в існуючих дослідженнях, присвячених осцилюючим рухам, швидше мова йде про можливість їхнього існування, то для рухів, що розглядаються у даній роботі, ми вказуємо в явному вигляді умови для їхньої реалізації. На жаль, вибір початкових умов у явному вигляді, які б забезпечували існування осцилюючого руху, залишається поза межами запропонованого підходу. Разом з тим доведені теореми можуть становити певний інтерес для з'ясування тих ключових моментів, які якраз і обумовлюють реалізацію осцилюючих фінальних еволюцій.

Література

1. К. А. Ситников, *Существование осциллирующих движений в задаче трех тел*, Докл. АН СССР, **133**, 303 – 306 (1960).
2. J. Chazy, *Sur l'allure finale mouvement dans le problème des trois corps quand le temps croit indéfiniment*, Ann. Sci. Ecole Norm. Supér. (3), **39**, 29 – 130 (1922).
3. В. М. Алексеев, *Лекции по небесной механике*, РХД, Ижевск (2001).
4. J. Moser, *Stable and random motion in dynamical system*, Princeton Univ. Press, Princeton (1973).
5. К. Маршал, *Задача трех тел*, Ин-т компьют. исслед., Москва, Ижевск (2004).
6. S. P. Sosnitskii, *On the Lagrange stability of motion in the spatial elliptic restricted three-body problem*, Astronom. J., **160**, Article 281 (2020), 6 p.

7. S. P. Sosnitskii, *On the orbital stability of triangular Lagrangian motions in the three-body problem*, Astronom. J., **136**, № 6, 2533 – 2540 (2008).
8. Л. А. Парс, *Аналитическая динамика*, Наука, Москва (1971).
9. В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт, *Математические аспекты классической и небесной механики*, УРСС, Москва (2002).
10. S. P. Sosnitskii, *On the bounded symmetrical motions in the three-body problem*, Int. J. Non-Linear Mech., **67**, 34 – 38 (2014).
11. В. Г. Голубев, Е. А. Гребенников, *Проблема трех тел в небесной механике*, Изд-во Моск. гос. ун-та (1985).
12. С. П. Сосницький, *Про деякі особливості симетричних рухів у задачі трьох тіл*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **10**, № 3, 178 – 190 (2013).
13. А. Е. Рой, *Движение по орбитам*, Наука, Москва (1981).
14. G. Mittag-Leffler, *Zur biographie von Weierstrass*, Acta Math., **35**, 29 – 65 (1912).

Одержано 25.05.21