DOI: 10.37863/umzh.v73i10.6787

УДК 535.51, 535.55, 539.3

О. Р. Гачкевич, Р. М. Кушнір, Р. Ф. Терлецький
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

МАТЕМАТИЧНІ ПРОБЛЕМИ ТЕРМОМЕХАНІКИ ДЕФОРМІВНИХ ТІЛ ПРИ ТЕПЛОВОМУ ОПРОМІНЕННІ

It is a review of the results of researches in the field of mathematical problems of the thermomechanics of magnetizable and polarizable electroconductive deformable bodies under electromagnetic irradiation, which are carried out at Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS of Ukraine. In this paper, we formulate the problems of mathematical physics that describe the thermal and thermal stress state in such bodies taking into account the peculiarities of electromagnetic action in different frequency ranges and analyze the methods of study of the thermomechanical behavior of bodies (in particular, of different transparency, as semitransparent as well as opaque) in these ranges under thermal irradiation.

Наведено огляд досліджень математичних проблем термомеханіки деформівних тіл різної електропровідності і здатності до намагнічування та поляризації при електромагнітному опроміненні, які проводяться в Інституті прикладних проблем механіки і математики НАН України. Сформульовано задачі математичної фізики, що описують тепловий та термонапружений стан у таких тілах із урахуванням особливостей електромагнітної дії в різних частотних діапазонах. Проаналізовано методи дослідження термомеханічної поведінки тіл у цих діапазонах, зокрема різної прозорості (частково прозорих та непрозорих) при тепловому опроміненні.

Важливим при розробці конкретних машин, механізмів, пристроїв, приладів і т. п. для вибраних цільових застосувань, а також при описі різних явищ є ефективне вирішення наявних при цьому математичних проблем механіки.

Згідно з означеннями предмету математичних проблем механіки (МПМ) школою акад. І. О. Луковського (див., наприклад, [1, 2]), до таких проблем відносяться дослідження, яким притаманні ряд факторів, основними з яких найчастіше є:

всебічне окреслення в широкому розумінні властивостей і вимог до суті створюваного продукту як з інженерної (технічної чи технологічної), так і супутніх сторін: економічної, суспільної, екологічної, техніки безпеки та ін., а також терміну очікуваного виконання завдання;

глибоке проникнення в фізичну, технічну і математичну суть початкового завдання, визначення й осмислення механічних проблем у взаємозв'язку з проблемами іншої фізичної природи в цьому завданні (проєкті), широке математичне моделювання як відповідних конструктивних рішень, так і процесів і явищ, характерних для завдання;

постановка на основі проведеного моделювання відповідних задач математичної фізики та формулювання початкових і крайових умов, які описують різні механічні особливості проблематики;

опрацювання ефективних методів розв'язування сформульованих задач, які, як правило, є нелінійними і некласичними, з використанням підходів обчислювальної математики при дослідженні умов існування, єдиності та інших математичних сторін отриманих розв'язків;

розробка відповідних засобів комп'ютерного моделювання та проведення широкої симуляції отриманих розв'язків;

опрацювання на основі проведеного аналізу оптимальних рішень; розробка оптимальних варіантів і на основі постановки відповідних безпосередніх задач оптимального керування;

надання по розглядуваному завданню (проєкті) рекомендацій зацікавленим організаціям чи на основі отриманих результатів розв'язання конкретних нових задач тематики або побудова нових теорій, які можуть забезпечити більш ефективне вирішення початкового завдання або інших споріднених проблем.

Беручи за основу такий підхід, розглянемо опрацьовувані в Інституті прикладних проблем механіки і математики НАН України математичні проблеми термомеханіки деформівних тіл різної електропровідності і здатності до намагнічування і поляризації при електромагнітному опроміненні інфрачервоного частотного діапазону, зокрема при тепловому опроміненні. За прийнятою в даний час термінологією [3, 4] їх можна віднести до підрозділу механіки „математичні проблеми механіки зв'язаних полів”. У зв'язку з ідейною спорідненістю багатьох питань тематики в розглядуваному інфрачервоному (до якого відноситься і теплове) чи світловому випромінюванні з аналогічними для випромінювання радіочастотного діапазону в окремих випадках будемо виходити з закономірностей, отримуваних для радіочастотного діапазону.

В статті [5] наведено короткий огляд математичних проблем термомеханіки та механотермодифузії електропровідних деформівних твердих тіл, що знаходяться під дією зовнішніх електромагнітних полів радіо і світлового частотних діапазонів, зокрема, механотермодифузії, в залежності від електропровідності тіл і здатності до поляризації і намагнічення, а також аналітичних та числових методів розв'язування сформульованих задач. Оцінено тенденції і перспективи розвитку досліджень в цьому напрямку.

В монографії [6] наведено методику лінеаризації відносно характеристичного стану отриманої нелінійної вихідної системи співвідношень механотермодифузії тіл низької електропровідності за умов дії електромагнітного поля радіочастотного діапазону (ЕМП). Розглянуто варіанти характеристичного стану при постановці різних класів задач про дослідження термомеханічної поведінки таких тіл. Зокрема, для дослідження механотермодифузійних процесів, зумовлених дією ЕМП, за характеристичний стан вибрано напружений стан, який досягається квазістатично при усереднених (за характерний час електромагнітних дій) енергетичних та силових чинниках дії ЕМП на компоненти тіла. Ці чинники розраховуються за розподілами характеристик ЕМП, температури та концентрацій компонент для тіла, яке приймається в наближенні абсолютно жорсткого закріпленого каркаса (при нехтуванні впливом деформаційних процесів на електромагнітні, теплові та дифузійні). Вихідну задачу механотермодифузії зведено до послідовності двох крайових задач: частково лінеаризованої для характеристичного стану та лінійної для збурень. Частково лінеаризована задача описується зв'язаною системою рівнянь електродинаміки, теплопровідності і дифузії (яка є нелінійною за рахунок структури виразів чинників дії ЕМП і залежностей характеристик матеріалу багатокомпонентного тіла від температури і концентрацій домішок). Лінійна задача є неоднорідною (коефіцієнти визначаються за відомими розподілами параметрів у характеристичному стані), яка при сталих параметрах суміші є задачею зі сталими коефіцієнтами (при цьому задачі на визначення збурень характеристик електромагнітних та механотермодифузійних полів розділяються). Такий підхід застосовують і при розв'язанні інших проблем електромагнітотермомеханіки, зокрема при зовнішній дії іншого частотного спектра.

В монографії [7] розглянуто орієнтований на використання числових методів варіант теорії кількісного опису термомеханічних процесів в електропровідних тілах при дії комплексних (силових, температурних та електромагнітних) навантажень з урахуванням температурної залежності всіх електро- та теплофізичних і механічних характеристик, пружнопластичного характеру деформування та особливостей магнітних і електричних властивостей матеріалів, що можуть намагнічуватись і поляризуватись (нелінійних залежностей індукцій електричного й магнітного полів від відповідних напруженостей та температури).

З використанням МСЕ та сім'ї однокрокових багатопараметричних алгоритмів із різними за величиною змінними кроками числового інтегрування за часом рівнянь, що описують у запропонованій математичній моделі розглядувані електромагнітні, теплові та механічні процеси, розроблено методику числового моделювання взаємозв'язаних процесів електропровідності, теплопровідності й деформування в електропровідних тілах при комплексних навантаженнях. При цьому для розв'язання задач термопружнопластичності запропоновано комбінований підхід з одночасним використанням в рамках однієї обчислювальної схеми методів змінних параметрів жорсткості та додаткових напружень. Для апроксимації відомих (отриманих на основі експериментальних вимірювань) температурно залежних властивостей матеріалів, кривих деформування, намагнічування та поляризації в процесі числової побудови розв'язку запропоновано інтерполяційні сплайни, побудовані за точками кривих, які описують поведінку матеріалів у широкому температурному діапазоні при дії ЕМП. Такий підхід дає можливість описувати наявні криві практично довільної складності.

В оглядовій статті [8] висвітлено специфіку побудови моделей термомеханіки феромагнітних (феритових) тіл з урахуванням моментних силових чинників, обумовлених взаємодією з електромагнітним полем. Отримано вихідні співвідношення моделей при дії зовнішнього поля, що є комбінацією сталого магнітного та змінного електромагнітного полів, зокрема в магнітостатичному наближенні.

В таких тілах з ускладненими магнітними властивостями процеси намагнічування мають гістерезисний характер і залежність амплітуди $B(H)$ індукції магнітного поля при періодичній зміні в часі амплітуди $H = A\cos\omega t + C\sin\omega t$ магнітного поля апроксимують формальною аналітичною залежністю

$$B(H) = \mu_0 \mathrm{H} + \beta_{\mathrm{H}} \operatorname{arcctg} \alpha_{\mathrm{H}} \mathrm{H},$$

де $\mathrm{H} = H$ для матеріалів, що мають вузькі петлі гістерезису, які моделюють основними кривими намагнічування (магнітом'які феромагнетики); $\mathrm{H} = \sqrt{1-\chi_{\mathrm{H}}^2}\, H - \dfrac{\chi_{\mathrm{H}}}{\omega}\dfrac{\partial H}{\partial t}$ для матеріалів, що мають широку петлю гістерезису (магнітотверді феромагнетики), а α_{H}, β_{H}, χ_{H} — характеристики намагнічування. Базуючись на такій апроксимації, у праці [9] з використанням методу малого параметра досліджено термонапружений стан магнітом'якого шару в гармонічному за часом магнітному полі з підмагнічуванням. Такий же вираз апроксимації $B(H)$ використано в монографії [7].

У роботі [10], базуючись на магнітостатичному наближенні, сформульовано вихідні задачі електродинаміки для визначення параметрів ЕМП при наявності нормального сталого та дотичного гармонічного за часом магнітного поля. Для цього випадку запропоновано методику визначення характеристик магнітного поля та відповідних їм енергетичних і силових чинників дії ЕМП для феритового шару, що ґрунтується на методі розвинення шуканих величин за малим параметром, за який вибрано відношення амплітуди дотичного гармонічного поля до значення нормального сталого. Для випадку малих гіромагнітних коливань вихідну систему співвідношень магнітостатики записано відносно амплітуд гармонік магнітного поля та отримано систему алгебраїчних рівнянь для гармонік вектора намагнічування в першому і другому наближеннях. При цьому часові подання чинників мають вигляд суми незалежних від часу характеристик магнітного поля і відповідно їх першої та другої гармонік.

Нижче розглянуто специфіку постановки і методів розв'язування термомеханічних задач для термочутливих частково прозорих та непрозорих щодо дії теплового випромінювання тіл при врахуванні ефектів, пов'язаних із поглинанням і випроміненням тілом теплової енергії.

При описі термонапруженого стану тіл використовують відомі співвідношення динамічної чи квазістатичної незв'язаної задачі термопружності [11, 12]. Вони включають рівняння, що описують механічні поля – рівняння руху (рівноваги)

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},$$

де σ_{ij}, u_i, F_i — компоненти тензора напружень, векторів переміщень та об'ємної сили, а ρ — густина, співвідношення Дюгамеля – Неймана

$$\sigma_{ij} = \left[\lambda_m u_{l,l} - (3\lambda_m + 2\mu)\phi(T, T_0) \right]\delta_{ij} + 2\mu u_{i,j},$$

які пов'язують компоненти σ_{ij} тензора напружень з компонентами тензора деформації $\varepsilon_{ij} = u_{i,j}$ (співвідношення Коші) при відомому розподілі температури у тілі. Тут $\phi(T, T_0) = \alpha_t (T - T_0)$ (T_0 — початкова температура), α_t — коефіцієнт лінійного температурного розширення, $\lambda_m = \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ і $\mu = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ — сталі Ляме, ν — коефіцієнт Пуассона, а E — модуль Юнга. Вище і далі x_i — декартові координати точок тіла, а через $\boldsymbol{x}$ будемо позначати радіус-вектор точки тіла; кома перед індексом означає диференціювання за відповідними координатами, а повторювані індекси — підсумовування; δ_{ij} — символ Кронекера, t — час. Для незв'язаної задачі (наближення температурної задачі теорії пружності) температура у тілі визначається з рівняння теплопровідності [12, 13]

$$(\kappa T_{,i})_{,i} + Q = \rho c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t}, \tag{1}$$

де κ і c_ε — коефіцієнт теплопровідності та питома теплоємність, Q — об'ємні тепловиділення, що визначаються процесами різної фізичної природи (хімічними, дисипацією електромагнітної енергії та ін.). Для термочутливих тіл враховується залежність величин ν, E, α_t, κ, c_ε, ρ від температури, а $\phi(T, T_0) = \int_{T_0}^{T} \alpha_t(T_*)\, dT_*$. Зауважимо, що тепловиділення Q можуть бути пов'язані, зокрема, з переносом у тілі теплового випромінювання, джерелом якого є як інші навколишні нагріті тіла, так і саме досліджуване тіло. При цьому суттєвим є характер поглинання тілом випромінювання — об'ємний чи приповерхневий. Об'ємний властивий частково прозорим тілам [14, 15]. Для них рівняння теплопровідності (1) потрібно доповнити квазістаціонарним рівнянням переносу випромінювання [14, 15], яке отримано феноменологічно на підставі закону Бугера. Воно є узагальненням рівняння переносу геометричної оптики для тіл низької електропровідності [6, 16], якщо врахувати власне випромінювання тіла (яке вважають ізотропним), і має вигляд

$$\frac{dI_\lambda(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{g}_0)}{dg} = a_\lambda(\boldsymbol{x})\left[\, I_{m\lambda}(T,\boldsymbol{g}_0) - I_\lambda(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{g}_0)\right]. \tag{2}$$

Тут λ – довжина хвилі електромагнітного випромінювання, $I_\lambda(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{g}_0)$ — спектральна інтенсивність випромінювання у тілі, яка є функцією координат, часу і напрямку, що характеризує орт $\boldsymbol{g}_0$ (g — відстань у напрямку поширення променя); $I_{m\lambda}(\lambda,T) = n_\lambda^2 I_{\lambda b}(\lambda,T)$ — спектральна інтенсивність власного випромінювання, що визначається через спектральний показник заломлення n_λ та спектральну інтенсивність випромінювання абсолютно чорного тіла $I_{\lambda b}(\lambda,T)$ при температурі T $\left(I_{\lambda b}(\lambda,T) = \dfrac{2\pi c_1}{\lambda^5 \exp\left(c_2/\lambda T - 1\right)},\right.$ де c_1, c_2 — відомі сталі [10]$\Bigg)$; $a_\lambda(\boldsymbol{x})$ — спектральний коефіцієнт поглинання.

Рівняння (2) описує перенос у тілі як власного теплового випромінювання, так і випромінювання від оточуючих тіл, яке можна врахувати при окресленні крайових умов на поверхні. Наприклад, спектральну інтенсивність $I_\lambda^{(e)}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{g}_0)$ падаючого на поверхню тіла зовнішнього теплового випромінювання часто вважають пропорційною величині $I_{\lambda b}$ при температурі T_s реального джерела випромінювання [16, 17], тобто

$$I_\lambda^{(e)}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{g}_0) = k_\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{g}_0) I_{\lambda b}(\lambda,T_s), \tag{3}$$

де $k_\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{g}_0)$ – задана функція, вигляд якої встановлюють залежно від енергетичних і спектральних характеристик реального джерела випромінювання та його розташування відносно тіла. Тоді крайова умова, яка описує зв'язок на поверхні S тіла спектральної інтенсивності випромінювання у ньому з відомою спектральною інтенсивністю падаючого випромінювання (при визначених експериментально коефіцієнтах відбивання і заломлення) з урахуванням балансу всіх потоків, що підводяться до поверхні (у тому числі й перевідбитих всередині тіла), має вигляд [15 – 17]

$$I_\lambda^{ef}\left(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{g}_0\right) = I_\lambda^{(0)}\left(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{g}_0\right) +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma=2\pi} R_\lambda''\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{g}_0,\boldsymbol{g}_0'\right) I_\lambda'\left(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{g}_0'\right)\cos(\bar{\boldsymbol{g}}_0',\boldsymbol{n})\, d\Gamma_{g_0'}, \qquad \boldsymbol{x}\in S. \tag{4}$$

Тут $I_\lambda^{(0)}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{g}_0) = n_\lambda^2\left[1 - R_\lambda'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{g}_0'')\right] I_\lambda^{(e)}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{g}_0'')$, а напрямки $\boldsymbol{g}_0$ і $\boldsymbol{g}_0''$ пов'язані співвідношенням [14]

$$\frac{\sin(\bar{\boldsymbol{g}}_0,\boldsymbol{n})}{\sin(\bar{\boldsymbol{g}}_0'',\boldsymbol{n})} = n_\lambda$$

($\boldsymbol{n}$ — одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні), $I_\lambda^{ef}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{g}_0)$ — спектральна інтенсивність ефективного випромінювання, що відходить від елемента dS поверхні тіла в точці $\boldsymbol{x}$ у напрямку $\boldsymbol{g}_0$ всередину тіла; $I_\lambda'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{g}_0')$, $I_\lambda^{(e)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{g}_0'')$ — спектральні інтенсивності випромінювання, що падає на елемент поверхні в даній точці в напрямку $\boldsymbol{g}_0'$ зсередини тіла і в напрямку $\boldsymbol{g}_0''$ зі сторони зовнішнього середовища відповідно; $R_\lambda'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{g}_0)$, $R_\lambda''(\boldsymbol{x},\boldsymbol{g}_0,\boldsymbol{g}_0')$ — одно- і двонаправлена спектральні відбивальні здатності поверхні. Інтегрування в (4) виконують за тілесним кутом Γ ($d\Gamma_{g_0'}$ — його елемент).

Об'ємна спектральна густина тепловиділень через інтенсивність випромінювання I_λ у тілі виражається формулою [15 – 17]

$$Q_\lambda = a_\lambda(\boldsymbol{x})\left[\eta_\lambda(\boldsymbol{x},t)-\eta_{m\lambda}(T)\right], \tag{5}$$

де

$$\eta_\lambda(\boldsymbol{x},t) = \int\limits_{\Gamma=4\pi} I_\lambda(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{g}_0)\,d\Gamma_{\boldsymbol{g}_0} \tag{6}$$

— густина потоку падаючого випромінювання, а $\eta_{m\lambda} = 4\pi I_{m\lambda}(T)$ — густина потоку власного ізотропного випромінювання. Інтегруючи співвідношення (5) по всьому спектру випромінювання, отримуємо вираз для об'ємної густини тепловиділень у частково прозорому тілі, зумовлених поглинанням і випроміненням теплової енергії

$$Q = \int\limits_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda(\boldsymbol{x})\left[\eta_\lambda(\boldsymbol{x},t)-\eta_{m\lambda}(T)\right]d\lambda. \tag{7}$$

Розв'язок рівняння (2) можна записати у вигляді

$$I_\lambda(\theta_\lambda,\boldsymbol{g}_0) = I_\lambda^{ef}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{g}_0)\exp(-\theta_\lambda)+\int\limits_0^{\theta_\lambda} I_{m\lambda}(\lambda,T)\exp\left[-(\theta_\lambda-\theta_\lambda^*)\right]d\theta_\lambda^*. \tag{8}$$

Тут $\theta_\lambda(\boldsymbol{x}) = \int_0^{g(x_i)} a_\lambda(g^*)dg^*$ — оптична товщина шляху, $g(x_i)$ — відстань від поверхні до точки $\boldsymbol{x}$ у напрямку променя, а ефективна інтенсивність I_λ^{ef} випромінювання на поверхні визначається з крайової умови (4). Вона є інтегральним рівнянням Фредгольма другого роду. Тоді з урахуванням (6) – (8) рівняння (1) можна записати у вигляді [17]

$$(\kappa T_{,i})_{,i} + Q_{ef} + Q_{ir}^{(a)} - Q_{ir} = \rho c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t}, \tag{9}$$

де

$$Q_{ef} = \int\limits_{\lambda=0}^{\infty}\left[a_\lambda(\boldsymbol{x})\int\limits_{\Gamma=4\pi} I_\lambda^{ef}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{g}_0)\exp(-\theta_\lambda)\,d\Gamma_{\vec{g}_0}\right]d\lambda,$$

$$Q_{ir}^{(a)} = \int\limits_{\lambda=0}^{\infty}\left\{a_\lambda(\boldsymbol{x})\int\limits_{\Gamma=4\pi}\left[\int\limits_0^{\theta_\lambda} I_{m\lambda}(\lambda,T)\exp(-(\theta_\lambda-\theta_\lambda^*))\,d\theta_\lambda^*\right]d\Gamma_{\vec{g}_0}\right\}d\lambda,$$

$$Q_{ir} = 4\pi\int\limits_{\lambda=0}^{\infty} a_\lambda(\boldsymbol{x})I_{m\lambda}(\lambda,T)\,d\lambda.$$

Складник Q_{ir} тепловиділень пов'язаний з випроміненням кожною точкою тіла теплової енергії, $Q_{ir}^{(a)}$ — з поглинанням цієї енергії, а Q_{ef} — як з поглинанням енергії зовнішнього випромінювання, так і перевідбитого поверхнею власного. Складник Q_{ef} при нехтуванні перевідбиванням у тілі власного випромінювання визначає джерела тепла, обумовлені зовнішнім опроміненням, і не залежить від температури. Отже, для визначення температури у тілі отримуємо нелінійне інтегро-диференціальне рівняння (9) зі змінними коефіцієнтами, яке розв'язуємо сумісно з інтегральним рівнянням (4), що описує ефективну інтенсивність I_{λ}^{ef} на поверхні. За значних інтенсивностей зовнішнього випромінювання (високих температур T_s джерела порівняно з наявною температурою тіла) використовують наближення невипромінюючого тіла [14, 16], за якого в рівнянні (9) покладають $I_{m\lambda}(\lambda, T) = 0$, $Q = Q_{ef}$. Тоді нелінійність рівняння (9) визначається лише термочутливістю теплофізичних та радіаційних характеристик.

Теплові крайові умови формулюються, як прийнято в літературі, на основі умов неперервності нормальних складників теплового потоку на поверхні тіла (умов балансу теплових потоків). Зокрема, якщо тіло перебуває в умовах конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем, температуру $T^{ext}(t)$ якого задано як функцію часу, то обмін теплом описують за законом Ньютона [13], і крайова умова має вигляд

$$(\kappa T_{,i})n_i = \alpha_{\Pi}(\boldsymbol{x})\Big[T(\boldsymbol{x},t) - T^{ext}(t)\Big], \qquad \boldsymbol{x} \in S, \tag{10}$$

де $\alpha_{\Pi}(\boldsymbol{x})$ — коефіцієнт тепловіддачі з поверхні S тіла.

У сильнопоглинаючих тілах (непрозорих) поглинання енергії зовнішнього випромінювання (як і випромінювання теплової енергії) відбувається на відстанях, які рівні кільком приповерхневим атомним шарам, і в теорії випромінювання їх вважають поверхневими [14, 15]. Поглинуту та випромінену енергії враховують в умовах балансу теплових потоків на поверхні [13, 16]. Розподіл температури в непрозорому тілі описує рівняння вигляду (1), в якому $Q = 0$, а крайова умова (10) має вигляд

$$(\kappa T_{,i})n_i = q + \alpha_{\Pi}(\boldsymbol{x})\Big[T(\boldsymbol{x},t) - T^{ext}(t)\Big], \qquad \boldsymbol{x} \in S. \tag{11}$$

Тут $q = q^{(a)} - q^{(b)}$, де потоки $q^{(a)}$ поглинутої та $q^{(b)}$ випроміненої тілом теплової енергії в середовище з показником заломлення $n_{\lambda}^{(e)}$ окреслюють як [14, 15]

$$q^{(a)} = \int\limits_{\lambda=0}^{\infty} \int\limits_{\Gamma=2\pi} \big[1 - R'_{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{g}_0)\big] I_{\lambda}^{(e)}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{g}_0)\, d\Gamma_{\boldsymbol{g}_0}\, d\lambda,$$

$$q^{(b)} = \int\limits_{\lambda=0}^{\infty} \int\limits_{\Gamma=2\pi} (n_{\lambda}^{(e)})^2 \varepsilon_{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{g}_0) I_{\lambda b}(T, \boldsymbol{g}_0)\, d\Gamma_{\boldsymbol{g}_0}\, d\lambda,$$

а інтенсивність $I_{\lambda}^{(e)}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{g}_0)$ падаючого на поверхню тіла зовнішнього теплового випромінювання можна визначити з умов теплообміну випромінюванням з оточуючими тілами [14]. Якщо теплообміном нехтують, то її задають умовою (3). Температуру у непрозорих тілах при врахуванні процесів поглинання і випромінення ними теплової енергії описує квазілінійне рівняння (1) (при $Q = 0$) з нелінійною крайовою умовою (11), в якій характер нелінійності визначає залежність випроміненої енергії від температури. Якщо ступінь чорноти ε_λ і показник заломлення середовища вважати незалежними від довжини хвилі λ (зокрема, середньоінтегральними в реальному спектральному діапазоні $\varepsilon_\lambda = \varepsilon$, $n_\lambda^{(e)} = n^{(e)}$), то $q^{(b)} = \varepsilon (n^{(e)})^2 \sigma T^4(\boldsymbol{x}, t)$. Тут σ — стала Стефана – Больцмана.

Часто у крайовій умові, що описує випромінення і поглинання на поверхні непрозорого тіла, величину потоку q записують у вигляді

$$q = \lambda_* \left[T^4(\boldsymbol{x}, t) - T_S^4 \right], \qquad \boldsymbol{x} \in S, \tag{12}$$

де λ_* — узагальнений коефіцієнт випромінювання [13, 14]. Така умова передбачає теплообмін випромінюванням між розглядуваним тілом зі змінною в часі температурою поверхні $T(\boldsymbol{x}, t)$ та іншим непрозорим тілом, температура T_S якого підтримується сталою. Коефіцієнт λ_* визначається геометрією і взаємним розташуванням тіл, ступенями чорноти їхніх поверхонь та відбивальними властивостями. Наприклад, для двох концентричних циліндричних чи сферичних тіл з ізотермічними дифузно-відбиваючими поверхнями

$$\lambda_* = \frac{\sigma}{1/\varepsilon + \left(dS/dS_S \right)\left(1/\varepsilon_S - 1 \right)},$$

де dS і ε — елемент площі і ступінь чорноти розглядуваного тіла, а dS_S і ε_S — оточуючого.

У співвідношення сформульованих задач термомеханіки, зокрема рівнянь теплопереносу для термочутливих частково прозорих і непрозорих тіл, входять певні механічні, теплофізичні та радіаційні характеристики, особливості залежностей яких від температури та способи апроксимації відомих експериментальних даних проаналізовано в роботах [17, 18].

Для тіл плоскої геометрії (наприклад, шару) можна отримати аналітичний розв'язок інтегральних рівнянь відносно ефективних інтенсивностей. Зокрема, вираз для тепловиділень у шарі є таким [18]:

$$Q(z,t) = 2n^2\sigma \left\{ k \sum_{i=1}^{3} a_i F_i(T_S) C_i(z) T_S^4 - 2 \sum_{i=1}^{3} a_i F_i(T(z,t)) T^4(z,t) + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{3} a_i^2 F_i(T(z,t)) \left[\int_0^z D_i\left(z - z_*\right) T^4\left(z_*, t\right) dz_* + \int_z^h D_i\left(z_* - z\right) T^4\left(z_*, t\right) dz_* + \right.$$

$$\left. \left. + G_i(z) \int_0^h \exp\left(-a_i z_*\right) T^4\left(z_*, t\right) dz_* \right] \right\},$$

де n і R — показник заломлення і коефіцієнт відбивання, a_i, $i = 1, 2, 3$, — характеристики коефіцієнта поглинання, який апроксимують кусково-сталою функцією [17], h — товщина шару, T_S — температура джерела зовнішнього випромінювання (k — параметр, що характеризує його інтенсивність), $\nu_* = \cos\beta_*$, $\beta_* = \arcsin(1/n)$, $C_i(z) = (1+u_i m_i - R)E_2(a_i z) - (1+u_i - R)\nu_* E_2\left(\dfrac{a_i z}{\nu_*}\right)$, $D_i(z) = a_i E_1(a_i z)$, $G_i(z) = \dfrac{u_i}{1-R}\left[m_i E_2(a_i z) + E_2(a_i(h-z))\right]$, $m_i = 2RE_3(a_i h)$, $u_i = \dfrac{R(1-R)}{1-m_i^2}$, $F_i(T_*)$ — долі півсферичної інтегральної поверхневої густини потоку випромінювання абсолютно чорного тіла при температурі T_* в різних спектральних діапазонах [14], $E_n(x) = \int_0^1 \mu^{n-2}\exp(-x/\mu)d\mu$ — інтегроекспоненціальна функція. Видно, що вираз для тепловиділень містить лінійний, нелінійний та інтегральний складники. Тому для визначення температури у тілі отримуємо нелінійне інтегро-диференціальне рівняння теплопровідності зі змінними коефіцієнтами. Теплову крайову умову записуємо згідно з (11).

Сформульовану нелінійну крайову задачу теплопровідності, що описує температуру в опромінюваному частково прозорому шарі при умовах конвективного теплообміну з довкіллям, розв'язували методом скінченних елементів. При побудові однокрокової рекурентної схеми інтегрування в часі застосовували лінеаризацію [18 – 20] нелінійного складника (пропорційного четвертому степеню температури) варіаційного рівняння, а інтегральний складник враховували на попередньому кроці схеми інтегрування в часі.

Термонапружений стан шару визначали на основі відомих співвідношень [18] шляхом числового інтегрування при відомих апроксимаціях механічних характеристик та знайденому (чисельно) розподілу температури у ньому.

Зупинимось також на методах визначення та дослідження температурних полів і напружень у непрозорих термочутливих елементах конструкцій при умовах складного (конвективно-променевого) теплообміну, що описується умовою типу (12) [21 – 28]. Тут викладено аналітичні, аналітично-числові та числові методи визначення температурних полів елементів конструкцій простої геометричної форми, через поверхні яких здійснюється складний теплообмін із зовнішнім середовищем, на основі моделей, що враховують залежність теплових характеристик матеріалу від температури. Ці методи використовують при розв'язанні важливих складових підзадач сформульованих вихідних комплексних задач. При цьому на етапі отримання розв'язків відповідних теплових задач використано:

метод поетапної лінеаризації;

метод лінеаризувальних параметрів;

числове розв'язання;

метод послідовних наближень за умов складного теплообміну.

Метод поетапної лінеаризації розв'язання двовимірних стаціонарних і одновимірних нестаціонарних задач теплопровідності, що є моделями температурних полів у термочутливих елементах конструкцій з матеріалу з простою нелінійністю, на поверхнях яких відбувається конвективний, променевий чи конвективно-променевий теплообмін, а коефіцієнт теплообміну і ступені чорноти цих поверхонь теж залежать від температури, передбачає [24, 26, 28]:

зведення задачі теплопровідності до безрозмірного вигляду вибором деякої відлікової температури t_0 та характерного лінійного розміру l_0, поданням температурних залежностей теплових характеристик, коефіцієнтів теплообміну і ступенів чорноти у вигляді $\chi(t) = \chi_0 \chi^*(T_*)$, де χ_0 — розмірні (опорні) величини, а $\chi^*(T_*)$ — безрозмірні функції безрозмірної температури $T_* = T/t_0$, та введенням опорних критеріїв Біо $\mathrm{Bi}_0 = \alpha_{\Pi 0} l_0/\kappa_0$, Старка $\mathrm{Sk}_0 = \sigma\varepsilon_0 l_0 t_0^3/\kappa_0$, Померанцева $\mathrm{Po}_0 = q_0 l_0^2/(t_0\kappa_0)$, Кирпичова $\mathrm{Ki}_0 = q_0 l_0/(t_0\kappa_0)$, Фур'є $\mathrm{Fo} = a_0\tau/l_0^2$. Тут $a_0 = \dfrac{\kappa_0}{\rho_0 c_{\varepsilon 0}}$ — опорний коефіцієнт температуропровідності, q_0 — заданий тепловий потік на S;

часткову лінеаризацію знерозміреної задачі за допомогою перетворення Кірхгофа

$$\theta = \int\limits_{T_{*0}}^{T_*} \kappa^*(T_*)\, dT_* \tag{13}$$

(у випадку стаціонарної задачі $T_{*0} = T_0/t_0 = 0$, де T_0 — початкова температура), в результаті чого рівняння теплопровідності та граничні умови для теплового потоку чи температури трансформуються у лінійні на θ, а умови складного теплообміну типу (11), (12)

$$(\kappa(T)T_{,i})n_i + \alpha_\Pi(T - T_c) + \varepsilon\sigma(T^4 - T_c^4) = 0$$

частково лінеаризуються і набирають вигляду

$$\left[\frac{\partial\theta}{\partial x_1} - Q_0\left(T_*(\theta)\right)\right]_{x_1=\overline{a}} = 0, \tag{14}$$

де вирази

$$Q_0\left(T_*(\theta)\right) = \mathrm{Bi}_0\alpha_\Pi^*\left(T_*(\theta)\right)\left(T_*(\theta) - T_c\right) + \mathrm{Sk}_0\,\varepsilon^*\left(T_*(\theta)\right)\Big(\left(T_*(\theta)\right)^4 - T_c^4\Big)$$

у випадку двовимірної стаціонарної задачі є функціями координати x_2, а у випадку одновимірної нестаціонарної задачі — функціями безрозмірного часу Fo; $T_*(\theta)$ — нелінійне подання температури через змінну Кірхгофа, яке для конкретно заданої температурної залежності коефіцієнта теплопровідності $\kappa^*(T_*)$ отримуємо внаслідок розв'язання інтегрального рівняння (13);

остаточну лінеаризацію нелінійних умов типу (14) шляхом апроксимації нелінійних виразів $Q_0\left(T_*(\theta)\right)$ спеціально побудованими сплайнами нульового чи першого порядку;

побудову розв'язку отриманої лінійної крайової задачі щодо змінної θ будь-яким зручним аналітичним методом (відокремлення змінних, інтегральних перетворень);

знаходження шуканої температури внаслідок виконання оберненого перетворення Кірхгофа;

визначення методом колокації наявних у знайденому виразі температури параметрів сплайн-апроксимації.

Завдяки специфіці побудованих сплайнів, наприклад, у випадку задання лише на одній із поверхонь тіла умови складного теплообміну, структура відповідної алгебраїчної системи рівнянь така, що її перше рівняння містить один, друге — два і т. д., а останнє — всі невідомі параметри сплайн-апроксимації (трикутна система) і дає можливість, починаючи з розв'язання першого рівняння, послідовно визначити всі параметри.

Метод апробовано на прикладах побудови розв'язків нових нелінійних нестаціонарних задач теплопровідності для термочутливих порожнистої та суцільної куль, які, маючи початкову сталу температуру T_0, нагріваються (охолоджуються) зовнішніми середовищами внаслідок конвективно-променевого теплообміну через обмежуючі поверхні при залежних від температури коефіцієнтах теплообміну та ступенях чорноти.

Доволі простий і зручний у використанні метод лінеаризувальних параметрів знаходження температурних полів в елементах конструкцій, виготовлених з матеріалу з простою нелінійністю, через поверхні яких відбувається конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем при довільній температурній залежності коефіцієнта теплопровідності. Він передбачає [24, 26 – 28]:

запис задачі теплопровідності у безрозмірному вигляді;

часткову її лінеаризацію за допомогою перетворення Кірхгофа;

остаточну лінеаризацію нелінійної умови щодо змінної Кірхгофа θ, отриманої з умови конвективного теплообміну, шляхом заміни в ній нелінійного виразу $T_*(\theta)$ на $(1+\kappa)\theta + T_{*0}$, де κ — наперед невідомий параметр;

розв'язання отриманої лінійної крайової задачі щодо змінної θ будь-яким зручним класичним аналітичним методом;

використання параметра κ, що міститься у знайденому розв'язку, для задоволення з заданою точністю нелінійної умови щодо змінної θ;

обчислення за знайденою змінною Кірхгофа шуканої температури.

Метод лінеаризувальних параметрів адаптовано до розв'язання задач теплопровідності тонких пластин та стрижнів [24, 27], через поверхні яких відбувається конвективний теплообмін з оточуючим середовищем. Їхньою характерною особливістю є те, що в результаті застосування перетворення Кірхгофа нелінійності залишаються як в граничних умовах, так і в самому рівнянні.

Методом лінеаризувальних параметрів побудовано аналітично-числові розв'язки стаціонарних задач теплопровідності для термочутливої плоскої, циліндричної та сферичної стінок, які конвективно обмінюються теплом із зовнішніми середовищами через обмежуючі поверхні, та порівняно їх зі знайденими точними розв'язками цих задач. Отримано підтвердження достовірності аналітично-числових розв'язків методом лінеаризувальних параметрів.

Запропоновано методику знаходження числових розв'язків нестаціонарних задач теплопровідності термочутливого тіла, на поверхні якого відбувається складний теплообмін з оточуючим середовищем, яка передбачає [23]:

запис задачі у безрозмірних величинах;

часткову лінеаризацію шляхом введення змінної Кірхгофа;

просторову дискретизацію отриманої на змінну Кірхгофа крайової задачі методом скінченних різниць (інтегро-інтерполяційним методом чи методом скінченних елементів) і побудову на цій основі напівдискретної моделі вихідної задачі, яка є задачею Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь за часом;

побудову розв'язків напівдискретних задач за допомогою числових методів, реалізованих в стандартній програмі STIFF;

знаходження температури на основі формули оберненого перетворення Кірхгофа.

Запропоновано варіант методу послідовних наближень розв'язання задач теплопровідності термочутливих елементів конструкцій простої геометричної форми, що знаходяться в умовах складного теплообміну з оточуючим середовищем [22, 23, 25]. При цьому, крім теплових характеристик матеріалу тіла, від температури можуть залежати коефіцієнт теплообміну та ступінь чорноти поверхні тіла.

Побудовано ітераційну схему розв'язання двовимірних нестаціонарних задач теплопровідності для тіл, всі теплові характеристики яких залежать від температури, а на поверхні задано температури чи теплові потоки, та доведено її збіжність [24].

Після отримання розв'язків теплової задачі проблема **визначення напружено-деформованого стану** елементів конструкцій на основі моделі термочутливого тіла зводиться до розв'язання крайової задачі математичної фізики для системи диференціальних рівнянь з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами. Запропоновано та апробовано два варіанти побудови розв'язків таких крайових задач, а саме, варіант методу збурень [21, 23, 24] та спосіб їх зведення до інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду на певні базові компоненти напружено-деформованого стану, через які визначаються всі інші його компоненти [24, 28].

Отримані результати використано при удосконаленні існуючих і створенні нових основаних на дії ЕМВ технологій термообробки елементів конструкцій і приладів, зокрема електровакуумних, розробці функціональних покриттів елементів приладів із заданими радіаційними властивостями в світловому діапазоні спектра, а також при цільовій оптимізації теплового та напруженого станів металокерамічних багатошарових циліндричних конструкцій, які моделюють первинні термоелектричні перетворювачі температури при заданих умовах експлуатації, що підтверджено рядом патентів.

Література

1. В. Н. Кошляков, И. А. Луковский, Исследование по механике в Институте математики АН УССР за 50 лет, Укр. мат. журн., **36**, № 5, 576 – 583 (1984).
2. І. О. Луковський, О. Г. Мазко, О. М. Тимоха, Дослідження з математичних проблем механіки в Інституті математики НАН України, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **15**, № 1, 247 – 283 (2018).
3. А. Ф. Улітко, Вибрані праці, Вид. поліграф. центр „Київ. ун-т", Київ (2004).
4. O. Hachkevych, R. Kushnir, *Selected problems of the mechanics of coupled fields*, J. Math. Sci., **220**, № 2, 115 – 132 (2018).
5. О. Р. Гачкевич, Р. Ф. Терлецький, *Моделі термомеханіки намагнетовних і поляризовних електропровідних деформівних твердих тіл*, Фіз.-хім. механіка матеріалів, **40**, № 3, 19 – 37 (2004).
6. Я. Й. Бурак, О. Р. Гачкевич, Р. Ф. Терлецький, *Термомеханіка багатокомпонентних тіл низької електропровідності*, Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл, т. 1, Сполом, Львів (2006).
7. О. Р. Гачкевич, Б. Д. Дробенко, *Термомеханіка намагнечуваних електропровідних термочутливих тіл*, Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл, т. 4, Сполом, Львів (2010).
8. О. Р. Гачкевич, Р. Ф. Терлецький, Р. О. Івасько, *Моделювання електромагнітних, теплових і механічних процесів у магнітних середовищах за врахування моментних чинників*, Мат. методи і фіз.-мех. поля, **61**, № 4, 113 – 129 (2018).
9. М. Т. Солодяк, *Термопружний стан магнетом'якого шару у гармонійному за часом магнетному полі з підмагнечуванням*, Фіз.-хім. механіка матеріалів, **40**, № 2, 19 – 28 (2004).
10. О. Р. Гачкевич, М. Т. Солодяк, Р. Ф. Терлецький, Д. В. Тарлаковський, *Співвідношення електродинаміки, енергетичні та силові чинники дії електромагнетного поля для магнетних середовищ*, Фіз.-хім. механіка матеріалів, **50**, № 4, 62 – 68 (2014).
11. А. Д. Коваленко, *Основы термоупругости*, Наук. думка, Киев (1970).
12. В. Новацкий, *Теория упругости*, Мир, Москва (1975).
13. А. В. Лыков, *Теория теплопроводности*, Высш. школа, Москва (1967).
14. Р. Зигель, Дж. Хауелл, *Теплообмен излучением*, Мир, Москва (1975).
15. Н. А. Рубцов, *Теплообмен излучением в сплошных средах*, Наука, Новосибирск (1984).

16. О. Р. Гачкевич, Р. Ф. Терлецький, Т. Л. Курницький, *Механотермодифузія в частково прозорих тілах*, Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл, т. 2, Сполом, Львів (2007).
17. О. Р. Гачкевич, Р. Ф. Терлецький, М. Б. Брухаль, *Деякі проблеми математичного моделювання в термомеханіці тіл різної прозорості за теплового опромінення*, Мат. методи і фіз.-мех. поля, **51**, № 3, 202 – 219 (2008).
18. Р. Ф. Терлецький, М. Б. Брухаль, Ю. В. Немировський, *Моделювання та дослідження термомеханічної поведінки термочутливих тіл за врахування впливу теплового випромінювання*, Мат. методи та фіз.-мех. поля, **56**, № 2, 212 – 224 (2013).
19. М. Брухаль, Р. Терлецький, О. Фундак, *Методика числового розв'язування нелінійних задач теплоперенесення в тілах різної прозорості для теплового випромінювання*, Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика, вип. 13, 59 – 71 (2007).
20. О. Р. Гачкевич, Р. Ф. Терлецький, М. Б. Брухаль, *Моделювання та дослідження теплового та напруженого станів в опромінюваній системі з шарів різної прозорості, розділених непоглинаючим середовищем*, Мат. методи і фіз.-мех. поля, **60**, № 4, 124 – 136 (2017).
21. В. С. Попович, Г. Т. Сулим, *Центрально-симетрична квазістатична задача термопружності термочутливого тіла*, Фіз.-хім. механіка матеріалів, **40**, № 3, 62 – 68 (2004).
22. В. С. Попович, Г. Ю. Гарматій, О. М. Вовк, *Термопружний стан термочутливої порожнистої кулі за умов конвективно-променевого теплообміну з довкіллям*, Фіз.- хім. механіка матеріалів, **42**, № 6, 39 – 48 (2006).
23. R. M. Kushnir, V. S. Popovych, O. M. Vovk, *The thermoelastic state of a thermosensitive sphere and space with a spherical cavity subject to complex heat exchange*, J. Engng. Math., **61**, № 2-4, 357 – 369 (2008).
24. Р. М. Кушнір, В. С. Попович, *Термопружність термочутливих тіл*, Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл, т. 3, Сполом, Львів (2010).
25. В. С. Попович, О. М. Вовк, Г. Ю. Гарматій, *Дослідження статичного термопружного стану термочутливого порожнистого циліндра за конвективно-променевого теплообміну з довкіллям*, Мат. методи та фіз.-мех. поля, **54**, № 4, 167 – 175 (2011).
26. R. M. Kushnir, V. S. Popovych, *Heat conduction problems of thermosensitive solids under complex heat exchange*, Heat Conduction – Basic Research, Rijeka (Croatia) (2011), p. 131 – 154.
27. R. M. Kushnir, V. S. Popovych, V. V. Yanishevsky, *Thermal and thermoelastic state of thin-walled thermosensitive structures subject to complex heat exchange*, J. Thermal Stresses, **35**, Issue 1–3, 91 – 102 (2012).
28. V. Popovych, *Methods for determination of the thermo-stressed state of thermosensitive solids under complex heat exchange conditions*, Encyclopedia Thermal Stresses, vol. 6, Springer, Dordrecht etc. (2014), p. 2997 – 3008.

Одержано 17.06.21