

**Я. М. Пастернак** (Луцьк. нац. техн. ун-т),

**Г. Т. Сулим** (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

## ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ПРУЖНОГО СЕРЕДОВИЩА ІЗ ДЕФОРМІВНИМ НИТКОВИМ ВКЛЮЧЕННЯМ\*

In this study, we propose a method of mathematical modeling of deformable thread-like (wire) inclusions based on replacing their influence on the elastic medium with the tension/compression forces distributed along their axis. We derive a regularized integral equation of the problem, which is external with respect to the inhomogeneity, and also a mathematical model of inhomogeneity, which, taking into account the contact conditions, allows to determine the desired distribution of forces along the axis of inhomogeneity. An approach to solving these equations is proposed. For the case of a rectilinear elastic thread-like inclusion, an approximate solution of the problem is obtained in a close analytical form.

Запропоновано спосіб математичного моделювання деформівних ниткових включень на підставі заміни їхнього впливу на пружне середовище розподіленими вздовж їхньої осі зусиллями розтягу-стиску. Побудовано регуляризоване інтегральне рівняння зовнішньої щодо неоднорідності задачі, а також математичні моделі неоднорідності, що з урахуванням умов контакту дають можливість визначити шуканий розподіл зусиль уздовж осі неоднорідності. Запропоновано підхід до їхнього розв'язання. Отримано у замкнутому аналітичному вигляді наближений розв'язок задачі для прямолінійного пружного ниткового включення скінченної довжини.

**Вступ.** На даний час у конструкціях машино- та авіакосмічного будування все частіше застосовують новітні композиційні матеріали, що дають можливість полегшити конструкцію, надати їй нових чи кращих функціональних властивостей, забезпечивши при цьому необхідні міцність, надійність, технологічність виготовлення елементів складної геометричної форми тощо. У свою чергу це породжує підвищений попит на побудову досконаліших математичних моделей композитних структур, а також опрацювання математичних засобів розрахунку їхніх ефективних фізико-механічних характеристик і забезпечення адекватного аналізу напружено-деформованого стану конструкцій, виготовлених із таких матеріалів. І хоча у композиційному матеріалі переважно необхідно врахувати дуже складну взаємодію великої кількості армувальних елементів, основну інформацію, що дає можливість сформулювати попередні висновки та вибрати напрямки поглибленого вивчення проблеми, можна отримати вже на стадії розв'язання задач для поодиноких включень [7].

Варто зауважити, що найкраще вивчено на даний час лише вплив глобулярних неоднорідностей, особливо геометрично канонічної форми. Щодо аналізу впливу потенційно небезпечних для цілісності конструкції тонких неоднорідностей, до яких можна віднести також щілини і тріщини, що є предметом спеціального вивчення сучасної механіки руйнування, то в останні роки знайшли розвиток спеціальні підходи [2], які дають можливість уникнути появи поганої обумовленості відповідної математичної задачі внаслідок істотних відмінностей у розмірах області розглядуваної неоднорідності у різних напрямках. Такі математичні моделі та методи їхнього дослідження вже добре себе зарекомендували у випадку, коли лише один розмір включення значно менший за інші (лінійчасті неоднорідності у двовимірних задачах та оболонкові у тривимірних) [2, 8]. Натомість настільки ж ефективних підходів, придатних для аналізу ниткових неоднорідностей, на даний час ще бракує, хоча такі задачі є досить важливими з огляду на

\* Виконано за підтримки Національного фонду досліджень України (грант № 2020.02/0091).

поширення застосування волокнистих композитів, а також значний поступ у використанні нанокомпозитів [5]. Покажемо тут слід вважати проведений у [3, 4] аналіз впливу абсолютно жорсткої голкоподібної неоднорідності як граничного випадку задачі для витягнутого еліпсоїдного включення. При цьому зазначено, що згаданий розв'язок можна отримати лише при граничному переході до лінії від двовимірної поверхні, адже просторова крайова задача при заданих на лінії умовах є погано обумовленою, подібно до задач із виродженням крайових умов, розглянутих у роботах І. О. Луковського з учнями (див., наприклад, [1]).

Провести числовий аналіз задачі теорії пружності для жорсткого включення, що моделюється просторовою кривою, вдалося на основі застосування методу граничних елементів у статті [6], де, однак, не було приділено достатньої уваги дослідженню регуляризаційного параметра, що дало б можливість покращити обумовленість такого формулювання.

У даній статті викладено підхід до побудови і регуляризації інтегральних рівнянь для середовища, що містить пружні нитчасті неоднорідності. У випадку пружного прямолінійного нитчастого включення скінченної довжини отримано наближений аналітичний розв'язок цих рівнянь на основі методу ітерацій.

**1. Принцип моделювання та інтегральні рівняння зовнішньої задачі.** Розглянемо ізотропне пружне середовище (нескінченна область  $\mathfrak{B} \sim \mathbb{R}^3$ ), що містить тонке ниткове недеформівне ідеально теплопровідне включення радіуса  $\rho$ , серединна лінія  $L$  якого є гладкою кривою (рис. 1), а його об'єм обмежено поверхнею  $S$ .

Розподіл зумовлених включенням переміщень можна отримати на основі застосування формули Сомільяни [6]

$$u_i(\mathbf{y}) = \iint_S (U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{y}) t_j(\mathbf{x}') - T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{y}) u_j(\mathbf{x}')) dS(\mathbf{x}') + u_i^\infty(\mathbf{y}), \quad (1)$$

де  $u_i$  — компоненти вектора переміщень;  $u_i^\infty(\mathbf{y})$  — поле переміщень, зумовлене навантаженням середовища на нескінченності;  $t_i = \sigma_{ij} n_j$  — компоненти вектора напружень;  $\sigma_{ij}$  — компоненти тензора напружень;  $\mathbf{x}' \in S$ . Ядра інтегральної формули (1) для випадку лінійно пружного ізотропного матеріалу тіла можна записати у вигляді

$$U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-1}}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[ (3-4\nu)\delta_{ij} + \tau_i\tau_j \right], \quad T_{qi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = C_{ijkl} n_j(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_m} U_{qk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (2)$$

де  $C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{km} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jk})$  — компоненти тензора модулів пружності матеріалу;  $\lambda, \mu$  — сталі Ляме;  $\nu = \lambda/(2(\lambda + \mu))$  — коефіцієнт Пуассона;  $\boldsymbol{\tau}$  — напрямні косинуси вектора  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ ,  $n_i(\mathbf{x}')$  — компоненти вектора одиничної нормалі до поверхні  $S$  включення у точці  $\mathbf{x}'$ .

За аналогією з методом функцій стрибка [2], що підтвердив свою ефективність при моделюванні тонких стрічкових та оболонкових неоднорідностей, зведемо задачу математичного моделювання ниткового включення до визначення розподілених на деякій просторовій кривій  $L$  всередині тіла (що відповідає, наприклад, серединній лінії (осі) включення) певних функцій впливу (наприклад, зусиль чи диполів), що збурюють напружений стан тіла так само, як і вилучена із розгляду неоднорідність. При цьому внаслідок тонкості включення заступається лінією лише для середовища, що його містить, проте саме воно при побудові математичної

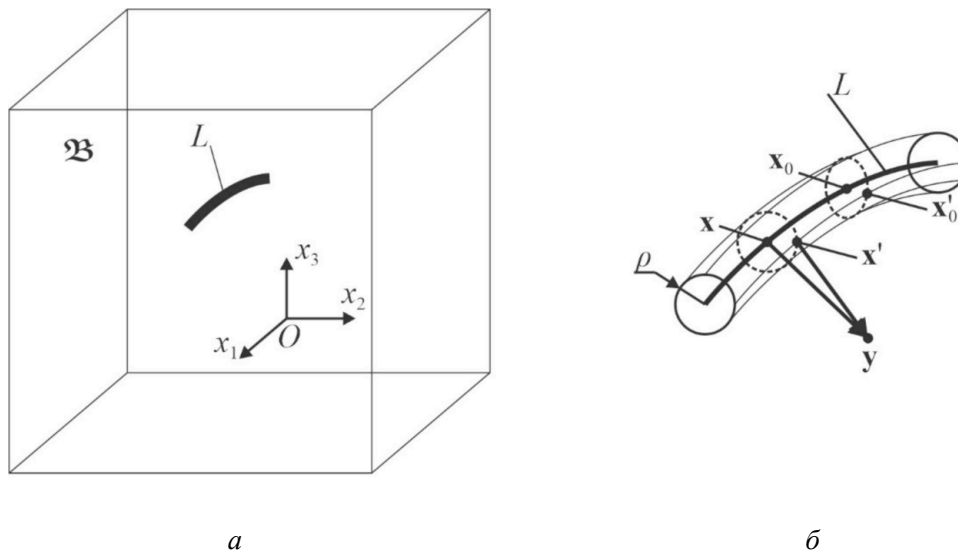


Рис. 1. Моделювання ниткового включення: *a* — середовище із включенням; *б* — властиво ниткове включення.

моделі його деформування вважається геометричним об’єктом певної товщини, що таким чином не накладає жодних принципових обмежень на вибір відповідної моделі в залежності від реального об’єкта та можливостей належно розв’язати сформульовану задачу.

Як і в базовому методі функцій стрибка для тонких включень розмірності на одиницю меншої за розмірність базової структури [2], задачу для деформівного ниткового включення (розмірність менша на дві одиниці) можна умовно розбити на три частково пов’язані підзадачі: 1) *зовнішню* для середовища з умовно заданими (наперед невідомими) на просторових кривих  $L$  функціями впливу; 2) *проміжну* у вигляді умов контактної взаємодії середовища із неоднорідністю та 3) *внутрішню*. Остання полягає у побудові більш чи менш адекватної математичної моделі неоднорідності, в якій виявляється зв’язок між поверхневими функціями впливу (на поверхні волокна) та поведінкою (деформуванням, теплопровідністю тощо) осі  $L$  ниткового включення та його поперечних перерізів. Проміжна задача пов’яже між собою згадані поверхневі функції впливу внутрішньої та зовнішньої задач за допомогою умов взаємодії. Результатом цього є конкретна повна система інтегральних рівнянь (чи нерівностей) задачі з урахуванням характеру контакту між включенням і середовищем — ідеального чи неідеального. У випадку ідеального контакту відповідні функції впливу зовнішньої та внутрішньої задач повинні бути тотожними за модулем і протилежними за напрямком дії.

На підставі викладеного вище принципу спряження континуумів різної розмірності перейдемо до лінійчастої моделі ниткової неоднорідності та знесемо крайові умови зовнішньої задачі (для середовища) із поверхні  $S$  на серединну лінію  $L$ . При цьому, з огляду на мализну  $\rho$ , можливу заокруглену форму та локальний характер впливу контактних напружень на торцях ниткової неоднорідності, знехтуємо ними.

Оскільки при  $\|x - y\| > \rho$  є правильним такий розклад у ряд Лорана:

$$\frac{1}{|x' - y|} \approx \frac{1}{|x - y| + \rho} = \frac{1}{|x - y|} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k (-1)^k}{|x - y|^{k+1}}, \tag{3}$$

то на основі (2) для малих  $\rho$  можна вважати, що

$$U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \approx U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in L. \quad (4)$$

Згідно з теоремою Рімана похибка такого наближення виразу  $|\mathbf{x}' - \mathbf{y}|^{-1}$  формулою  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-1}$  не перевищує  $\rho|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2}$ .

Записуючи координати точки  $\mathbf{x}'$  у вигляді

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \rho \mathbf{e}(\mathbf{x}, \vartheta), \quad \mathbf{e}(\mathbf{x}, \vartheta) = \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cos \vartheta + \mathbf{b}(\mathbf{x}) \sin \vartheta, \quad (5)$$

де  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  і  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  — відповідно одиничні вектори нормалі та бінормалі до кривої  $L$  у точці  $\mathbf{x}$ , а  $\vartheta$  — полярний кут, та зважаючи на (4), перший інтеграл у правій частині (1) можна звести до вигляду

$$\begin{aligned} \iint_S U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{y}) t_j(\mathbf{x}') dS(\mathbf{x}') &= \iint_S U_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{y}) t_j(\mathbf{x}') \rho d\vartheta dL(\mathbf{x}) \approx \\ &\approx \int_L U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \int_0^{2\pi} t_j(\mathbf{x} + \rho \mathbf{e}(\mathbf{x}, \vartheta)) \rho d\vartheta dL(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (6)$$

Оскільки  $\frac{\partial}{\partial x_j} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-1} = -\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_j} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-2}$ , то безпосереднім диференціюванням можна перевірити, що  $\frac{\partial}{\partial x'_j} |\mathbf{x}' - \mathbf{y}|^{-1} \approx \frac{\partial}{\partial x_j} [|\mathbf{x} - \mathbf{y}| + \rho]^{-1}$ . Тоді, диференціюючи (3), маємо

$$\frac{\partial}{\partial x'_j} \frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{y}|} \approx \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| + \rho} = -\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x_j} \left[ \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k (-1)^k}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{k+2}} \right]. \quad (7)$$

Звідси отримуємо, що похибка наближення

$$\frac{\partial}{\partial x'_j} |\mathbf{x}' - \mathbf{y}|^{-1} \approx \frac{\partial}{\partial x_j} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-1} \quad (8)$$

ще менша і не перевищує  $\rho|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-3}$ .

Вважаючи, що переміщення у кожному нормальному до осі включення перерізі, з огляду на мализну його товщини, є практично однаковими, тобто  $u_i(\mathbf{x}') = u_i(\mathbf{x} + \rho \mathbf{e}(\mathbf{x}, \vartheta)) \approx u_i(\mathbf{x})$ , а також зважаючи на (2) і (8), для другого інтеграла у формулі (1) одержуємо

$$\begin{aligned} \iint_S T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{y}) u_j(\mathbf{x}') dS(\mathbf{x}') &= \iint_S T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{y}) u_j(\mathbf{x}') \rho d\vartheta dL(\mathbf{x}) \approx \\ &\approx \int_L u_j(\mathbf{x}) C_{jqkm} \frac{\partial}{\partial x_m} U_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho \int_0^{2\pi} n_q(\mathbf{x} + \rho \mathbf{e}(\mathbf{x}, \vartheta)) d\vartheta dL(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (9)$$

Оскільки поперечний переріз включення вважається круглим, компоненти вектора одиничної нормалі  $n_q(\mathbf{x} + \rho \mathbf{e}(\mathbf{x}, \vartheta))$  до поверхні  $S$  неоднорідності дорівнюють

$$n_q(\mathbf{x} + \rho \mathbf{e}(\mathbf{x}, \vartheta)) = e_p(\mathbf{x}, \vartheta), \quad (10)$$

і на основі (5)

$$\int_0^{2\pi} n_q(\mathbf{x} + \rho \mathbf{e}(\mathbf{x}, \vartheta)) d\vartheta = \int_0^{2\pi} e_p(\mathbf{x}, \vartheta) d\vartheta = 0. \quad (11)$$

Таким чином, співвідношення (9) набирає вигляду

$$\iint_S T_{ij}(\mathbf{x}', \mathbf{y}) u_j(\mathbf{x}') dS(\mathbf{x}') \approx 0. \quad (12)$$

Отже, з огляду на (6) і (12) для  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \gg \rho$ , де радіус  $\rho$  включення значно менший за його характерну довжину  $L$ , формулу (1) записуємо у вигляді

$$u_i(\mathbf{y}) = \int_L U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p_j(\mathbf{x}) dL(\mathbf{x}) + u_i^\infty(\mathbf{y}), \quad (13)$$

де

$$p_j(\mathbf{x}) = \rho \int_0^{2\pi} t_j(\mathbf{x} + \rho \mathbf{e}(\mathbf{x}, \vartheta)) d\vartheta \quad (14)$$

— функція впливу ниткового включення на середовище.

У рівняннях (4) – (14)  $\vartheta$  є полярним кутом, а інтегрування проводиться по колу з центром у точці  $\mathbf{x}$  нормального (щодо  $L$ ) перерізу ниткового включення.

Відповідно до (13), задачу теорії пружності для ниткового включення при заданому функційному зв'язку між компонентами усереднених векторів переміщень та напружень на периметрі кругового поперечного перерізу включення, що можна описати загальним виразом

$$F(u_i(\mathbf{x}), p_i(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in L, \quad (15)$$

який називатимемо математичною моделлю такої неоднорідності, можна розв'язати, визначивши відповідні функції  $p_j(\mathbf{x})$ . Тут  $F$  — певний функціонал, який потрібно побудувати, спираючись на реологічну поведінку ниткового включення.

Для визначення функції впливу  $p_j(\mathbf{x})$  можна, наприклад, у формулі (13) спрямувати точку  $\mathbf{y}$  середовища до деякої точки  $\mathbf{x}_0$  на лінії  $L$ , отримавши таким чином інтегральне рівняння щодо невідомих функцій. При цьому слід зважати на те, що при отриманні (13) було використано умову  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \gg \rho$ . Таким чином, у безпосередній близькості до осі  $L$  включення поля переміщень лише з певним наближенням описуватимуть дійсні поля, а з віддаленням від неї опис буде щораз точнішим. Проте з фізичної точки зору формулу (13) можна трактувати як інтегральне подання переміщень, зумовлених розподіленими вздовж лінії  $L$  зусиллями

$p(\mathbf{x})$ . У такому формулюванні обмеження  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \gg \rho$  вже не є обов'язковим, а задача зводиться до пошуку таких зусиль  $p_j(\mathbf{x})$ , щоб переміщення  $u_j(\mathbf{x})$  точок лінії  $L$  задовольняли співвідношення (15).

При цьому слід враховувати, що при здійсненні граничного переходу  $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}_0 \in L$  у (13) перший інтеграл у правій частині (13) розбігається у звичайному сенсі. Це пов'язано з тим, що розмірність поверхні, на якій задано крайові умови, повинна бути на одиницю меншою за розмірність задачі (для тривимірних задач крайові умови задаються на двовимірній поверхні, а для двовимірних — на одновимірній кривій). Натомість у сформульованій просторовій задачі крайові умови задано на кривій  $L$  (одновимірна геометрія). Цю задачу визначення зв'язку між складовими векторів переміщення  $u_i$  у середовищі поза включенням та вектора напружень  $p_j(\mathbf{x})$ , які воно передає назовні, називаємо *зовнішньою*. Задача визначення напружено-деформованого стану всередині включення за вектором напружень на його поверхні є *внутрішньою*. Рівняння зовнішньої та внутрішньої задач обумовлені фізико-механічними властивостями матеріалів середовища та включення і вибором математичної моделі останнього. У випадку ідеального механічного контакту між включенням та середовищем згадані вектори напружень мають однакову величину. Однак при неідеальному контакті тіл необхідно також формулювати *проміжну задачу*, яка полягає у з'ясуванні залежності між ними. Формулювання цієї задачі поєднує зовнішню і внутрішню задачі, рівняння яких можна аналізувати (але не розв'язувати) цілком незалежно.

Оскільки з фізичної точки зору включення має певну товщину  $2\rho$ , реальні крайові умови задано на деякій поверхні. Тому *сформулюємо таке правило обчислення другого доданка в розглянутій задачі*: точку середовища  $\mathbf{y}$  слід спрямовувати не до виділеної точки  $\mathbf{x}_0$  на кривій  $L$ , а до деякої маловіддаленої від  $L$  точки  $\mathbf{x}'_0$ , що узгоджувалося б з реальною геометрією ниткового включення. З огляду на це, рівняння (13) запишемо у фізично зрозумілому (фактично регуляризованому) вигляді з відокремленням знесених на лінію включення крайових умов та певним урахуванням впливу товщини неоднорідності:

$$u_i(\mathbf{x}_0) = \int_L U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) (p_j(\mathbf{x}) - p_j(\mathbf{x}_0)) dL(\mathbf{x}) + p_j(\mathbf{x}_0) \int_L U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'_0) dL(\mathbf{x}) + u_i^\infty(\mathbf{x}_0). \quad (16)$$

Для обчислення другого доданка дещо видозмінимо контур  $L$ , ввівши на ньому півкруглу ділянку  $L_\epsilon$  малого радіуса  $\epsilon$  (причому  $\rho < \epsilon \ll L$ ), що оточує точку колокації  $\mathbf{x}_0 \sim \mathbf{x}'_0$  (рис. 2), та запишемо (16) у вигляді

$$u_i(\mathbf{x}_0) = \int_L U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) (p_j(\mathbf{x}) - p_j(\mathbf{x}_0)) dL(\mathbf{x}) + p_j(\mathbf{x}_0) \left[ \int_{L \setminus L_\epsilon} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL(\mathbf{x}) + A_{ij}(\mathbf{x}_0) \right] + u_i^\infty(\mathbf{x}_0), \quad (17)$$

де

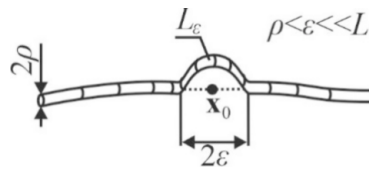


Рис. 2. Правило обчислення інтегралів.

$$A_{ij}(x_0) = \int_{L_\epsilon} U_{ij}(x, x_0) dL(x) \tag{18}$$

— незалежний від параметра  $\epsilon$  член, що з огляду на (2) визначається лише напрямком дотичної до  $L$  у точці  $x_0$  та пружними сталими матеріалу.

Із фізичної точки зору введений параметр  $\epsilon$  є мірою мализни розміру об’єкта, тобто тією межею розмірів, якими можна нехтувати при розгляді товщини ниткової неоднорідності. З іншого боку, керуючись так званим „принципом мікроскопа”, можна стверджувати, що малий параметр  $\epsilon$  вказує на порядок відстані, на яку ми можемо наблизитися до неоднорідності, де отриманий розв’язок ще матиме сенс. Із математичної точки зору параметр  $\epsilon$  можна вважати регуляризаційним. Оскільки інтегральне рівняння (17), з огляду на введене правило регуляризації (рис. 2), практично формулюється на поверхні радіуса  $\epsilon$  ( $\rho < \epsilon \ll L$ ), то умова  $\|x - x_0\| > \rho$  буде задовольнятися. Тому за вказаною моделлю можливим є наближене визначення зовнішнього поля переміщень поблизу ниткового включення. Похибка визначення зовнішніх переміщень буде зменшуватись при віддаленні від поверхні неоднорідності. Чим ближче до неоднорідності необхідно обчислити поле переміщень зі збереженням заданої точності, тим меншим повинен бути радіус  $\epsilon$ .

**2. Модель деформівної ниткової неоднорідності та інтегральні рівняння задачі.** Вважатимемо, що ниткове включення та тіло перебувають в умовах ідеального механічного контакту, тобто проміжна задача зводиться до співвідношень

$$u^i(x') = u(x'), \quad t^i(x') = -t(x'), \quad x' \in S. \tag{19}$$

Тут верхнім прямим індексом „i” позначено величини, пов’язані із включенням.

З огляду на (14) та (19) функція впливу  $p(x)$  включення на середовище пов’язана з функцією впливу  $p^i(x)$  середовища на неоднорідність так:

$$p(x) = -p^i(x), \quad x \in L. \tag{20}$$

Зважаючи на малу товщину ниткового включення, першу з умов (19) знесемо на його вісь (тобто переміщення у площині осьового перерізу неоднорідності вважатимемо однаковими):

$$u^i(x') \approx u^i(x) = u(x), \quad x \in L. \tag{21}$$

Далі будемо користуватися виразами (20) і (21), не розглядаючи окремо функції  $p^i(x)$  та  $u^i(x)$ .

Розглянемо нормальний перетин ниткового включення у точці  $x_0$  його серединної лінії  $L$  і пов’яжемо з ним натуральну систему координат  $O\tau nb$ , де  $\tau$  — дотична до  $L$  у точці

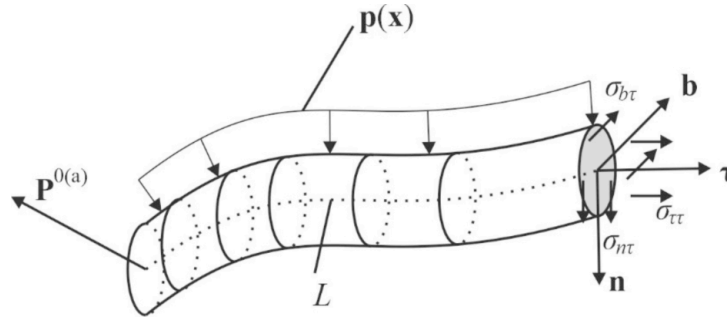


Рис. 3. Напруження у внутрішньому нормальному перерізі ниткової неоднорідності.

$x_0 \sim O$ ,  $n$  і  $b$  — відповідно головна нормаль і бінормаль (рис. 3). Закон Гука для ізотропного лінійно пружного тіла запишемо у цій локальній системі координат так [2]:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\tau\tau} &= \frac{1}{E^i} [\sigma_{\tau\tau} - \nu^i (\sigma_{nn} + \sigma_{bb})], \\ \epsilon_{nn} &= \frac{1}{E^i} [\sigma_{nn} - \nu^i (\sigma_{\tau\tau} + \sigma_{bb})], \\ \epsilon_{bb} &= \frac{1}{E^i} [\sigma_{bb} - \nu^i (\sigma_{nn} + \sigma_{\tau\tau})], \end{aligned} \tag{22}$$

$$\epsilon_{\tau n} = \frac{1}{2\mu^i} \sigma_{\tau n}, \quad \epsilon_{\tau b} = \frac{1}{2\mu^i} \sigma_{\tau b}, \quad \epsilon_{nb} = \frac{1}{2\mu^i} \sigma_{nb}.$$

Тут  $E^i$ ,  $\mu^i$  і  $\nu^i$  — відповідно модуль пружності, модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона матеріалу ниткового включення,  $\epsilon_{ij}$  — компоненти тензора деформацій, задані у локальній системі координат.

З огляду на рівняння рівноваги середні напруження у нормальному перерізі ниткової неоднорідності визначаються залежностями

$$\sigma_{\tau\tau}(x_0) = \frac{1}{S} \mathbf{P}(x_0) \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \sigma_{n\tau}(x_0) = \frac{1}{S} \mathbf{P}(x_0) \cdot \mathbf{n}, \quad \sigma_{\tau b}(x_0) = \frac{1}{S} \mathbf{P}(x_0) \cdot \mathbf{b}, \tag{23}$$

$$\mathbf{P}(x_0) = -\mathbf{P}^{0(a)} + \int_{x_a}^{x_0} \mathbf{p}(x) dL(x),$$

де  $\mathbf{P}^{0(a)}$  — прикладене до лівого торця ниткової неоднорідності зусилля,  $\mathbf{p}(x)$  — функція механічних впливів включення (14),  $S$  — площа поперечного перерізу останнього.

Підставивши (23) у (22) та знехтувавши впливом  $\sigma_{nn}$  і  $\sigma_{bb}$ , для середніх деформацій неоднорідності отримаємо такі вирази:

$$\frac{\partial u_\tau}{\partial L} = \frac{\sigma_{\tau\tau}}{E^i}, \quad \frac{\partial u_n}{\partial L} = \frac{\sigma_{\tau n}}{\mu^i}, \quad \frac{\partial u_b}{\partial L} = \frac{\sigma_{\tau b}}{\mu^i}. \tag{24}$$



Інтегруючи (24) вздовж серединної лінії  $L$  ниткового включення, отримуємо його базову модель

$$\begin{aligned}
 u_\tau(\mathbf{x}_0) &= u_\tau(\mathbf{x}_a) + \int_{x_a}^{x_0} \frac{\sigma_{\tau\tau}(\mathbf{x})}{E^i} dL(\mathbf{x}), & u_n(\mathbf{x}_0) &= u_n(\mathbf{x}_a) + \int_{x_a}^{x_0} \frac{\sigma_{\tau n}(\mathbf{x})}{\mu^i} dL(\mathbf{x}), \\
 u_b(\mathbf{x}_0) &= u_b(\mathbf{x}_a) + \int_{x_a}^{x_0} \frac{\sigma_{\tau b}(\mathbf{x})}{\mu^i} dL(\mathbf{x}).
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

Тепер відповідно до (17), (23) і (25) крайові інтегральні рівняння щодо функцій впливу деформівного ниткового включення на нескінченне середовище запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}
 &\int_L U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) (p_j(\mathbf{x}) - p_j(\mathbf{x}_0)) dL(\mathbf{x}) + p_j(\mathbf{x}_0) \left[ \int_{L \setminus L_\varepsilon} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) dL(\mathbf{x}) + A_{ij}(\mathbf{x}_0) \right] = \\
 &= u_i^0(\mathbf{x}_a) + \frac{1}{S\lambda_i} \int_{x_a}^{x_0} \left[ -P_i^{0(a)} + \int_{x_a}^{x_0} p_i(\mathbf{x}) dL(\mathbf{x}) \right] dL(\mathbf{x}) - u_i^\infty(\mathbf{x}_0)
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

із додатковими умовами (рівняння рівноваги неоднорідності)

$$-P_i^{0(a)} - P_i^{0(b)} + \int_{x_a}^{x_b} p_i(\mathbf{x}) dL(\mathbf{x}) = 0.
 \tag{27}$$

Тут  $\lambda_1 = E^i$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = \mu^i$ ,  $P_i^{0(a)}$  і  $P_i^{0(b)}$  – компоненти векторів зовнішніх сил, прикладених до відповідних торців неоднорідності.

**3. Інтегральні рівняння для прямолінійного ниткового пружного включення скінченної довжини в однорідному полі напружень розтягу-стиску.** Розглянемо випадок прямолінійного ниткового пружного включення, розташованого вздовж відрізка  $(-a, a)$  осі  $Ox_1$  декартової системи координат при дії на нескінченності середовища однорідного навантаження розтягу або стиску  $\sigma_{11}^\infty$ ,  $\sigma_{22}^\infty$ ,  $\sigma_{33}^\infty$  вздовж координатних осей (зсувні компоненти  $\sigma_{12}^\infty = \sigma_{21}^\infty$ ,  $\sigma_{13}^\infty = \sigma_{31}^\infty$ ,  $\sigma_{23}^\infty = \sigma_{32}^\infty$  тензора напружень на нескінченності при цьому вважатимемо нульовими). Тоді зумовлені цим навантаженням переміщення осі  $Ox_1$  середовища дорівнюють

$$u_1^\infty(x_1, 0, 0) = \frac{1}{2\mu(1+\nu)} \left( \sigma_{11}^\infty - \nu(\sigma_{22}^\infty + \sigma_{33}^\infty) \right) x_1, \quad u_2^\infty(x_1, 0, 0) = u_3^\infty(x_1, 0, 0) = 0.
 \tag{28}$$

Вважаючи також, що  $P_2^{0(a)} = P_2^{0(b)} = 0$  і  $P_3^{0(a)} = P_3^{0(b)} = 0$  (зовнішні зусилля можуть діяти лише вздовж осі включення), з урахуванням (2), (18), (23) і (28) єдине з рівнянь (26), що має нетривіальний (ненульовий) розв’язок (випадок  $i = 1$ ), запишемо так:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p_1(\tilde{x}) - p_1(\tilde{x}^{(0)})}{|\tilde{x} - \tilde{x}^{(0)}|} d\tilde{x} + [g_x(\tilde{x}^{(0)}) + g_\varepsilon(\tilde{\varepsilon}) + 1] p_1(\tilde{x}^{(0)}) = \\ & = 4\mu u_1^0 + 4\chi \left[ -\frac{P_1^{0(a)}}{a} (\tilde{x}_0 + 1) + \int_{-1}^1 K(\tilde{x}^0 - \tilde{x}) p_1(\tilde{x}) d\tilde{x} \right] - 4\mu u_1^\infty(\tilde{x}_0), \end{aligned} \quad (29)$$

де  $K(x) = xH(x)$ ,  $H(x)$  — одинична функція Гевісайда,  $u_1^0$  — переміщення торця включення з координатами  $(-a, 0, 0)$ ,  $\tilde{x} = x_1/a$  — знерозмірена координата,  $\chi = \frac{\mu a^2}{E^1 S}$  — відносна податливість матеріалу включення,  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/a$ ,  $u_1^\infty(\tilde{x}_0) = u_1^\infty(a\tilde{x}_0, 0, 0)$ . Функції  $g_x(\tilde{x})$  і  $g_\varepsilon(\tilde{\varepsilon})$  означено так:

$$g_x(\tilde{x}) = \frac{1}{\pi} [\ln(1 + \tilde{x}) + \ln(1 - \tilde{x})],$$

$$g_\varepsilon(\tilde{\varepsilon}) = -\frac{2}{\pi} \ln \tilde{\varepsilon}.$$

При розв'язанні (29) слід також зважати на умови глобальної рівноваги неоднорідності (27), що в даному конкретному випадку набирають вигляду

$$a \int_{-1}^1 p_1(\tilde{x}) d\tilde{x} - P_1^{0(a)} - P_1^{0(b)} = 0.$$

Слід зазначити, що відповідно до означення (14) компонента  $p_1(\tilde{x})$  функції впливу прямолинійної неоднорідності, що лежить на осі  $Ox_1$ , є фактично рівнодійною дотичних напружень на периметрі поперечного перерізу включення у розглядуваній точці.

Рівняння (29) розв'язуватимемо наближено методом ітерацій. Для цього запишемо його у вигляді

$$\begin{aligned} p_1(\tilde{x}^{(0)}) &= \frac{4\mu u_1^0 - \frac{4\chi P_1^{0(a)}}{a} (\tilde{x}_0 + 1) - 4\mu u_1^\infty(\tilde{x}_0)}{1 + g_\varepsilon(\tilde{\varepsilon})} + \\ &+ \frac{1}{1 + g_\varepsilon(\tilde{\varepsilon})} \left[ 4\chi \int_{-1}^1 K(\tilde{x}^0 - \tilde{x}) p_1(\tilde{x}) d\tilde{x} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p_1(\tilde{x}) - p_1(\tilde{x}^{(0)})}{|\tilde{x} - \tilde{x}^{(0)}|} d\tilde{x} - g_x(\tilde{x}^{(0)}) p_1(\tilde{x}^{(0)}) \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

Рівняння (30) дає можливість отримувати послідовні наближення розв'язку, підставляючи початкове наближення у праву частину і виконуючи відповідні обчислення. Зокрема, для випадку дії на нескінченності середовища однорідного поля напружень (28), беручи за початкове наближення функцію

$$p_1^{(0)} = \frac{-4\mu u_1^\infty(\tilde{x}_0)}{(1 + g_\varepsilon(\tilde{\varepsilon}))(\chi + 1)} \tag{31}$$

для неоднорідності, на яку не діють зовнішні сили ( $P_1^{0(a)} = P_1^{0(b)} = 0$ ), на підставі залежності (30) вдалось отримати замкнені аналітичні залежності для першого

$$p_1^{(1)} = C_1 \tilde{x}_0 \left( 2\pi\chi\tilde{x}_0^2 + C_2 - 3 \ln(1 - \tilde{x}_0^2) \right),$$

де

$$C_1 = -\frac{2\pi a \left( \sigma_{11}^\infty - \nu(\sigma_{22}^\infty + \sigma_{33}^\infty) \right)}{3\mu(\pi - 2 \ln \varepsilon)^2(1 + \chi)(1 + \nu)}, \quad C_2 = 3\pi(1 - \chi) - 6 \ln \varepsilon(1 + \chi) + 6,$$

і другого

$$p_1^{(2)}(\tilde{x}^{(0)}) = \frac{4\mu u_1^0 - \frac{4\chi P_1^{0(a)}}{a}(\tilde{x}_0 + 1) - 4\mu u_1^\infty(\tilde{x}_0)}{1 + g_\varepsilon(\tilde{\varepsilon})} + \frac{1}{1 + g_\varepsilon(\tilde{\varepsilon})} \left[ 4\chi \int_{-1}^1 K(\tilde{x}^0 - \tilde{x}) p_1^{(1)}(\tilde{x}) d\tilde{x} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p_1^{(1)}(\tilde{x}) - p_1^{(1)}(\tilde{x}^{(0)})}{|\tilde{x} - \tilde{x}^{(0)}|} d\tilde{x} - g_x(\tilde{x}^{(0)}) p_1^{(1)}(\tilde{x}^{(0)}) \right] \tag{32}$$

наближень розв’язку. Інтеграл у формулі (32) вдається обчислити в явному вигляді, причому навіть перше (не говорячи про друге) наближення дуже добре узгоджується з числовим розв’язком рівняння (29) на основі застосування отриманого авторами методу поліномів Лежандра [9] для широкого спектра зміни параметрів  $\tilde{\varepsilon}$  та  $\chi$ .

**4. Числовий аналіз прикладів.** Вважатимемо, що на нескінченності на середовище діють напруження  $\sigma_{11}^\infty = \sigma$ , а решта компонент тензора напружень є нульовими. Для розрахунків візьмемо значення коефіцієнта Пуассона  $\nu = 1/3$ . На рис. 4 зображено залежність шуканої функції  $p_1(\tilde{x})$  від параметрів регуляризації  $\tilde{\varepsilon}$  та податливості неоднорідності  $\chi$ . Суцільні лінії відповідають другому, а штрихові – першому наближенню шуканої функції згідно з (30), (31).

Слід зазначити, що незважаючи на істотну залежність функції впливу  $p_1(\tilde{x})$  нитчастої неоднорідності від регуляризаційного параметра  $\tilde{\varepsilon}$ , це впливає на розраховані поля переміщень та напружень лише в безпосередній близькості до включення. Із віддаленням від нього цей вплив зменшується. Вже на відстані порядку  $10^{-2}a$  до нитки відмінність отриманих на підставі числового інтегрування (13) полів переміщень при різних значеннях  $\tilde{\varepsilon}$  є неістотною. Тому з огляду на фізичні підстави введення параметра  $\tilde{\varepsilon}$  можна стверджувати, що він вказує на те, наскільки близько у розрахунках можна підійти до неоднорідності та наскільки тонкою вона повинна бути, щоб можна було застосовувати запропоновану теорію.

Із рис. 4 видно також, що зі збільшенням податливості неоднорідності функція її впливу зменшується в усіх точках області визначення. Крім того, розбіжність між першим та другим

наближенням розв'язку рівняння (30) є незначною, що свідчить про високу швидкість збіжності ітеративної схеми і достовірність отриманих результатів.

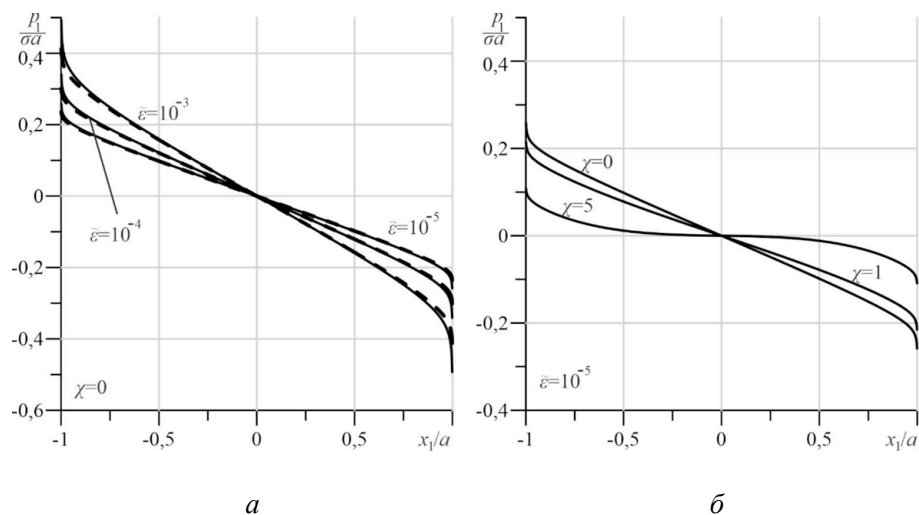


Рис. 4. Залежність функції впливу включення від регуляризаційного параметра  $\tilde{\varepsilon}$  (а) та відносної податливості  $\chi$  (б) неоднорідності.

На рис. 5 зображено поле переміщень поблизу абсолютно жорсткої неоднорідності, отримане для  $\tilde{\varepsilon} = 10^{-3}$ . Простежується хороша узгодженість результатів із даними граничноелементного аналізу цієї задачі [6].

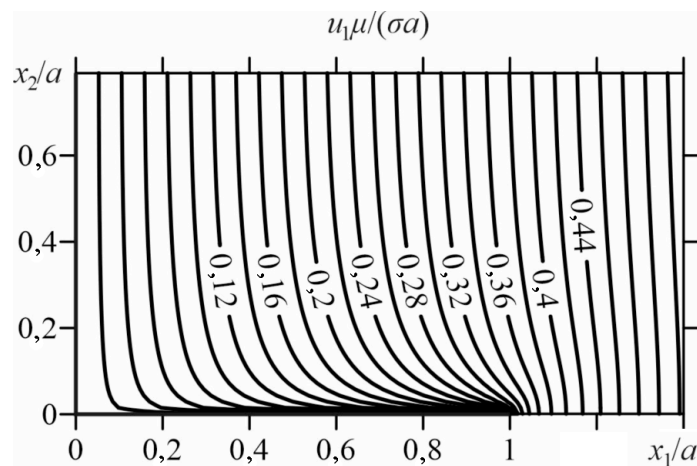


Рис. 5. Переміщення в околі ниткової неоднорідності.

**5. Висновки.** В роботі запропоновано спосіб регуляризації інтегральних рівнянь теорії пружності тіл із нитковими неоднорідностями. Побудовано математичну модель пружної нитки, що в сукупності з регуляризованими рівняннями дає можливість розв'язувати задачі для деформівних ниткових включень. У випадку прямолінійної нитки запропоновано наближений підхід розв'язання задачі на основі методу ітерацій. Вивчено отримані розв'язки.

Варто зазначити, що побудований аналітичний підхід розв'язання сформульованих просторових задач пружності дає можливість отримати наближені аналітичні залежності, якими

зручно користуватися, зокрема, й для визначення ефективних характеристик композитних матеріалів із нитковим наповненням, наприклад сталевібробетонів.

При аналізі просторових задач теорії пружності (та інших задач математичної фізики), в яких крайові умови (чи умови контакту) задано на просторовій кривій, доцільно вводити у розгляд додаткові регуляризаційні параметри, що дають можливість розв'язати розглянуту слабо сформульовану задачу.

### Література

1. А. Н. Комаренко, И. А. Луковский, С. Ф. Фещенко, *К задаче о собственных значениях с параметром в крайевых условиях*, Укр. мат. журн., **17**, № 6, 22 – 30 (1965).
2. Г. Т. Сулим, *Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями*, Дослід.-вид. центр НТШ, Львів (2007).
3. А. Ф. Улітко, Н. Е. Качаловська, *Особенности напряженного stanu пружного середовища, що містить жорстке „голкоподібне” включення*, Доп. АН УРСР. Сер. А, № 5, 44 – 48 (1987).
4. V. T. Grinchenko, A. F. Ulitko, *On local singularities in mathematical models of physical fields*, J. Math. Sci., **97**, № 1, 3777 – 3795 (1999).
5. K. M. Liew, Z. Pan, L.-W. Zhang, *The recent progress of functionally graded CNT reinforced composites and structures*, Sci. China. Phys., Mech., Astron., **63**, Article 234601 (2020); <https://doi.org/10.1007/s11433-019-1457-2>.
6. Іа. Pasternak, N. Pchuk, H. Sulym, O. Andriichuk, *Boundary integral equations for anisotropic elasticity of solids containing rigid thread-like inclusions*, Mech. Res. Commun., **100**, Article 103402, 1 – 6 (2019).
7. R. A. Sauer, G. Wang, S. Li, *The composite Eshelby tensors and their applications to homogenization*, Acta Mech., **197**, 63 – 96 (2008); <https://doi.org/10.1007/s00707-007-0504-2>.
8. H. Sulym, Іа. Pasternak, R. Pasternak, *Boundary element analysis of multifield materials*, Sci. Thesis № 274. Library of Mechanics, Printing House Białystok Univ. Technology, Białystok (2015).
9. Іа. М. Pasternak, H. Sulym, *Thermoelasticity of solids containing thread-like inhomogeneities. I. Nondeformable thread-like inclusions*, Int. J. Solids and Structures, **232**, Article 111176, 1 – 12 (2021); <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2021.111176>.

Одержано 15.06.21