1952 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. IV, № 3
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

О прямых разложениях групп

Л. Я. Куликов

Введение

Одним из основных вопросов в теории прямых разложений групп является вопрос о существовании изоморфных продолжений для двух данных прямых разложений группы.

Пусть заданы два прямых разложения группы G [1]

$$G=\sum_{\alpha\in M} D_\alpha \tag{D}$$

и

$$G=\sum_{\nu\in N} A_\nu . \tag{A}$$

Обозначим через $\Omega_{\text{А}}$ множество всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы G, соответствующих [2] прямому разложению (А). Прямым разложениям (D) и (А) группы G поставим в соответствие топологическое пространство $R(\text{D}, \Omega_{\text{А}})$, точками которого являются прямые слагаемые D_α, $\alpha\in M$, разложения (D), а множества, замкнутые в $R(\text{D}, \Omega_{\text{А}})$, определяются следующим образом: множество прямых слагаемых разложения (D) будем считать замкнутым подмножеством $R(\text{D}, \Omega_{\text{А}})$, если порождаемая этим множеством слагаемых подгруппа группы G является допустимой (характеристической) относительно множества эндоморфизмов $\Omega_{\text{А}}$.

Оказывается, что существование изоморфных продолжений для двух данных прямых разложений (D) и (А) группы G тесно связано со свойствами пространства $R(\text{D}, \Omega_{\text{А}})$ и аналогично строящегося пространства $R(\text{А}, \Omega_{\text{Д}})$.

Основным вопросом, изучаемым в настоящей работе, является вопрос о существовании изоморфных продолжений для двух данных прямых разложений (D) и (А) группы G, если пространство $R(\text{D}, \Omega_{\text{А}})$, соответствующее этим разложениям, является пространством Колмогорова [3].

В работе доказано, что если G — счетная группа и $R(\text{D}, \Omega_{\text{А}})$ является пространством Колмогорова, то разложения (D) и (А) обладают центрально изоморфными продолжениями. Аналогичный результат имеет место и для несчетной группы G, если выполняется хотя бы одно из сле-

[1] В работе всюду применяется только а д д и т и в н а я з а п и с ь групповой операции как для групп коммутативных, так и для групп некоммутативных.

[2] См. § 3.

[3] См. § 1.

дующих условий: 1) число прямых слагаемых в разложении (D) является конечным; 2) каждое прямое слагаемое в разложении (A) имеет не более чем счетную мощность; 3) всякая убывающая последовательность замкнутых подмножеств пространства $R(\mathrm{D}, \Omega_\mathrm{A})$ обрывается через конечное число шагов (см. § 8). Далее, даны условия, при которых указанное прямое разложение группы и любое другое разложение этой группы обладают центрально изоморфными продолжениями (см. § 8, 9), а также условия существования центрально изоморфных продолжений для любых двух прямых разложений группы (см. § 10).

Абелеву группу будем называть в п о л н е р а з л о ж и м о й, если она разлагается в прямую сумму подгрупп первого ранга [1].

Результаты, полученные в § 8, 9, 10, применяются к решению следующих двух вопросов.

Обладают ли изоморфными продолжениями любые два прямых разложения вполне разложимой группы?

Является ли каждое прямое слагаемое вполне разложимой группы также вполне разложимой группой?

Эти два вопроса тесно связаны: решение одного из них приводит к решению другого. Для случая абелевых групп без кручения конечного ранга и одного класса абелевых групп без кручения бесконечного ранга эти два вопроса были решены Бэром [2]. В § 12 изложено решение поставленных выше вопросов для с ч е т н ы х абелевых групп, для периодических групп и для одного класса несчетных смешанных групп.

Результаты, полученные в первых десяти параграфах этой работы, и их доказательства остаются в силе также для групп с произвольной областью операторов.

В заключение отметим, что метод, изложенный в этой работе, может быть использован для решения вопроса о существовании прямо подобных продолжений для двух заданных прямых разложений единицы вполне дедекиндовой структуры.

§ 1

Пусть

$$G=\sum_{\alpha\in M} D_\alpha \tag{D}$$

прямое разложение группы G и Ω — какое-либо множество эндоморфизмов группы G. Прямому разложению (D) и множеству эндоморфизмов Ω поставим в соответствие топологическое пространство $R(\mathrm{D},\Omega)$, точками которого являются прямые слагаемые D_α, $\alpha\in M$, разложения (D), а множества, замкнутые в $R(\mathrm{D}, \Omega)$, определяются следующим образом: множество прямых слагаемых разложения (D) будем считать замкнутым подмножеством $R(\mathrm{D}, \Omega)$, если порождаемая этим множеством слагаемых

[1] Отметим, что группой первого ранга называется абелева группа, любое конечное подмножество элементов которой порождает циклическую подгруппу.

[2] См. R. B a e r, Abelian groups without elements of finite order, Duke Math. J. 3, 1937, 68—122.

подгруппа группы G является допустимой относительно множества эндоморфизмов Ω.

(1,1). Определение. Топологическое пространство называется пространством Колмогорова, если любые два различных одноточечных подмножества пространства имеют различные замыкания.

Это определение эквивалентно такому:

(1,2). Определение. Топологическое пространство называется пространством Колмогорова, если из любых двух различных одноточечных подмножеств пространства хотя бы одно отделимо замкнутым множеством от другого.

(1,3). Определение. Прямое разложение (D) группы G, не содержащее нулевых прямых слагаемых, будем называть частично упорядоченным относительно множества эндоморфизмов Ω, если $R(\mathrm{D}, \Omega)$ является пространством Колмогорова.

Известно, что пересечение любого множества Ω-подгрупп[1] и группа, порожденная объединением любой совокупности Ω-подгрупп группы G, также являются Ω-подгруппами группы G. Поэтому, если разложение (D) частично упорядочено относительно Ω, то $R(\mathrm{D}, \Omega)$ является дискретным топологическим пространством.

Символом $C(\mathrm{D})$ будем обозначать множество всех тех подгрупп группы G, каждая из которых порождается какой-либо совокупностью прямых слагаемых разложения (D).

Символом $\Delta(\mathrm{D}, \Omega)$ будем обозначать множество всех Ω-подгрупп, принадлежащих $C(\mathrm{D})$.

Символом $V(D_\alpha, \mathrm{D}, \Omega)$ будем обозначать наименьшую группу из множества $\Delta(\mathrm{D}, \Omega)$, содержащую прямое слагаемое D_α разложения (D). Если Ω будет фиксировано, то часто группу $V(D_\alpha, \mathrm{D}, \Omega)$ будем обозначать через $\overline{D}_\alpha$.

Из определения пространства $R(\mathrm{D}, \Omega)$ следует, что множество $\{D_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ прямых слагаемых разложения (D) тогда, и только тогда, замкнуто в $R(\mathrm{D}, \Omega)$, когда подгруппа $\sum\limits_{\gamma \in \Gamma} D_\gamma$ группы G является элементом множества $\Delta(\mathrm{D}, \Omega)$. Далее, не трудно видеть, что, если множество $\{D_\gamma\}_{\gamma \in V}$ является замыканием в пространстве $R(\mathrm{D}, \Omega)$ одноточечного множества $\{D_\alpha\}$, то $\overline{D}_\alpha = \sum\limits_{\gamma \in V} D_\gamma$. Следовательно, два различных одноточечных множества $\{D_\alpha\}$ и $\{D_\beta\}$ пространства $R(\mathrm{D}, \Omega)$ имеют различные замыкания тогда, и только тогда, когда $\overline{D}_\alpha \neq \overline{D}_\beta$. Поэтому, принимая во внимание определения (1,1), (1,2), (1,3), не трудно видеть, что имеет место следующее предложение:

(1,4). *Для того чтобы прямое разложение* (D) *группы G было частично упорядоченным относительно множества эндоморфизмов Ω, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих двух условий:*

(a). *Разложение* (D) *не содержит нулевых прямых слагаемых, и имеет место соотношение*

$$\overline{D}_\alpha \neq \overline{D}_\beta \qquad (\alpha \neq \beta,\ \alpha,\ \beta \in M).$$

[1] Подгруппу группы G, допустимую относительно множества эндоморфизмов Ω, будем называть Ω-подгруппой группы G.

(b). *Для любых двух различных прямых слагаемых D_α и D_β разложения* (D) *существует в множестве* $\Delta(\mathrm{D}, \Omega)$ *группа, содержащая одно из этих прямых слагаемых и не содержащая другого.*

Обозначим через Q множество всех тех Ω-подгрупп группы $V(D_\alpha, \mathrm{D}, \Omega)$, которые принадлежат множеству $C(\mathrm{D})$ и имеют в пересечении с D_α только нулевой элемент. Легко видеть, что подгруппа группы G, порожденная любой совокупностью подгрупп из Q, также принадлежит Q. Поэтому среди групп, принадлежащих Q, существует наибольшая, т. е. существует группа, принадлежащая Q и содержащая в качестве подгруппы любую группу из Q. Эту наибольшую группу из Q будем обозначать через $U(D_\alpha, \mathrm{D}, \Omega)$. Таким образом, символом $U(D_\alpha, \mathrm{D}, \Omega)$ будем обозначать наибольшую Ω-подгруппу группы $V(D_\alpha, \mathrm{D}, \Omega)$, принадлежащую множеству $C(\mathrm{D})$ и имеющую в пересечении с D_α только нулевой элемент. Если Ω фиксировано, то группу $U(D_\alpha, \mathrm{D}, \Omega)$ будем часто обозначать через $\check{D}_\alpha$.

Очевидно, $\check{D}_\alpha \neq \overline{D}_\alpha$, если D_α не является нулевой группой.

(1,5). *Если прямое разложение* (D) *частично упорядочено относительно множества эндоморфизмов* Ω, *то соотношение*

$$\overline{D}_\beta \subset \check{D}_\alpha \qquad (\alpha, \beta \in M) \tag{a}$$

имеет место тогда, и только тогда, когда

$$\overline{D}_\beta \subset \overline{D}_\alpha \quad \text{и} \quad \beta \neq \alpha \qquad (\alpha, \beta \in M). \tag{b}$$

Доказательство. 1°. Предположим, что разложение (D) частично упорядочено относительно Ω. Тогда $\check{D}_\alpha \neq \{0\}$, $\overline{D}_\alpha \neq \check{D}_\alpha$ и, следовательно, из (a) следует (b).

2°. Предположим теперь, что группы D_α и D_β удовлетворяют соотношению (b). В силу (1,4)

$$\overline{D}_\beta \neq \overline{D}_\alpha \qquad (\beta \neq \alpha, \ \alpha, \beta \in M). \tag{1}$$

Так как $\overline{D}_\beta \subset C(\mathrm{D})$, то либо

$$\overline{D}_\beta \cap D_\alpha = \{0\}, \tag{2}$$

либо

$$D_\alpha \subset \overline{D}_\beta. \tag{3}$$

Но соотношение (3) при $\alpha \neq \beta$ невозможно. Действительно, если $D_\alpha \subset \overline{D}_\beta$, то $\overline{D}_\alpha \subset \overline{D}_\beta$, что в соединении с (b) дает равенство $\overline{D}_\beta = \overline{D}_\alpha$, противоречащее (1). Таким образом, имеет место соотношение (2). На основании (b) и (2) заключаем, что $\overline{D}_\beta$ является подгруппой $\overline{D}_\alpha$, имеющей в пересечении с D_α только нулевой элемент. Кроме того, $\overline{D}_\beta \in \Delta(\mathrm{D}, \Omega)$. Поэтому $\overline{D}_\beta \subset \check{D}_\alpha$. Таким образом, из (b) следует (a).

(1,6). *Если прямое разложение* (D) *группы* G *частично упорядочено относительно множества эндоморфизмов* Ω, *то имеет место прямое разложение:*

$$\overline{D}_\alpha = D_\alpha + \check{D}_\alpha \qquad (\alpha \in M). \tag{a}$$

Доказательство. Предположим, что разложение (D) частично упорядочено относительно Ω. Пусть D_α — произвольное прямое слагаемое разложения (D). Поскольку $D_\alpha \in C(\mathrm{D})$, существует подмножество V множества M такое, что

$$\overline{D}_\alpha = \sum_{\beta \in V} D_\beta. \tag{1}$$

Группа $\sum\limits_{\beta \in V \setminus \{\alpha\}} D_\beta$, очевидно, является наибольшей подгруппой группы D_α, принадлежащей $C(\mathrm{D})$ и не содержащей D_α. Но группа $\check{D}_\alpha$ есть наибольшая Ω-подгруппа группы $\overline{D}_\alpha$, принадлежащая $C(\mathrm{D})$ и имеющая в пересечении с D_α только нулевой элемент. Поэтому

$$\check{D}_\alpha \subset \sum_{\beta \in V \setminus \{\alpha\}} D_\beta. \tag{2}$$

Далее, поскольку $D_\beta \subset \overline{D}_\alpha$ при $\beta \in V$,

$$\overline{D}_\beta \subset \overline{D}_\alpha \qquad (\beta \in V). \tag{3}$$

Так как разложение (D) частично упорядочено относительно Ω, то в силу (1,4)

$$\overline{D}_\beta \neq \overline{D}_\alpha \qquad (\beta \neq \alpha, \ \beta \in V). \tag{4}$$

Из (3) и (4) в силу (1,5) следует, что

$$\overline{D}_\beta \subset \check{D}_\alpha \qquad (\beta \neq \alpha, \ \beta \in V),$$

откуда

$$D_\beta \subset \check{D}_\alpha \qquad (\beta \neq \alpha, \ \beta \in V). \tag{5}$$

Сопоставляя (2) и (5), получим

$$\check{D}_\alpha = \sum_{\beta \in V \setminus \{\alpha\}} D_\beta. \tag{6}$$

Теперь соотношения (1) и (6) показывают, что имеет место прямое разложение (a).

Пусть заданы произвольное прямое разложение группы G

$$G = \sum_{i \in M} D_i \tag{D}$$

и множество Ω эндоморфизмов группы G. Два прямых слагаемых D_i и D_k разложения (D) будем называть Ω-эквивалентными, если $V(D_i, \mathrm{D}, \Omega) = V(D_k, \mathrm{D}, \Omega)$. Не трудно видеть, что множество всех прямых слагаемых разложения (D) распадается на непересекающиеся классы Ω-эквивалентных между собой прямых слагаемых. Разложение (D) тогда, и только тогда, является частично упорядоченным относительно множества эндоморфизмов Ω, когда каждый класс Ω-эквивалентных между собой прямых слагаемых содержит только одно прямое слагаемое разложения (D), т. е. любые два различных прямых слагаемых разложения (D) не являются Ω-эквивалентными. Если разложение (D) не является частично упорядоченным относительно Ω и число классов Ω-эквивалентных между собой прямых слагаемых этого разложения не меньше двух, то, объединяя в одно прямое слагаемое прямые слагаемые разложения (D), принадлежащие одному и тому же классу, мы получим новое прямое разложение группы G, которое будет уже частично упорядоченным относительно множества эндоморфизмов Ω.

§ 2

(2,1). Определение. Множество L называется частично упорядоченным, если для некоторых пар различных между собой элементов α, β множества L установлено отношение порядка, обозначаемое через $\alpha < \beta$ и удовлетворяющее условиям:

1°. Отношения $\alpha < \beta$ и $\beta < \alpha$ исключают друг друга.

2°. Если $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$, то $\alpha < \gamma$.

Если α и β — два различных элемента частично упорядоченного множества L, то будем говорить, что β несравнимо с α, если ни одно из отношений $\alpha < \beta$, $\beta < \alpha$ не имеет места.

В дальнейшем мы не будем исключать из рассмотрения и такие частично упорядоченные множества, в которых любые два различных элемента несравнимы.

(2,2) Определение. Подмножество Γ частично упорядоченного множества L называется замкнутым, если из $\alpha \in \Gamma$, $\lambda < \alpha$ следует $\lambda \in \Gamma$.

Легко видеть, что имеет место следующее предложение:

(2,3). *Сумма и пересечение любого множества замкнутых подмножеств частично упорядоченного множества есть замкнутое множество.*

(2,4). Определение. Два частично упорядоченных множества называются подобными, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее порядок.

Предположим, что прямое разложение (D) частично упорядочено относительно множества эндоморфизмов Ω. Дискретное пространство $R(\mathrm{D}, \Omega)$ естественным образом превращается в частично упорядоченное множество, если для любых двух различных прямых слагаемых D_α и D_β разложения (D) положим $D_\beta < D_\alpha$ тогда, и только тогда, когда D_β принадлежит замыканию одноточечного множества $\{D_\alpha\}$ или, что то же, когда $D_\beta \subset \overline{D_\alpha}$. Не трудно видеть, что введенное таким образом отношение порядка удовлетворяет условиям 1°, 2° определения (2,1) и, следовательно, превращает множество $\{D_\alpha\}_{\alpha \in M}$ в частично упорядоченное множество, которое мы будем обозначать символом $\Theta(\mathrm{D}, \Omega)$.

Если (D) — частично упорядоченное относительно Ω прямое разложение группы G, то в множестве индексов M следующим образом введем отношение порядка: если α и β — два различных элемента множества M, то полагаем $\beta < \alpha$ тогда, и только тогда, когда $D_\beta < D_\alpha$ или, что то же, когда $D_\beta \subset \overline{D_\alpha}$. Введенное таким образом отношение порядка превращает множество индексов M в частично упорядоченное множество, которое мы будем обозначать символом $L(\mathrm{D}, \Omega)$. Легко видеть, что частично упорядоченные множества $\Theta(\mathrm{D}, \Omega)$ и $L(\mathrm{D}, \Omega)$ подобны между собой, причем соответствие $D_\alpha \longleftrightarrow \alpha$, $\alpha \in M$ является соответствием подобия.

(2,5). *Пусть*

$$G = \sum_{\alpha \in M} D_\alpha \tag{D}$$

прямое разложение группы G, частично упорядоченное относительно множества эндоморфизмов Ω. Подгруппа $\sum_{j \in \Gamma} D_j$, где $\Gamma \subset M$, тогда, и только тогда, допустима относительно Ω, когда множество индексов Γ является замкнутым подмножеством частично упорядоченного множества $L(\mathrm{D}, \Omega)$.

Доказательство. 1°. Положим

$$H = \sum_{\gamma \in \Gamma} D_\gamma. \tag{1}$$

Предположим, что Γ — замкнутое подмножество частично упорядоченного множества $L(\mathrm{D}, \Omega)$, и докажем, что тогда подгруппа H допустима относительно Ω. Сначала докажем, что

$$D_\alpha \subset H \qquad (\alpha \in \Gamma). \tag{2}$$

Пусть $\alpha \in \Gamma$ и D_β, $\beta \in M$ есть прямое слагаемое разложения (D), являющееся подгруппой группы $\overline{D}_\alpha$. Тогда $\beta \leqslant \alpha$. Отсюда, поскольку $\alpha \in \Gamma$ и Γ замкнуто в $L(\mathrm{D}, \Omega)$, следует, что $\beta \in \Gamma$ и, значит, в силу (1)

$$D_\beta \subset H \qquad (D_\beta \subset \overline{D}_\alpha,\ \alpha \in \Gamma). \tag{3}$$

Так как группа $\overline{D}_\alpha$ порождается некоторым множеством прямых слагаемых разложения (D), то на основании (3) заключаем, что имеет место (2). Далее, поскольку $D_\alpha \subset D_\alpha$, в силу (1) и (2)

$$H = [\bigcup_{\alpha \in \Gamma} \overline{D}_\alpha]^1. \tag{4}$$

Теперь, принимая во внимание, что $\overline{D}_\alpha$ является Ω-подгруппой группы G для всякого $\alpha \in M$ мы на основании (4) заключаем, что H есть Ω-подгруппа группы G.

2°. Предположим теперь, что группа H, $H = \sum_{j \in \Gamma} D_j$ является Ω-подгруппой группы G и докажем, что тогда множество Γ замкнуто в $L(\mathrm{D}, \Omega)$.

Пусть $\alpha \in \Gamma$. Надо доказать, что любой элемент $\beta \in L(\mathrm{D}, \Omega)$, удовлетворяющий соотношению $\beta \leqslant \alpha$, принадлежит Γ. Так как $\beta < \alpha$, то $D_\beta < D_\alpha$ и, значит,

$$D_\beta \subset \overline{D}_\alpha. \tag{5}$$

Поскольку $\alpha \in \Gamma$, то $D_\alpha \subset H$. Кроме того, H есть Ω-подгруппа группы G, принадлежащая множеству $C(\mathrm{D})$. Далее, $\overline{D}_\alpha$ является наименьшей Ω-подгруппой группы G, принадлежащей $C(\mathrm{D})$ и содержащей D_α. Поэтому

$$\overline{D}_\alpha \subset H. \tag{6}$$

Из (5) и (6) получаем $D_\beta \subset H$, т. е. $D_\beta \subset \sum_{\gamma \in \Gamma} D_\gamma$. Отсюда следует, что $\beta \in \Gamma$. Этим доказано, что Γ является замкнутым подмножеством $L(\mathrm{D}, \Omega)$.

(2,6). Определение. Пусть λ — элемент частично упорядоченного множества L. Символом $V(L, \lambda)$ будем обозначать множество всех элементов $\alpha \in L$, удовлетворяющих условию $\alpha \leqslant \lambda$. Множество $V(L, \lambda)$ называется комбинаторным замыканием элемента λ в частично упорядоченном множестве L.

Символом $U(L, \lambda)$ будем обозначать множество всех элементов $\alpha \in L$, удовлетворяющих условию $\alpha < \lambda$.

Легко видеть, что имеют место следующие предложения:

(2,7). *Если λ — элемент частично упорядоченного множества L, то множества $V(L, \lambda)$ и $U(L, \lambda)$ замкнуты в L.*

---

[1] Если $A, B, C, \ldots$ суть подмножества группы G, то символом $[A, B, C, \ldots]$ будем обозначать наименьшую подгруппу группы G, содержащую множества $A, B, C, \ldots$.

(2,8). *Если Γ — замкнутое подмножество частично упорядоченного множества L и $\lambda \in \Gamma$, то множества $V(L, \lambda)$ и $U(L, \lambda)$ принадлежат Γ.*

(2,9). *Пусть*

$$G = \sum_{\alpha \in M} D_\alpha \tag{D}$$

прямое разложение группы G, частично упорядоченное относительно множества эндоморфизмов Ω. Обозначим через V_α комбинаторное замыкание элемента α в частично упорядоченном множестве $L(\mathrm{D}, \Omega), \alpha \in M$, и положим $U_\alpha = V_\alpha \setminus \{\alpha\}$. Тогда имеют место равенства

$$\bar{D}_\alpha = \sum_{\beta \in V_\alpha} D_\beta \qquad (\alpha \in M), \tag{a}$$

$$\check{D}_\alpha = \sum_{\beta \in U_\alpha} D_\beta \qquad (\alpha \in M). \tag{b}$$

Доказательство. Пусть $\alpha \in M$. По определению, $\bar{D}_\alpha$ есть наименьшая Ω-подгруппа группы G, принадлежащая множеству $C(\mathrm{D})$ и содержащая D_α. Поскольку $\bar{D} \in C(\mathrm{D})$, существует подмножество Γ множества M такое, что

$$\bar{D}_\alpha = \sum_{\beta \in \Gamma} D_\beta. \tag{1}$$

Так как $\bar{D}_\alpha$ есть Ω-допустимая подгруппа группы G, то в силу (2,5) множество Γ замкнуто в $L(\mathrm{D}, \Omega)$. Отсюда, поскольку $\alpha \in \Gamma$, в силу (2,8) следует, что Γ содержит комбинаторное замыкание V_α элемента α,

$$V_\alpha \subset \Gamma. \tag{2}$$

В силу (2,7) $V\alpha$ является замкнутый подмножеством $L(\mathrm{D}, \Omega)$. Следовательно, согласно (2,5) группа $\sum_{\gamma \in V_\alpha} D_\gamma$ является допустимой относительно Ω. Кроме того, $D_\alpha \subset \sum_{\gamma \in V_\alpha} D_\gamma$, поскольку $\alpha \in V_\alpha$. Но $\bar{D}_\alpha$ есть наименьшая Ω-подгруппа группы G, принадлежащая множеству $C(\mathrm{D})$ и содержащая D_α. Поэтому

$$\bar{D}_\alpha \subset \sum_{\gamma \in V_\alpha} D_\gamma. \tag{3}$$

Теперь, на основании (1), (2), (3) заключаем, что имеет место равенство (a).

Из определения группы $\check{D}_\alpha$ следует, что $\check{D}_\alpha \in C(\mathrm{D})$. Далее, в силу (1,6) $\bar{D}_\alpha = D_\alpha + \check{D}_\alpha$ Отсюда и из равенства (a) теперь следует равенство (b). Предложение (2,9) доказано.

Пусть F — подмножество частично упорядоченного множества L. Элемент $\alpha \in F$ называется минимальным (максимальным) элементом множества F, если в F нет элемента λ, удовлетворяющего соотношению $\lambda < \alpha$ $(\lambda > \alpha)$.

Будем говорить, что подмножество F частично упорядоченного множества L удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей, если каждая убывающая последовательность

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots \quad \lambda_n > \ldots$$

элементов из F содержит только конечное число членов.

Будем говорить, что подмножество F частично упорядоченного множества L удовлетворяет условию минимальности, если любое непустое подмножество множества F обладает по крайней мере одним минимальным элементом.

Легко видеть, что подмножество F частично упорядоченного множества L тогда, и только тогда, удовлетворяет условию минимальности, когда оно удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей.

§ 3

В этом параграфе изложены некоторые определения и вспомогательные предложения, необходимые в следующих параграфах.

Пусть

$$G=\sum_{\nu\in N} A_\gamma \tag{A}$$

прямое разложение группы G. Каждому прямому слагаемому A_ν разложения (A) поставим в соответствие эндоморфизм φ_ν группы G, отображающий каждый элемент $g\in G$ в компоненту этого элемента в прямом слагаемом A_ν разложения (A). Эндоморфизм φ_ν будем называть эндоморфизмом, соответствующим прямому слагаемому A_ν разложения (A). Не трудно видеть, что φ_ν является идемпотентным нормальным[1] эндоморфизмом группы G. Множество $\{\varphi_\nu\}_{\nu\in N}$ будем называть множеством эндоморфизмов, соответствующих разложению (A), и обозначать через Ω_A.

(3,1). *Пусть*

$$G=\sum_{\nu\in\Gamma} F_\nu \tag{F}$$

прямое разложение группы G и ψ_ν — эндоморфизм, соответствующий прямому слагаемому F_ν разложения (F). *Подгруппа H группы G тогда, и только тогда, допустима относительно эндоморфизма ψ_ν, когда H удовлетворяет условию:*

$$\psi_\nu H = F_\nu \cap H. \tag{a}$$

Доказательство. Из (a), очевидно, следует соотношение $\psi_\nu H\subset H$ и, таким образом, условие (a) является достаточным. Докажем, что оно является также необходимым. Пусть H — подгруппа группы G, допустимая относительно эндоморфизма ψ_ν, т. е.

$$\psi_\nu H\subset H. \tag{1}$$

Из определения ψ_ν следует, что

$$\psi_\nu x = x \qquad (x\in F_\nu),$$

откуда

$$F_\nu \cap H \in \psi_\nu H. \tag{2}$$

С другой стороны, поскольку $\psi_\nu H\subset F_\nu$, из (1) следует соотношение

$$\psi_\nu H\subset H\cap F_\nu. \tag{3}$$

[1] Эндоморфизм группы называется нормальным, если он перестановочен со всеми внутренними автоморфизмами этой группы.

Сопоставляя (2) и (3), получим соотношение (a). Таким образом, условие (a) является также необходимым.

(3,2). *Пусть*

$$G = \sum_{\nu \in \Gamma} F_\nu \tag{F}$$

прямое разложение группы G. Для того чтобы нормальная подгруппа H группы G была допустимой относительно множества эндоморфизмов Ω_F, *необходимо и достаточно, чтобы имело место прямое разложение*

$$H = \sum_{\nu \in \Gamma} (F_\nu \cap H). \tag{H}$$

Доказательство. 1°. Докажем необходимость условия. Обозначим через ψ_ν эндоморфизм, соответствующий прямому слагаемому F_ν разложения (F), тогда

$$\Omega_F = \{\psi_\nu\}_{\nu \in \Gamma}.$$

Пусть H — нормальная подгруппа группы G, допустимая относительно множества эндоморфизмов Ω_F, т. е

$$\psi_\nu H \subset H \qquad (\nu \in \Gamma). \tag{1}$$

Докажем, что имеет место разложение (H). Так как $\psi_\nu H$ является компонентой нормальной подгруппы H в прямом слагаемом F_ν разложения (F), то не трудно видеть, что $\psi_\nu H$ является нормальной подгруппой группы H, $\nu \in N$, и имеет место соотношение $[\bigcup_{\nu \in \Gamma} \psi_\nu H] = \sum_{\nu \in \Gamma} \psi_\nu H$. Отсюда следует, что

$$H \subset \sum_{\nu \in \Gamma} \psi_\nu H. \tag{2}$$

На основании (1), (2) заключаем, что

$$H = \sum_{\nu \in \Gamma} \psi_\nu H. \tag{3}$$

Далее, из (1), в силу (3,1), следует равенство

$$\psi_\nu H = F_\nu \cap H \qquad (\nu \in \Gamma). \tag{4}$$

Сопоставляя (3) и (4), получим разложение (H).

2°. Докажем достаточность условия. Предположим, что H — нормальная подгруппа группы G, для которой имеет место разложение Ω_F. Пусть $\psi_\alpha \in \Omega_F$. Поскольку ψ_α — эндоморфизм группы G, из соотношения (H) следует равенство

$$\psi_\alpha H = [\bigcup_{\nu \in \Gamma} \psi_\alpha (F_\nu \cap H)] \qquad (\psi_\alpha \in \Omega_F). \tag{5}$$

Так как ψ_α — эндоморфизм группы G, соответствующий прямому слагаемому F_ν разложения (F), имеют место соотношения:

$$\psi_\alpha F_\nu = \{0\} \qquad (\alpha \neq \nu, \ \nu \in \Gamma), \tag{6}$$

$$\psi_\alpha x = x \qquad (x \in F_\alpha). \tag{7}$$

Из (6) следует равенство

$$\psi_\alpha (H \cap F_\nu) = \{0\} \qquad (\alpha \neq \nu, \ \nu \in \Gamma). \tag{8}$$

Далее, в силу (7)

$$\psi_\alpha(H \cap F_\alpha) = H \cap F_\alpha. \tag{9}$$

Сопоставляя (5), (8), (9), получим $\psi_\alpha H = H \cap F_\alpha$, т. е.

$$\psi_\alpha H \subset H \qquad (\psi_\alpha \in \Omega_F). \tag{10}$$

Соотношение (10) показывает, что подгруппа H допустима относительно множества эндоморфизмов Ω_F.

(3,3). *Если*

$$G = \sum_{\alpha \in M} D_\alpha, \tag{D}$$

$$G = \sum_{\nu \in N} A_\nu \tag{A}$$

два прямых разложения группы G *и* $H \in \Delta(\mathrm{D}, \Omega_\mathrm{A})$, *то имеет место прямое разложение:*

$$H = \sum_{\nu \in N} (A_\nu \cap H).$$

Доказательство. Это предложение является следствием предложения (3,2), так как по условию $H \in \Delta(\mathrm{D}, \Omega_\mathrm{A})$ и, значит, H является нормальной подгруппой группы G, допустимой относительно множества эндоморфизмов Ω_A.

(3,4). *Если*

$$G = \sum_{\alpha \in M} D_\alpha, \tag{D}$$

$$G = \sum_{\nu \in N} A_\nu \tag{A}$$

два прямых разложения группы G, $\bar{D}_\alpha$ — *наименьшая принадлежащая множеству* $\Delta(\mathrm{D}, \Omega_\mathrm{A})$ *группа, содержащая* D_α, *и* $\check{D}_\alpha$ — *наибольшая подгруппа* $\bar{D}_\alpha$, *принадлежащая множеству* $\Delta(\mathrm{D}, \Omega_\mathrm{A})$ *и не содержащая* D_α, *то имеют место прямые разложения:*

$$\bar{D}_\alpha = \sum_{\nu \in N} (A_\nu \cap \bar{D}_\alpha) \qquad (\alpha \in M), \tag{a}$$

$$\check{D}_\alpha = \sum_{\nu \in N} (A_\nu \cap \check{D}_\alpha) \qquad (\alpha \in M). \tag{b}$$

Это предложение является частным случаем предыдущего.

(3,5). Определение. Прямое разложение группы G

$$G = \sum_{\alpha \in M} D_\alpha \tag{D}$$

называется согласованным с разложением

$$G = \sum_{\nu \in N} A_\nu, \tag{A}$$

если оно является частично упорядоченным относительно множества эндоморфизмов Ω_A, соответствующих прямому разложению (A).

(3,6). *Пусть*

$$G = \sum_{\lambda \in L} E_\lambda \tag{E}$$

прямое разложение группы G, *согласованное с разложением*

$$G = \sum_{\nu \in N} A. \tag{A}$$

Обозначим символом H_P прямую сумму $\sum_{\lambda \in P} E_\lambda$, где $P \subset L$. Прямое разложение

$$H_P = \sum_{\nu \in N} (A_\nu \cap H_P)$$

имеет место тогда, и только тогда, когда P является замкнутым подмножеством частично упорядоченного множества $L(\mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})$.

Это предложение непосредственно следует из предложений (2,5) и (3,2).

(3,7). *Пусть L — частично упорядоченное множество и*

$$G = \sum_{\lambda \in L} E_\lambda, \tag{E}$$

$$G = \sum_{\nu \in N} A_\nu \tag{A}$$

два прямых разложения группы G, причем разложение (E) *не содержит нулевых прямых слагаемых. Если для любого замкнутого подмножества P частично упорядоченного множества L имеет место равенство*

$$H_P = \sum_{\nu \in N} (A_\nu \cap H_P), \tag{a}$$

где $H_P = \sum_{\lambda \in P} E_\lambda$, то разложение (E) *согласовано с разложением* (A).

Доказательство. Пусть E_i и E_k — два различных прямых слагаемых разложения (E). Докажем, что существует Ω_{A} — подгруппа группы G, содержащая одно из этих прямых слагаемых и не содержащая другого. Этим в силу (1,4) будет доказано, что разложение (E) согласовано с разложением (A). Предположим, например, что $i < k$ или i не сравнимо с k. Тогда, очевидно, k не содержится в комбинаторном замыкании V_i элемента i в частично упорядоченном множестве L,

$$k \overline{\in} V_i. \tag{1}$$

Множество V_i, очевидно, является замкнутым подмножеством L. Полагая в (a) $P = V_i$, получим

$$H_{V_i} = \sum_{\nu \in N} (A_\nu \cap H_{V_i}). \tag{2}$$

В силу (3,2) соотношение (2) означает, что подгруппа H_{V_i} допустима относительно множества эндоморфизмов Ω_{A}. Кроме того, группа H_{V_i} содержит прямое слагаемое E_i и в силу (1) не содержит прямого слагаемого E_k, поскольку по условию E_k — ненулевая группа. Таким образом, разложение (E) согласовано с разложением (A).

(3,8). *Пусть*

$$G = \sum_{\nu \in N} A_\nu \tag{A}$$

прямое разложение группы G, ψ_ν — эндоморфизм группы G, соответствующий прямому слагаемому A_ν разложения (A), *и $\{B_\lambda\}_{\lambda \in Q}$ — множество подгрупп группы G, допустимых относительно эндоморфизма ψ_ν. Тогда имеет место соотношение*

$$A_\nu \cap [\bigcup_{\lambda \in Q} B_\lambda] = [\bigcup_{\lambda \in Q} (A_\nu \cap B_\lambda)]. \tag{a}$$

Доказательство. Поскольку ψ_ν — эндоморфизм группы G, имеет место соотношение

$$\psi_\nu[\bigcup_{\lambda\in Q} B_\lambda] = [\bigcup_{\lambda\in Q} \psi_\lambda B_\lambda]. \tag{1}$$

Далее, по условию группы B_λ допустимы относительно эндоморфизма ψ_γ, т. е.

$$\psi_\nu B_\lambda \subset B_\lambda \qquad (\lambda \in Q), \tag{2}$$

откуда, в силу (1),

$$\psi_\nu[\bigcup_{\lambda\in Q} B_\lambda] \subset [\bigcup_{\lambda\in Q} B_\lambda]. \tag{3}$$

Из (2) и (3) в силу (3,1) следуют соответственно соотношения

$$\psi_\nu B_\lambda = A_\nu \cap B_\lambda \qquad (\lambda \in Q) \tag{4}$$

$$\psi_\nu[\bigcup_{\lambda\in Q} B_\lambda] = A_\nu \cap [\bigcup_{\lambda\in Q} B_\lambda]. \tag{5}$$

Сопоставляя (1) и (5), получим $A_\nu \cap [\bigcup_{\lambda\in Q} B_\lambda] = [\bigcup_{\lambda\in Q} \psi_\nu B_\lambda]$, откуда в силу (4) следует соотношение (a).

(3,9). *Пусть*

$$G = \sum_{\nu\in N} A_\nu$$

прямое разложение группы G *и* $\{B_\lambda\}_{\lambda\in Q}$ — *множество подгрупп группы* G, *допустимых относительно множества эндоморфизмов* Ω_A. *Тогда имеет место соотношение*

$$A_\nu \cap [\bigcup_{\lambda\in Q} B_\lambda] = [\bigcup_{\lambda\in Q} (A_\nu \cap B_\lambda)].$$

Это предложение непосредственно следует из предыдущего.

(3,10). *Пусть* A, B, D — *подгруппы группы* G, C — *подгруппа группы* A *и*

$$B = C + D. \tag{1}$$

Тогда имеет место прямое разложение

$$A \cap B = C + A \cap D. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть x — произвольный элемент пересечения $A \cap B$. В силу (1) $x = c + d$, где $c\in C$, $d\in D$ и, следовательно, $d = (x - c) \in A$, $d \in A \cap D$. Таким образом, элемент x является суммой элементов c и d, принадлежащих соответственно подгруппам C и $A \cap D$. Следовательно, группа $A \cap B$ порождается подгруппами C и $A \cap D$. Кроме того, принимая во внимание (1), не трудно видеть, что C и $A \cap D$ — нормальные подгруппы группы $A \cap B$, пересечение которых содержит только нулевой элемент группы. Поэтому имеет место прямое разложение (2).

§ 4

(4,1). Теорема. *Для того чтобы прямое разложение группы обладало общим продолжением с любым другим прямым разложением группы, необходимо и достаточно, чтобы каждое прямое слагаемое этого разложения было допустимым относительно множества всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы* G.

Доказательство. 1°. Докажем достаточность условия. Пусть

$$G = \sum_{\alpha \in M} H_\alpha \tag{H}$$

прямое разложение группы G, каждое прямое слагаемое которого допустимо относительно множества Ω всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы G, и

$$G = \sum_{k \in \Gamma} F_k \tag{F}$$

любое другое прямое разложение группы G. Так как группа H_α допустима относительно множества эндоморфизмов Ω, она допустима также относительно множества Ω_F нормальных идемпотентных эндоморфизмов, соответствующих разложению (F). Следовательно, в силу (3,2) имеет место прямое разложение

$$H_\alpha = \sum_{k \in \Gamma} (F_k \cap H_\alpha) \qquad (\alpha \in M). \tag{1}$$

Заменяя в разложении (H) каждое прямое слагаемое H_α по формуле (1), получим прямое разложение

$$G = \sum_{\substack{k \in \Gamma \\ \alpha \in M}} (F_k \cap H_\alpha),$$

которое, очевидно, является общим продолжением разложений (H) и (F). Таким образом, условие теоремы является достаточным.

2°. Докажем необходимость условия. Пусть

$$G = \sum_{i \in N} H_i \tag{2}$$

прямое разложение группы G, обладающее общим продолжением с любым другим прямым разложением группы G. Докажем, что каждое прямое слагаемое H_i разложения (2) является допустимым относительно множества Ω всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы G. Пусть $\psi \in \Omega$, e — тождественный автоморфизм группы G и $\overline{\psi} = e - \psi$. Положим $F_1 = \psi G$, $F_2 = \psi G$. Тогда, как известно, имеет место прямое разложение

$$G = F_1 + F_2, \tag{3}$$

причем ψ и $\overline{\psi}$ будут, очевидно, идемпотентными эндоморфизмами группы G, соответствующими разложению (3).

Разложения (2) и (3) обладают общим продолжением, поскольку разложение (2) обладает общим продолжением с любым другим прямым разложением группы G. Пусть

$$G = \sum_{n \in Q} C_n \tag{4}$$

общее продолжение разложений (2) и (3). Обозначим через Z_{ki} прямую сумму всех тех слагаемых C_n разложения (4), которые содержатся в пересечении $F_k \cap H_i$. Тогда, поскольку разложение (4) является продолжением разложений (2), (3), имеет место прямое разложение

$$H = Z_{1i} + Z_{2i} \qquad (i \in N). \tag{5}$$

Кроме того, из определения Z_{ki} следует, что

$$Z_{1i} \subset F_1 \cap H_i, \quad Z_{2i} \subset F_2 \cap H_i \qquad (i \in N).$$

Отсюда, принимая во внимание (3), получим

$$Z_{1i} + Z_{2i} \subset F_1 \cap H_i + F_2 \cap H_i \qquad (i \in N) \tag{6}$$

На основании (5), (6) заключаем, что имеет место прямое разложение

$$H_i = F_1 \cap H_i + F_2 \cap H_i. \qquad (i \in N). \tag{7}$$

Теперь, поскольку ψ — нормальный идемпотентный эндоморфизм, соответствующий прямому слагаемому F_1 разложения (3), из (7), в силу (3,2), следует, что каждое слагаемое H_i разложения (2) является допустимым относительно эндоморфизма ψ. Этим доказано, что каждое прямое слагаемое разложения (2) является допустимым относительно множества эндоморфизмов Ω. Таким образом, условие теоремы является также необходимым. Теорема доказана.

Курошем и Фиттингом были доказаны следующие две теоремы[1]:

1. *Прямое разложение группы G,*

$$G = \sum_{\alpha \in M} A_\alpha$$

тогда, и только тогда, обладает общим продолжением с любым другим прямым разложением этой группы, если все слагаемые A_α являются характеристическими (допустимыми) относительно множества нормальных автоморфизмов группы G.

2. *Прямое слагаемое группы G, допустимое (характеристическое) относительно множества всех нормальных автоморфизмов этой группы, является допустимым также относительно множества всех нормальных эндоморфизмов группы G.*

Следствием этих двух теорем и теоремы (4,1) является следующее предложение:

(4,2). *Для того чтобы прямое слагаемое группы было допустимым (характеристическим) относительно множества всех нормальных эндоморфизмов или множества всех нормальных автоморфизмов группы, необходимо и достаточно, чтобы оно было допустимым относительно множества всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов этой группы.*

На основании (4,2) заключаем, что имеет место следующее предложение:

(4,3). *Прямое разложение группы тогда, и только тогда, будет частично упорядоченным относительно множества всех нормальных эндоморфизмов или множества всех нормальных автоморфизмов группы, когда оно является частично упорядоченным относительно множества всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов этой группы.*

---

[1] А. Г. Курош, Об абсолютной единственности разложения группы в прямом произведении, Мат. сб. (нов. с.), 1, 1936, 345—350.

H. Fitting, Über die Existenz gemeinsamer Verfeinerungen bei direkten Produktzerlegungen einer Gruppe, Math. Zeitschr., 41, 1936, 380—395.

(5,1). *Пусть*

$$H=B+S, \tag{a}$$

$$H=\sum_{\nu\in\Gamma} C_\nu+S, \tag{b}$$

два прямых разложения группы H. Положим

$$B_\nu=B\cap(C_\nu+S) \qquad (\nu\in\Gamma). \tag{c}$$

Тогда имеют место следующие соотношения:

$$B_\nu+S=C_\nu+S \qquad (\nu\in\Gamma), \tag{d}$$

$$B=\sum_{\nu\in\Gamma} B_\nu. \tag{e}$$

Доказательство. На основании (a), (b) заключаем, что

$$C_\nu+S\subset B+S \qquad (\nu\in\Gamma),$$

откуда в силу (3,10) следует равенство

$$C_\nu+S=B\cap(C_\nu+S)+S$$

или в силу (c) $C_\nu+S=B_\nu+S$, т. е. имеет место соотношение (d).

В силу (c)

$$[\bigcup_{\nu\in\Gamma} B_\nu]\subset B, \tag{1}$$

отсюда и из (a) следует соотношение

$$[\bigcup_{\nu\in\Gamma} B_\nu]\cap S=\{0\}. \tag{2}$$

На основании (a) и (b) заключаем, что

$$B_\nu\cap[\bigcup_{\mu\in\Gamma\setminus\{\nu\}} B_\mu]\subset(C_\nu+S)\cap(\sum_{\mu\in\Gamma\setminus\{\nu\}} C_\mu+S)=S,$$

откуда в силу (2) следует соотношение

$$B_\nu\cap[\bigcup_{\mu\in\Gamma\setminus\{\nu\}} B_\mu]=\{0\}. \tag{3}$$

Далее, в силу (b) и (d)

$$H=[\bigcup_{\nu\in\Gamma} B_\nu,\ S]. \tag{4}$$

Из равенства (c), определяющего B_ν, следует, что B_ν является нормальной подгруппой группы H, $\nu\in\Gamma$. Поэтому на основании (2), (3), (4) заключаем, что имеет место прямое разложение

$$H=\sum_{\nu\in\Gamma} B_\nu+S. \tag{5}$$

Наконец, из соотношений (a), (1), (5) следует равенство (e).

(5,2). *Пусть*

$$G=\sum_{\alpha\in M} D_\alpha \tag{D}$$

прямое разложение группы G, согласованное с разложением

$$G=\sum_{\nu\in N} A_\nu. \tag{A}$$

Введем следующие обозначения:

$\bar{D}_\alpha$ — *наименьшая группа из множества* $\Delta(\mathrm{D}, \Omega_{\mathrm{A}})$, *содержащая* D_α;

$\check{D}_\alpha$ — *наибольшая подгруппа группы* $\bar{D}_\alpha$, *принадлежащая множеству* $\Delta(\mathrm{D}, \Omega_{\mathrm{A}})$ *и не содержащая* D_ν;

$E_{(\alpha,\nu)}$ — *компонента группы* $A_\nu \cap \bar{D}_\alpha$ *в прямом слагаемом* D_α *разложения* (D).

Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\bar{D}_\alpha = D_\alpha + \check{D}_\alpha \qquad (\alpha \in M), \tag{a}$$

$$\bar{D}_\alpha = \sum_{\nu \in N} (A_\nu \cap \bar{D}_\alpha) \qquad (\alpha \in M), \tag{b}$$

$$\check{D}_\alpha = \sum_{\nu \in N} (A_\nu \cap \check{D}_\alpha) \qquad (\alpha \in M), \tag{c}$$

$$A_\nu \cap \bar{D}_\alpha = C_{(\alpha,\nu)} + A_\nu \cap \check{D}_\alpha, \qquad (\nu \in N,\ \alpha \in M), \tag{d}$$

где

$$C_{(\alpha,\nu)} = A_\nu \cap \Big(D_\alpha + \sum_{\gamma \in N \setminus \{\nu\}} (A_\gamma \cap \check{D}_\alpha)\Big),$$

$$E_{(\alpha,\nu)} = D_\alpha \cap [\, A_\nu \cap \bar{D}_\alpha,\ \check{D}_\alpha\,], \tag{e}$$

$$E_{(\alpha,\nu)} = D_\alpha \cap (C_{(\alpha,\nu)} + \check{D}_\alpha), \tag{f}$$

$$E_{(\alpha,\nu)} + \check{D}_\alpha = C_{(\alpha,\nu)} + \check{D}_\alpha, \tag{g}$$

$$D_\alpha = \sum_{\nu \in N_\alpha} E_{(\alpha,\nu)},$$

где

$$N_\alpha = \mathop{\mathrm{E}}_{\nu}\ (\nu \in N,\ E_{(\alpha,\nu)} \neq [0]), \tag{h}$$

$$[A_\nu \cap \bar{D}_\alpha,\ \check{D}_\alpha] = E_{(\alpha,\nu)} + \check{D}_\alpha. \tag{i}$$

Доказательство. По условию разложение (D) согласовано с разложением (A). Поэтому имеют место соотношения (a), (b), (c). Действительно, (a) имеет место в силу (1,6), соотношения (b) и (c) — в силу (3,4).

Из (a) и (c) следует равенство

$$\bar{D}_\alpha = D_\alpha + \sum_{\gamma \in N} (A_\gamma \cap \check{D}_\alpha),$$

которое можно записать в виде

$$\bar{D}_\alpha = A_\nu \cap \check{D}_\alpha + D_\alpha + \sum_{\gamma \in N \setminus \{\nu\}} (A_\gamma \cap \check{D}_\alpha). \tag{1}$$

Теперь, из (1) в силу (3,10) следует соотношение (d).

Отметим, что $A_\nu \cap D_\alpha \subset D_\alpha$ и $\check{D}_\alpha$ является прямой суммой некоторого множества прямых слагаемых разложения (D). Поэтому, принимая во внимание определение группы $E_{(\alpha,\nu)}$, мы можем утверждать, что $E_{(\alpha,\nu)}$ является также компонентой группы $A_\nu \cap \bar{D}_\alpha$ в прямом слагаемом D_α разложения $\bar{D}_\alpha = D_\alpha + \check{D}_\alpha$ и, значит, имеет место соотношение (e).

На основании равенства (d) и соотношений (a), (b) заключаем, что

$$[A_\nu \cap \bar{D}_\alpha,\ \check{D}_\alpha] = C_{(\alpha,\nu)} + \check{D}_\alpha. \tag{2}$$

Сопоставляя (e) и (2), получим соотношение (f).

Заменяя в соотношении (b) каждое прямое слагаемое $A_\nu \cap \bar{D}_\alpha$ на основании формулы (d), получим

$$\bar{D}_\alpha = \sum_{\nu \in N} C_{(\alpha,\nu)} + \sum_{\nu \in N} (A_\nu \cap \check{D}_\alpha). \tag{3}$$

Воспользуемся теперь предложением (5,1), заменив в нем H, B, S, C_ν, Γ соответственно через $\bar{D}_\alpha$, D_α, $\check{D}_\alpha$, $C_{(\alpha,\nu)}$, N. Согласно предложению (5,1) из соотношений (a), (3), (f) следуют соотношения (g) и

$$\bar{D}_\alpha = \sum_{\nu \in N} E_{(\alpha,\nu)}. \tag{4}$$

Исключая теперь в разложении (4) прямые слагаемые, являющиеся нулевыми группами, получим соотношение (h).

Наконец, сопоставляя соотношения (2) и (g), получим соотношение (i).

(5,3). *Если разложение*

$$G = \sum_{\alpha \in M} D_\alpha \tag{D}$$

согласовано с разложением

$$G = \sum_{\nu \in N} A_\nu, \tag{A}$$

то компонента группы $A_\nu \cap \bar{D}_\alpha$ в прямом слагаемом D_α разложения (D) *является нулевой группой тогда, и только тогда, когда $A_\nu \cap \bar{D}_\alpha \subset \check{D}_\alpha$.*

Доказательство. Предположим, что разложение (D) согласовано с разложением (A). Тогда в силу (5,2 i) компонента $E_{(\alpha,\nu)}$ группы $A_\nu \cap D_\alpha$ в прямом слагаемом D_α разложения (D) удовлетворяет соотношению

$$[A_\nu \cap \bar{D}_\alpha,\ \check{D}_\alpha] = E_{(\alpha,\nu)} + \check{D}_\alpha.$$

Это соотношение показывает, что $E_{(\alpha,\nu)}$ тогда, и только тогда, будет нулевой группой, когда $A_\nu \cap \bar{D}_\alpha \subset \check{D}_\alpha$.

(5.4). Определение. Пусть A — подгруппа группы G,

$$G = \sum_{\lambda \in L} E_\lambda \tag{E}$$

прямое разложение группы G и Ω — какое-либо множество эндоморфизмов группы G. Символом $S(A, \mathrm{E}, \Omega)$ будем обозначать множество

$$\mathop{\mathrm{E}}_{\lambda} (A \cap \bar{E}_\lambda \not\subset \check{E}_\lambda,\ \lambda \in L),$$

где $\bar{E}_\lambda$ — наименьшая подгруппа из множества $\Delta(\mathrm{E}, \Omega)$, содержащая E_λ, и $\check{E}_\lambda$ — наименьшая подгруппа группы $\bar{E}_\lambda$, принадлежащая $\Delta(\mathrm{E}, \Omega)$ и не содержащая E_λ.

(5,5). *Пусть*

$$G = \sum_{\lambda \in L} E_\lambda \tag{E}$$

прямое разложение группы G, согласованное с разложением

$$G = \sum_{\nu \in N} A_\nu. \tag{A}$$

Тогда имеет место соотношение

$$L = \bigcup_{\nu \in N} S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}}). \tag{a}$$

Доказательство. Допустим, что соотношение (a) не имеет места. Тогда существует индекс $\lambda \in L$, удовлетворяющий соотношению

$$A_\nu \cap \overline{E}_\lambda \subset \check{E}_\lambda \qquad (\nu \in N). \tag{1}$$

По условию разложение (E) согласовано с разложением (A), следовательно, в силу (3,4)

$$\overline{E}_\lambda = \sum_{\nu \in N} (A_\nu \cap \overline{E}_\lambda), \tag{2}$$

$$\check{E}_\lambda = \sum_{\nu \in N} (A_\nu \cap \check{E}_\lambda). \tag{3}$$

Сопоставляя (1), (2), (3), получим

$$\overline{E}_\lambda = \check{E}_\lambda,$$

что невозможно, поскольку $E_\lambda \subset \overline{E}_\lambda$ и $\check{E}_\lambda$ не содержит E_λ. Этим доказано, что имеет место соотношение (a).

(5,6). *Пусть*

$$G = \sum_{\lambda \in L} E_\lambda \tag{E}$$

прямое разложение группы G, согласованное с разложением

$$G = \sum_{\nu \in N} A_\nu. \tag{A}$$

Тогда эквивалентны следующие два свойства разложения (E):

(a) *Для каждого $\lambda \in L$ существует не больше одного прямого слагаемого A_ν разложения* (A), *для которого компонента группы $A_\nu \cap E_\lambda$ в прямом слагаемом E_λ разложения* (E) *является ненулевой группой.*

(b) *Для каждого $\lambda \in L$ существует не больше одного прямого слагаемого A_ν разложения* (A), *удовлетворяющего соотношению*

$$A_\nu \cap \overline{E}_\lambda \,\overline{\subset}\, \check{E}_\lambda$$

или, другими словами, при $\nu \neq \gamma$, ν, $\gamma \in N$, множества $S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})$ и $S(A_\gamma, \mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})$ не пересекаются.

Это предложение непосредственно следует из предложения (5,3).

(5,7). Определение. Пусть

$$G = \sum_{\lambda \in L} E_\lambda, \tag{E}$$

$$G = \sum_{\nu \in N} A_\nu \tag{A}$$

два прямых разложения группы G. Разложение (E) будем называть вполне согласованным с разложением (A), если оно согласовано с (A) и обладает хотя бы одним из свойств (a) или (b) предложения (5,6).

(5,8). *Пусть*

$$G = \sum_{\lambda \in L} E_\lambda \tag{E}$$

прямое разложение группы G, вполне согласованное с разложением

$$G = \sum_{\nu \in N} A_\nu. \tag{A}$$

Тогда имеют место соотношения:

$$L = \cup\, S(A_\nu,\ \mathrm{E},\ \Omega_{\mathrm{A}}), \tag{a}$$

$$S(A_\nu,\ \mathrm{E},\ \Omega_{\mathrm{A}}) \cap S(A_\gamma,\ \mathrm{E},\ \Omega_{\mathrm{A}}) = \varDelta \qquad (\nu \neq \gamma,\ \nu,\ \gamma \in N), \tag{b}$$

где $\varDelta$ *— пустое множество. Таким образом, существует однозначное отображение множества L на множество N, ставящее в соответствие элементу* $\lambda \in L$ *тот единственный элемент* $\nu \in N$, *для которого имеет место соотношение*

$$\lambda \in S(A_\nu,\ \mathrm{E},\ \Omega_{\mathrm{A}}).$$

Это отображение будем обозначать символом ϱ.

Доказательство. По условию разложение (E) вполне согласовано с разложением (A). Поэтому имеют место соотношения (a) и (b). Действительно, (a) имеет место в силу (5,5), соотношение (b) имеет место в силу определения (5,7). Существование отображения ϱ теперь следует из соотношений (a) и (b).

(5,9). *Пусть*

$$G = \sum_{\lambda \in L} E_\lambda \tag{E}$$

прямое разложение группы G, вполне согласованное с разложением

$$G = \sum_{\nu \in N} A_\nu. \tag{A}$$

Тогда имеют место следующие соотношения:

$$A_{\varrho(\lambda)} \cap \overline{E}_\lambda \bar{\subset} \check{E}_\lambda \qquad (\lambda \in L), \tag{a}$$

$$A_\nu \cap \overline{E}_\lambda \subset \check{E}_\lambda \qquad (\nu \neq \varrho(\lambda),\ \nu \in N,\ \lambda \subset L), \tag{b}$$

$$A_{\varrho(\lambda)} \cap \overline{E}_\lambda \neq A_{\varrho(\lambda)} \cap \check{E}_\lambda \qquad (\lambda \in L), \tag{c}$$

$$A_\nu \cap \overline{E}_\lambda = A_\nu \cap \check{E}_\lambda \qquad (\nu \neq \varrho(\lambda),\ \nu \in N,\ \lambda \in L). \tag{d}$$

Доказательство. Согласно определению отображения ϱ

$$\lambda \in S(A_{\varrho(\lambda)},\ \mathrm{E},\ \Omega_{\mathrm{A}}) \qquad (\lambda \in L), \tag{1}$$

$$\lambda \bar{\in} S(A_\nu,\ \mathrm{E},\ \Omega_{\mathrm{A}}) \qquad (\nu \neq \varrho(\lambda),\ \nu \in N,\ \lambda \in L). \tag{2}$$

Принимая во внимание определение (5,4), легко видеть, что соотношения (a), (b) следуют соответственно из (1), (2). Соотношение (c) следует, очевидно, из соотношения (a). Наконец, в силу (b)

$$A_\nu \cap \overline{E}_\lambda \subset A_\nu \cap \check{E}_\lambda \qquad (\nu \neq \varrho(\lambda),\ \nu \in N,\ \lambda \in L),$$

откуда, поскольку $\check{E}_\lambda \subset \overline{E}_\lambda$, следует соотношение (d).

(5,10). Теорема. *Пусть*

$$G=\sum_{\alpha\in M} D_\alpha \tag{D}$$

прямое разложение группы G, согласованное с разложением

$$G=\sum_{\nu\in N} A_\nu. \tag{A}$$

Обозначим через L множество всех упорядоченных пар (α, ν), $\alpha\in M$, $\nu\in N$, *для которых компонента* $E_{(\alpha,\nu)}$ *группы* $A_\nu\cap\bar{D}_\alpha$ *в прямом слагаемом* D_α *разложения* (D) *отлична от нуля. Тогда имеет место прямое разложение*

$$G=\sum_{\lambda\in L} E_\lambda, \tag{E}$$

которое является продолжением разложения (D) *и вполне согласовано с разложением* (A).

Доказательство. 1°. Легко видеть, что имеет место разложение (E). Действительно, в силу (5,2 h)

$$D_\alpha=\sum_{\lambda\in L^{(\alpha)}} E_\lambda, \tag{1}$$

где $L^{(\alpha)}$ — множество тех пар $(\gamma, \nu)\in L$, у которых первый индекс γ фиксирован и равен α. Из определения L следует, что

$$L=\bigcup_{\alpha\in M} L^{(\alpha)}. \tag{2}$$

Заменяя теперь в разложении (D) каждое прямое слагаемое D_α на основании равенства (1) прямой суммой группы E_λ и принимая во внимание (2), получим прямое разложение (E), которое, очевидно, является продолжением разложения (D).

2°. Докажем, что разложение (E) согласовано с разложением (A). Не трудно видеть, что

$$\Delta(\mathrm{D}, \Omega_\mathrm{A})\subset\Delta(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A}). \tag{3}$$

Это соотношение имеет место потому, что разложение (E) является продолжением разложения (D).

Пусть $E_{(\alpha,\nu)}$ и $E_{(\alpha_1,\nu_1)}$ — два различных прямых слагаемых разложения (E). Докажем, что существует принадлежащая множеству $\Delta(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$ группа, содержащая одно из этих прямых слагаемых и не содержащая другого.

1 случай. $\bar{D}_{\alpha_1}\subset\check{D}_\alpha$. В этом случае, поскольку $E_{(\alpha_1,\nu_1)}\subset D_{\alpha_1}\subset\bar{D}_{\alpha_1}$, имеем

$$E_{(\alpha_1,\nu_1)}\subset\check{D}_\alpha. \tag{4}$$

Принимая во внимание, что $E_{(\alpha,\nu)}$ — ненулевая подгруппа группы D_α и $\bar{D}_\alpha=D_\alpha+\check{D}_\alpha$, заключаем, что

$$E_{(\alpha,\nu)}\bar{\subset}\check{D}_\alpha. \tag{5}$$

Далее, поскольку $\check{D}_\alpha\in\Delta(\mathrm{D}, \Omega_\mathrm{A})$, в силу (3) имеем

$$\check{D}_\alpha\in\Delta(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A}). \tag{6}$$

Соотношения (4), (5), (6) показывают, что $\check{D}_\alpha$ является искомой группой, содержащей $E_{(\alpha_1,\nu_1)}$ и не содержащей $E_{(\alpha,\nu)}$.

2 случай. $\bar{D}_\alpha \subset \check{D}_{\alpha_1}$. Так же, как и в первом случае, убеждаемся в том, что $\check{D}_{\alpha_1}$ является искомой группой.

3 случай. $\bar{D}_{\alpha_1} \bar{\subset} \check{D}_\alpha$ и $D_\alpha \bar{\subset} \check{D}_{\alpha_1}$. В этом случае, очевидно, имеет место равенство

$$D_{\alpha_1} \cap D_\alpha = \{0\} \qquad \text{при } \alpha_1 \neq \alpha,$$

откуда, поскольку $E_{(\alpha_1,\nu_1)} \subset D_{\alpha_1}$ и $E_{(\alpha,\nu)} \subset D_\alpha$, следует соотношение

$$E_{(\alpha_1,\nu_1)} \cap (E_{(\alpha,\nu)} \dotplus \check{D}_\alpha) = \{0\}. \tag{7}$$

Используя соотношение (1), покажем, что соотношение (2) имеет место также при $\alpha_1 = \alpha$. Группы $E_{(\alpha,\nu)}$ и $E_{(\alpha_1,\nu_1)}$, $\nu \neq \nu_1$, суть различные прямые слагаемые разложения (1). Поэтому, обозначая через B сумму прямых слагаемых разложения (1), отличных от $E_{(\alpha,\nu)}$ и $E_{(\alpha_1,\nu_1)}$, получим

$$D_\alpha = E_{(\alpha_1,\nu_1)} \dotplus E_{(\alpha,\nu)} \dotplus B. \tag{8}$$

Так как $\bar{D}_\alpha = D_\alpha \dotplus \check{D}_\alpha$, из (8) следует равенство

$$\bar{D}_\alpha = E_{(\alpha,\nu_1)} \dotplus (E_{(\alpha,\nu)} \dotplus \check{D}_\alpha) \dotplus B,$$

которое показывает, что соотношение (7) имеет место также при $\alpha_1 = \alpha$. Поскольку $E_{(\alpha,\nu)}$ — ненулевая группа, на основании (7) заключаем, что

$$E_{(\alpha_1,\nu_1)} \bar{\subset} (E_{(\alpha,\nu)} \dotplus \check{D}_\alpha). \tag{9}$$

Докажем, что

$$(E_{(\alpha,\nu)} \dotplus \check{D}_\alpha) \in \Delta(\mathrm{E},\ \Omega_\mathrm{A}) \tag{10}$$

Группа $A_\nu \cap \bar{D}_\alpha$ допустима относительно Ω_A, поскольку она является подгруппой прямого слагаемого A_ν разложения (A). Группа $\check{D}_\alpha$ также допустима относительно Ω_A, поскольку $\check{D}_\alpha \in \Delta(\mathrm{D},\ \Omega_\mathrm{A})$. Кроме того, в силу (5,2i)

$$E_{(\alpha,\nu)} \dotplus \check{D}_\alpha = [A_\nu \cap \bar{D}_\alpha,\ \check{D}_\alpha].$$

Следовательно, группа $(E_{(\alpha,\nu)} \dotplus \check{D}_\alpha)$ также допустима относительно Ω_A.

Группа $(E_{(\alpha,\nu)} \dotplus \check{D}_\alpha)$ является прямой суммой некоторого множества прямых слагаемых E_λ разложения (E). Это следует из того, что $\check{D}_\alpha$ есть прямая сумма некоторого множества прямых слагаемых разложения (D) и каждое прямое слагаемое разложения (D) в силу (1) является прямой суммой слагаемых E_λ разложения (E). Таким образом, имеет место соотношение (10).

Теперь соотношения (9) и (10) показывают, что $E_{(\alpha,\nu)} \dotplus \check{D}_\alpha$ является искомой группой из множества $\Delta(\mathrm{E},\ \Omega_\mathrm{A})$, содержащей прямое слагаемое $E_{(\alpha,\nu)}$ и не содержащей $E_{(\alpha_1,\nu_1)}$.

Таким образом, доказано, что разложение (E) согласовано с разложением (A).

3°. Докажем, что разложение (E) вполне согласовано с разложением (A).

Согласно определению группы $E_{(\alpha,\nu)}$

$$E_{(\alpha,\nu)} \subset D_\alpha \qquad (\alpha \in M,\ \nu \in N). \tag{11}$$

Группа $\overline{E}_{(\alpha,\nu)}$ есть наименьшая группа, принадлежащая $\mathrm{D}(\mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})$ и содержащая $E_{(\alpha,\nu)}$. Но группа $\overline{D}_\alpha$ в силу (3) также принадлежит $\mathrm{D}(\mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})$ и согласно (11) содержит $E_{(\alpha,\nu)}$. Поэтому

$$\overline{E}_{(\alpha,\nu)} \subset \overline{D}_\alpha,$$

откуда

$$A_\beta \cap E_{(\alpha,\nu)} \subset A_\beta \cap \overline{D}_\alpha. \tag{12}$$

Пусть $E_{(\alpha,\nu)}=E_\lambda$ — произвольное прямое слагаемое разложения (E). Обозначим через $C_{\lambda,\beta}$ компоненту группы $A_\beta \cap \overline{E}_{(\alpha,\nu)}$, $\beta \in N$ в прямом слагаемом $E_{(\alpha,\nu)}$ разложения (E). Символом $E_{(\alpha,\beta)}$ мы прежде обозначили компоненту группы $A_\beta \cap \overline{D}_\alpha$ в прямом слагаемом D_α разложения (D). Принимая во внимание, что разложение (E) является продолжением разложения (D), мы на основании (11), (12) заключаем, что

$$C_{\lambda,\beta} \subset E_{(\alpha,\beta)} \qquad (\lambda \in L,\ \alpha \in M,\ \beta \in N). \tag{13}$$

Легко видеть, что

$$E_{(\alpha,\nu)} \cap E_{(\alpha,\beta)}=\{0\} \qquad (\alpha \in M,\ \beta \neq \nu,\ \beta \in N). \tag{14}$$

Действительно, если $(\alpha, \beta) \,\overline{\in}\, L$, то согласно определению множества L $E_{(\alpha,\beta)}$ является нулевой группой. Если же $(\alpha, \beta) \in L$ и $\beta \neq \alpha$, то соотношение (14) также имеет место, поскольку $E_{(\alpha,\nu)}$ и $E_{(\alpha,\beta)}$ в этом случае будут различными прямыми слагаемыми разложения (E). Принимая во внимание, что $C_{\lambda,\beta} \subset E_{(\alpha,\nu)}$, мы на основании (13), (14) заключаем, что

$$C_{\lambda,\beta} = \{0\} \qquad (\lambda \in L,\ \beta \in N,\ \beta \neq \nu). \tag{15}$$

Соотношение (15) показывает, что компонента группы $A_\beta \cap \overline{E}_{(\alpha,\nu)}$ в прямом слагаемом $E_{(\alpha,\nu)}$ разложения (E), $(\alpha, \nu) \in L$ является нулевой группой для всякого $\beta \in N$, отличного от ν. Этим доказано, что разложение (E) вполне согласовано с разложением (D).

(5,11). *Пусть*

$$G=\sum_{\lambda \in L} E_\lambda \tag{E}$$

прямое разложение группы G, вполне согласованное с разложением

$$G=\sum_{\nu \in N} A_\nu. \tag{A}$$

Введем следующие обозначения:

C_λ — *компонента группы* E_λ *в прямом слагаемом* $A_{\varrho(\lambda)}$ *разложения* (A);

$\overline{E}_\lambda$ — *наименьшая группа из множества* $\Delta(\mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})$, *содержащая* E_λ;

$\check{E}_\lambda$ — *наибольшая подгруппа группы* $\overline{E}_\lambda$, *принадлежащая множеству* $\Delta(\mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})$ *и не содержащая* E_λ;

$$H_\Gamma=\sum_{\lambda \in \Gamma} E_\lambda.$$

Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\overline{E}_\lambda = E_\lambda + \check{E}_\lambda \qquad (\lambda \in L), \tag{a}$$

$$H = \sum_{\nu \in N} (A_\nu \cap H) \qquad (H \in \Delta(\mathrm{E},\ \Omega_\mathrm{A})), \tag{b}$$

$$H_P = \sum_{\nu \in N} (A_\nu \cap H_P) \qquad (P \in Z), \tag{c}$$

$$\overline{E}_\lambda = \sum_{\nu \in N} (A_\nu \cap \overline{E}_\lambda) \qquad (\lambda \in L), \tag{d}$$

$$\check{E}_\lambda = \sum_{\nu \in N} (A_\nu \cap \check{E}_\lambda) \qquad (\lambda \in L), \tag{e}$$

$$\overline{E}_\lambda = [A_{\varrho(\lambda)} \cap \overline{E}_\lambda,\ \check{E}_\lambda] \qquad (\lambda \in L), \tag{f}$$

$$C_\lambda = A_{\varrho(\lambda)} \cap [E_\lambda,\ \sum_{\nu \in N \setminus \{\varrho(\lambda)\}} (A_\nu)] \qquad (\lambda \in L), \tag{g}$$

$$C_\lambda = A_{\varrho(\lambda)} \cap (E_\lambda + \sum_{\nu \in N \setminus \{\varrho(\lambda)\}} (A_\nu \cap \check{E}_\lambda)) \qquad (\lambda \in L), \tag{h}$$

$$A_{\varrho(\lambda)} \cap \overline{E}_\lambda = C_\lambda + A_{\varrho(\lambda)} \cap \check{E}_\lambda \qquad (\lambda \in L), \tag{i}$$

$$C_\lambda + \check{E}_\lambda = E_\lambda + \check{E}_\lambda \qquad (\lambda \in L), \tag{j}$$

$$[A_{\varrho(\lambda)} \cap \overline{E}_\lambda,\ \check{E}_\lambda] = C_\lambda + \check{E}_\lambda \qquad (\lambda \in L). \tag{k}$$

Доказательство. Согласно условию разложение (E) согласовано с разложением (A). Поэтому имеют место соотношения (a)—(e). Действительно, соотношения (a), (b) имеют место соответственно в силу (1,6) и (3,3). Соотношение (c) следует из (b) в силу (2,5). Равенства (d) и (e) суть частные случаи соотношения (b), поскольку $\overline{E}_\lambda,\ \check{E}_\lambda \in \Delta(\mathrm{E},\ \Omega_\mathrm{A})$.

Согласно (d) имеем

$$\overline{E}_\lambda = A_{\varrho(\lambda)} \cap \overline{E}_\lambda + \sum_{\lambda \in N \setminus \{\varrho(\lambda)\}} (A_\nu \cap \overline{E}_\lambda). \tag{1}$$

Кроме того, в силу (5,9), поскольку разложение (E) согласовано с (A),

$$A_\nu \cap \overline{E}_\lambda = A_\nu \cap \check{E}_\lambda \qquad (\nu \neq \varrho(\lambda),\ \nu \in N), \tag{2}$$

откуда

$$\sum_{\nu \in N \setminus \{\varrho(\lambda)\}} (A_\nu \cap E_\lambda) \subset \check{E}_\lambda. \tag{3}$$

Теперь, поскольку $\check{E}_\lambda \subset \overline{E}_\lambda$, из (1) и (3) следует соотношение (f).

Так как C_λ — компонента группы E_λ в прямом слагаемом $A_{\varrho(\lambda)}$ разложения (A), то имеет место равенство (g). Далее, принимая во внимание, что $E_\lambda \subset \overline{E}_\lambda$ и $A_\nu \cap \overline{E}_\nu \subset A_\nu$, $\nu \in N$, мы, на основании разложений (A) и (d), заключаем, что компонента группы E_λ в прямом слагаемом $A_{\varrho(\lambda)} \cap E_\lambda$ разложения (d) равна C_λ, т. е.

$$C_\lambda = (A_{\varrho(\lambda)} \cap \overline{E}_\lambda) \cap (E_\lambda + \sum_{\nu \in N \setminus \{\varrho(\lambda)\}} (A_\nu \cap \overline{E}_\lambda)),$$

откуда, поскольку $E_\lambda \subset \overline{E}_\lambda$,

$$C_\lambda = A_{\varrho(\lambda)} \cap (E_\lambda + \sum_{\nu \in N \setminus \{\varrho(\lambda)\}} (A_\nu \cap \overline{E}_\lambda)),$$

что в соединении с (2) дает соотношение (h).

Из (a) и (e) следует равенство

$$\bar{E}_\lambda = E_\lambda + \sum_{\nu \in N \setminus \{\varrho(\lambda)\}} A_\nu \cap \check{E}_\lambda$$

или

$$\bar{E}_\lambda = A_{\varrho(\lambda)} \cap \check{E}_\lambda + E_\lambda + \sum_{\nu \in N \setminus \{\varrho(\lambda)\}} A_\nu \cap \check{E}_\lambda,$$

откуда в силу (3,10) получим

$$A_{\varrho(\lambda)} \cap \bar{E}_\lambda = A_{\varrho(\lambda)} \cap \check{E}_\lambda + A_{\varrho(\lambda)} \cap (E_\lambda + \sum_{\nu \in N \setminus \{\varrho(\lambda)\}} A_\nu \cap \check{E}_\lambda). \tag{4}$$

Теперь из (h) и (4) следует соотношение (i).

Далее, на основании (f) и (i) заключаем, что имеет место соотношение (j). Наконец, сопоставляя соотношения (a), (f), (j), получим равенство (k).

(5,12). *Пусть* (D), (A) *и* (E) — *прямые разложения группы* G, *о которых идет речь в теореме* (5,10). *Если подмножество* $S(A_\nu, \mathrm{D}, \Omega_\mathrm{A})$ *частично упорядоченного множества* $L(\mathrm{D}, \Omega_\mathrm{A})$ *удовлетворяет условию минимальности, то этому условию удовлетворяет также подмножество* $S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$ *частично упорядоченного множества* $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$. *Кроме того, если частично упорядоченное множество* $L(\mathrm{D}, \Omega_\mathrm{A})$ *удовлетворяет условию минимальности, то этому условию удовлетворяет также частично упорядоченное множество* $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$.

Доказательство. 1°. Пусть (α, i) и (α, k) — два различных элемента из L, $i \neq k$. Докажем, что (α, i) и (α, k), рассматриваемые как элементы $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$, несравнимы.

Так как $E_{(\alpha, i)}$ и $E_{(\alpha, k)}$ — два различных прямых слагаемых разложения (E), то

$$E_{(\alpha, i)} \cap E_{(\alpha, k)} = \{0\}. \tag{1}$$

Кроме того, поскольку $\check{E}_{(\alpha, k)} \subset D_\alpha$,

$$E_{(\alpha, i)} \cap \check{E}_{(\alpha, k)} = \{0\}. \tag{2}$$

Так как в силу (5,11a) $\bar{E}_{(\alpha, k)} = E_{(\alpha, k)} + \check{E}_{(\alpha, k)}$, то на основании (1), (2) заключаем, что

$$E_{(\alpha, i)} \cap \bar{E}_{(\alpha, k)} = \{0\} \qquad (i \neq k). \tag{3}$$

Аналогично убеждаемся в том, что

$$E_{(\alpha, k)} \cap \bar{E}_{(\alpha, i)} = \{0\} \qquad (i \neq k). \tag{4}$$

Равенства (3) и (4) показывают, что элементы (α, i) и (α, k) частично упорядоченного множества $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$ несравнимы.

2°. Докажем, что из соотношения

$$(\alpha, i) < (\beta, k) \qquad ((\alpha, i), (\beta, k) \in L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})) \tag{5}$$

следует соотношение

$$\alpha < \beta \qquad (\alpha, \beta \in L(\mathrm{D}, \Omega_\mathrm{A})) \tag{6}$$

В силу (5)

$$E_{(\alpha, i)} \subset \bar{E}_{(\beta, k)}. \tag{7}$$

Из (7), поскольку $\bar{E}_{(\beta, k)} \subset \bar{D}_\beta$, следует соотношение

$$E_{(\alpha, i)} \subset \bar{D}_\beta. \tag{8}$$

Так как $E_{(\alpha, i)} \subset D_\alpha$, то на основании (8) заключаем, что

$$D_\alpha \subset \overline{D}_\beta,$$

откуда

$$\alpha \leqslant \beta \qquad (\alpha, \beta \in L(\mathrm{D}, \Omega_\mathrm{A})). \tag{9}$$

Если $\alpha = \beta$, то, по доказанному в пункте 1°, элементы (α, i) и (β, k) будут несравнимы. Но мы предполагаем, что имеет место (5). Поэтому

$$\alpha \neq \beta. \tag{10}$$

Теперь, сопоставляя (9) и (10), получим (6).

3°. Опираясь на доказанное в пункте 2°, легко видеть, что имеет место следующее утверждение:

(a) если β минимальный элемент подмножества $F \subset L(\mathrm{D}, \Omega_\mathrm{A})$ и $(\beta, k) \in L$, то (β, i) является минимальным элементом подмножества $F^* = \underset{(\alpha, \nu)}{\mathrm{E}} ((\alpha, \nu) \in L, \alpha \in F)$ частично упорядоченного множества $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$. Таким образом, если подмножество F удовлетворяет условию минимальности, то этому условию удовлетворяет также подмножество F^*.

4°. На основании утверждения (a) заключаем, что, если частично упорядоченное множество $L(\mathrm{D}, \Omega_\mathrm{A})$ удовлетворяет условию минимальности, то этому условию удовлетворяет также $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$.

5°. Докажем, что имеет место следующее утверждение:

(b) из соотношения

$$(\alpha, i) \in S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A}) \tag{11}$$

следует соотношение

$$\alpha \in S(A_\nu, \mathrm{D}, \Omega_\mathrm{A}). \tag{12}$$

Действительно, если соотношение (12) не имеет места, то

$$A_\nu \cap D_\alpha \subset \check{D}_\alpha$$

и, значит,

$$A_\nu \cap \overline{E}_{(\alpha, i)} \cap \overline{D}_\alpha \subset \overline{E}_{(\alpha, i)} \cap \check{D}_\alpha.$$

Отсюда, поскольку

$$E_{(\alpha, i)} \subset \overline{D}_\alpha \quad \text{и} \quad \overline{E}_{(\alpha, i)} \cap \check{D}_\alpha \subset \check{E}_{(\alpha, i)},$$

получим

$$A_\nu \cap \overline{E}_{(\alpha, i)} \subset \check{E}_{(\alpha, i)},$$

что невозможно, если имеет место (11).

6°. Теперь, на основании утверждений (a) и (b) заключаем, что если подмножество $S(A_\nu, \mathrm{D}, \Omega_\mathrm{A})$ частично упорядоченного множества $L(\mathrm{D}, \Omega_\mathrm{A})$ удовлетворяет условию минимальности, то этому условию удовлетворяет также подмножество $S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$ частично упорядоченного множества $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$.

Таким образом, предложение (5,12) доказано.

(5,13). *Пусть*

$$G = \sum_{\nu \in N} A_\nu \tag{A}$$

разложение группы G в прямую сумму неразложимых подгрупп и

$$G = \sum_{\lambda \in L} E_\lambda \tag{E}$$

прямое разложение группы G, вполне согласованное с разложением (A). *Тогда в разложении* (E) *каждое прямое слагаемое E_λ может быть заме-*

щено прямым слагаемым $A_{\varrho(\lambda)}$ *из разложения* (A) *и, следовательно, разложения* (E) *и* (A) *центрально изоморфны* [1].

Доказательство. Обозначим через C_λ, где $\lambda \in L$, компоненту группы E_λ в прямом слагаемом $A_{\varrho(\lambda)}$ разложения (A). В силу (5,11j)

$$C_\lambda + \check{E}_\lambda = E_\lambda + \check{E}_\lambda \qquad (\lambda \in L). \tag{1}$$

Каждое слагаемое E_λ из разложения (E) является ненулевой группой, поскольку разложение (E) согласовано с разложением (A). Отсюда в силу (1) следует, что C_λ — ненулевая подгруппа группы G. На основании разложений (1) и (E) заключаем, что C_λ является прямым слагаемым группы G. Отсюда, поскольку C_λ — подгруппа группы $A_{\varrho(\lambda)}$, следует, что C_λ является ненулевым прямым слагаемым группы $A_{\varrho(\lambda)}$. Но по условию каждое слагаемое из разложения (A) есть неразложимая группа. Следовательно,

$$C_\lambda = A_{\varrho(\lambda)} \qquad (\lambda \in L). \tag{2}$$

На основании (1) и (2) заключаем, что в разложении (E) каждое слагаемое E_λ может быть замещено прямым слагаемым $A_{\varrho(\lambda)}$ из разложения (A), т. е.

$$G = A_{\beta(\lambda)} + \sum_{\lambda' \in L \setminus \{\lambda\}} E_{\lambda'} = E_\lambda + \sum_{\lambda' \in L \setminus \{\lambda\}} E_{\lambda'} \qquad (\lambda \in L),$$

следовательно, для всякого $\lambda \in L$ группы E_λ и $A_{\varrho(\lambda)}$ центрально изоморфны, и поэтому разложения (E) и (A) центрально изоморфны.

(5,14). Теорема. *Пусть*

$$G = \sum_{\nu \in N} A_\nu \tag{A}$$

разложение группы G *в прямую сумму неразложимых подгрупп и*

$$G = \sum_{\alpha \in M} D_\alpha \tag{D}$$

прямое разложение группы G, *согласованное с разложением* (A). *Тогда разложение* (D) *можно продолжить до разложения, центрально изоморфного разложению* (A).

Эта теорема непосредственно следует из теоремы (5,10) и предложения (5,13).

Частным случаем теоремы (5,14) является следующая теорема:

(5,15). Теорема. *Если даны два разложения группы в прямые суммы неразложимых подгрупп и одно из этих разложений согласовано с другим, то эти разложения центрально изоморфны.*

§ 6

(6,1). Теорема. *Пусть* L — *частично упорядоченное множество,*

$$G = \sum_{\lambda \in L} E_\lambda \tag{E}$$

прямое разложение группы G, F — *подмножество* L, *удовлетворяющее*

[1] См. определение в § 8.

условию минимальности, и $\{C_\lambda\}_{\lambda \in F}$ *— множество подгрупп группы* G, *удовлетворяющих условию*

$$C_\lambda + \sum_{i \in U_\lambda} E_i = \sum_{i \in V_\lambda} E_i \qquad (\lambda \in F), \tag{S}$$

где V_λ *— комбинаторное замыкание элемента* λ *в частично упорядоченном множестве* L *и* $U_\lambda = V_\lambda \setminus \{\lambda\}$. *Тогда для любого замкнутого в* L *подмножества* P *имеет место прямое разложение*

$$\sum_{\lambda \in P} E_\lambda = \sum_{\lambda \in P \cap F} C_\lambda + \sum_{\lambda \in P \setminus F} E_\lambda. \tag{b_P}$$

Доказательство. 1°. Пусть P — замкнутое подмножество L. Обозначим через Ψ совокупность множеств Γ, удовлетворяющих следующим двум условиям:

Γ — замкнутое подмножество L, содержащееся в P, $\qquad (a_\Gamma)$

$$\sum_{\lambda \in \Gamma} E_\lambda = \sum_{\lambda \in \Gamma \cap F} C_\lambda + \sum_{\lambda \in \Gamma \setminus F} E_\lambda. \tag{b_Γ}$$

Не трудно видеть, что сумма возрастающей последовательности множеств, принадлежащих Ψ, также является элементом из Ψ. Поэтому на основании теоремы Куратовского о насыщенных множествах заключаем, что существует в Ψ максимальный элемент T, т. е. такой элемент, что, если $\Gamma \in \Psi$ и $T \subset \Gamma$, то $\Gamma = T$. Таким образом, существует множество T, удовлетворяющее условиям:

T — замкнутое подмножество L, содержащееся в P, $\qquad (a_T)$

$$\sum_{\lambda \in T} E_\lambda = \sum_{\lambda \in T \cap F} C_\lambda + \sum_{\lambda \in T \setminus F} E_\lambda, \tag{b_T}$$

если

$$\Gamma \in \Psi \text{ и } T \subset \Gamma, \text{ то } \Gamma = T. \tag{c_T}$$

Докажем, что $T = P$. Этим теорема будет доказана.

Докажем сначала, что

$$P \cap F \subset T. \tag{1}$$

Допустим, что соотношение (1) не имеет места. Тогда множество $P \cap F \setminus T$ непустое. По условию F удовлетворяет условию максимальности. Поэтому среди элементов множества $P \cap F \setminus T$ существует по крайней мере один минимальный элемент γ. Положим

$$\Delta = T \cup U_\gamma. \tag{2}$$

По условию P замкнуто в L. Следовательно, в силу (2,8) $U_\gamma \subset P$. Отсюда, если принять во внимание определения γ и U_γ, следует, что

$$U_\gamma \cap F \subset T. \tag{3}$$

На основании (2) и (3) заключаем, что

$$\Delta \cap F = T \cap F. \tag{4}$$

Докажем, что $\Delta \in \Psi$. Множество Δ замкнуто в L, так как согласно (1), оно является суммой двух замкнутых множеств. Кроме того, $\Delta \subset P$, так как

$U_\lambda \subset P$ и в силу (a_T) $T \subset P$. Докажем, что Δ удовлетворяет условию (b_Δ). Используя соотношение (b_T), получим

$$\sum_{\lambda \in \Delta} E_\lambda = \sum_{\lambda \in T} E_\lambda + \sum_{\lambda \in \Delta \setminus T} E_\lambda =$$

$$= \sum_{\lambda \in T \cap F} C_\lambda + \sum_{\lambda \in T \setminus F} E_\lambda + \sum_{\lambda \in \Delta \setminus F} E_\lambda = \sum_{\lambda \in T \cap F} C_\lambda + \sum_{\lambda \in \Delta \setminus F} E_\lambda,$$

откуда в силу (4) следует равенство

$$\sum_{\lambda \in \Delta} E_\lambda = \sum_{\lambda \in T \cap F} C_\lambda + \sum_{\lambda \in \Delta \setminus F} E_\lambda,$$

т. е. множество Δ удовлетворяет условию (b_Δ). Этим доказано, что $\Delta \in \Psi$. Кроме того, в силу (2) $T \subset \Delta$. Отсюда в силу (c_T) следует, что

$$\Delta = T.$$

Это равенство и равенство (2) показывают, что

$$U_\gamma \subset T. \tag{5}$$

Положим

$$Q = T \cup \{\gamma\} \tag{6}$$

и докажем, что $Q \in \Psi$. Поскольку $V_\gamma = U_\gamma \cup \{\gamma\}$, из (5) и (6) получаем

$$Q = T \cup V_\gamma.$$

Следовательно, Q является замкнутым подмножеством L, как сумма двух замкнутых множеств. Кроме того, $Q \subset P$, так как $T \subset P$ и $\gamma \in P$. Таким образом, Q удовлетворяет условию (a_Q). Докажем, что Q удовлетворяет условию (b_Q). Так как $\gamma \in P \cap F \setminus T$, то на основании (6) заключаем, что

$$Q \cap F = (T \cap F) \cup \{\gamma\}, \tag{7}$$

$$Q \setminus F = T \setminus F. \tag{8}$$

Используя условие (S) и соотношение (b_T) и замечая, что $\gamma \bar{\in} T$, имеем

$$\sum_{\lambda \in Q} E_\lambda = E_\gamma + \sum_{\lambda \in T} E_\lambda =$$

$$= E_\gamma + \sum_{\lambda \in U_\gamma} E_\lambda + \sum_{\lambda \in T \setminus U_\gamma} E_\lambda = C_\gamma + \sum_{\lambda \in U_\gamma} E_\lambda + \sum_{\lambda \in T \setminus U_\gamma} E_\lambda = C_\gamma + \sum_{\lambda \in T} E_\lambda. \tag{9}$$

Далее, на основании (b_T), (7), (8) заключаем, что

$$C_\gamma + \sum_{\lambda \in T} E_\lambda = C_\gamma + \sum_{\lambda \in T \cap F} C_\lambda + \sum_{\lambda \in T \setminus F} E_\lambda =$$

$$= \sum_{\lambda \in (T \cap F) \cup \{\gamma\}} C_\lambda + \sum_{\lambda \in T \setminus F} E_\lambda = \sum_{\lambda \in Q \cap F} C_\lambda + \sum_{\lambda \in Q \setminus F} E_\lambda,$$

откуда, принимая во внимание (9), получим

$$\sum_{\lambda \in Q} E_\lambda = \sum_{\lambda \in Q \cap F} C_\lambda + \sum_{\lambda \in Q \setminus F} E_\lambda,$$

т. е. Q удовлетворяет условию (b_Q). Таким образом, $Q \in \Psi$ и $T \subset Q$. Отсюда в силу (c_T), следует, что $T = Q$. Но это невозможно, так как $\gamma \in Q$ и $\gamma \bar{\in} T$. Этим доказано, что имеет место соотношение (1).

В силу (1) $P \cap F \subset T \cap F$, откуда, поскольку $T \subset P$,

$$P \cap F = T \cap F. \tag{10}$$

Используя (b_T), получим

$$\sum_{\lambda \in P} E_\lambda = \sum_{\lambda \in T} E_\lambda + \sum_{\lambda \in P \setminus T} E_\lambda =$$

$$= \sum_{\lambda \in T \cap F} C_\lambda + \sum_{\lambda \in T \setminus F} E_\lambda + \sum_{\lambda \in P \setminus T} E_\lambda = \sum_{\lambda \in T \cap F} C_\lambda + \sum_{\lambda \in P \setminus F} E_\lambda,$$

откуда в силу (10)

$$\sum_{\lambda \in P} E_\lambda = \sum_{\lambda \in P \cap F} C_\lambda + \sum_{\lambda \in P \setminus F} E_\lambda,$$

т. е. P удовлетворяет соотношению (b_P). Таким образом, $P \subset \Psi$ и $T \subset P$ и, значит, в силу (c_T) $T = P$, т. е. соотношение (b_T), превращается в искомое прямое разложение (b_P). Теорема доказана.

(6,2). *Пусть*

$$G = \sum_{\lambda \in L} E_\lambda \tag{E}$$

прямое разложение группы G, согласованное с разложением

$$G = \sum_{\nu \in N} A_\nu. \tag{A}$$

Пусть, далее, F — замкнутое подмножество частично упорядоченного множества $L(\mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})$, удовлетворяющее условию минимальности, и $\{C_\lambda\}_{\lambda \in F}$ — множество подгрупп группы G, удовлетворяющих условиям:

$$C_\lambda + \check{E}_\lambda = E_\lambda + \check{E}_\lambda \qquad (\lambda \in F,\ \check{E}_\lambda = V(E_\lambda,\ \mathrm{E},\ \Omega_{\mathrm{A}})), \tag{c}$$

$$C_\lambda \subset A_\nu \qquad (\lambda \in F), \tag{d}$$

ν — фиксированный элемент из N.

Тогда для любого замкнутого подмножества P частично упорядоченного множества $L(\mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})$ имеет место прямое разложение

$$A_\nu \cap H_P = \sum_{\lambda \in P \cap F} C_\lambda + A_\nu \cap H_{P \setminus F}, \tag{e}$$

где $H_P = \sum\limits_{\lambda \in P} E_\lambda$ *и* $H_{P \setminus F} = \sum\limits_{\lambda \in P \setminus F} E_\lambda$.

Доказательство. Пусть P — замкнутое подмножество частично упорядоченного множества $L(\mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})$. Обозначим через V_λ комбинаторное замыкание элемента λ в $L(\mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})$ и положим $U_\lambda = V_\lambda \setminus \{\lambda\}$. Тогда в силу (2,9)

$$\bar{E}_\lambda = \sum_{\alpha \in V_\lambda} E_\alpha, \quad \check{E}_\lambda = \sum_{\alpha \in U_\lambda} E_\alpha.$$

На основании этих равенств условие (c) можно записать в виде

$$C_\lambda + \sum_{\alpha \in U_\lambda} E_\alpha = \sum_{\alpha \in V_\lambda} E_\alpha \qquad (\lambda \in F). \tag{s}$$

Положим в разложении (E) $L=L(\mathrm{E},\ \Omega_{\mathrm{A}})$. По условию множество $\{C_\lambda\}_{\lambda\in F}$ удовлетворяет условию (c) и, значит, также условию (s). Кроме того, F удовлетворяет условию минимальности. Поэтому на основании теоремы (6,1) заключаем, что

$$H_P=\sum_{\lambda\in P\cap F}{}' C_\lambda+H_{P\setminus F}. \tag{1}$$

Далее, в силу условия (d) группа $\sum\limits_{\lambda\in P\cap F}{}' C_\lambda$ является подгруппой группы A_ν. Поэтому из (1) в силу (3,10) следует прямое разложение (e).

(6,3). *Пусть*

$$G=\sum_{\lambda\in L}{}' E_\lambda \tag{E}$$

прямое разложение группы G, вполне согласованное с разложением

$$G=\sum_{\nu\in N}{}' A_\nu \tag{A}$$

и F — подмножество $L(\mathrm{E},\ \Omega_{\mathrm{A}})$ такое, что для всякого $\nu\in N$ множество F_ν, $F_\nu=F\cap S(A_\nu,\ \mathrm{E},\ \Omega_{\mathrm{A}})$, удовлетворяет условию минимальности. Пусть, далее, $\{C_\lambda\}_{\lambda\in F}$ — множество подгрупп группы G, удовлетворяющих условиям[1]:

$$C_\lambda+\check{E}_\lambda=E_\lambda+\check{E}_\lambda \qquad (\lambda\in F,\ \check{E}_\lambda=U(E_\lambda,\ \mathrm{E},\ \Omega_{\mathrm{A}}), \tag{a}$$

$$C_\lambda\subset A_{\varrho(\lambda)} \qquad (\lambda\in F). \tag{b}$$

Тогда для любого замкнутого подмножества P частично упорядоченного множества $L(\mathrm{E},\ \Omega_{\mathrm{A}})$ имеет место прямое разложение

$$H_P=\sum_{\lambda\in P\cap F}{}' C_\lambda+\sum_{\nu\in N}{}'(A_\nu\cap H_{P\setminus F_\nu}), \tag{c}$$

в частности

$$G=\sum_{\lambda\in F}{}' C_\lambda+\sum_{\nu\in N}{}'(A_\nu\cap H_{L\setminus F_\nu}) \tag{C}$$

и разложение (E) *вполне согласовано с разложением* (C).

Доказательство. 1°. Пусть P — замкнутое подмножество частично упорядоченного множества $L(\mathrm{E},\ \Omega_{\mathrm{A}})$. По условию разложение (E) согласовано с разложением (A), F_ν удовлетворяет условию минимальности и множество $\{C_\lambda\}_{\lambda\in F_\nu}$ подгрупп C_λ удовлетворяет условиям (a), (b). Поэтому в силу (6,2) имеет место равенство

$$A_\nu\cap H_P=\sum_{\lambda\in P\cap F_\lambda} C_\lambda+A_\nu\cap H_{P\setminus F_\nu} \qquad (\nu\in N). \tag{1}$$

Так как разложение (E) согласовано с (A), то в силу (3,6)

$$H_P=\sum_{\nu\in N}{}'(A_\nu\cap H_P). \tag{2}$$

Легко видеть, что имеет место равенство

$$\bigcup_{\nu\in N}(P\cap F_\nu)=P\cap F. \tag{3}$$

[1] Символом ϱ обозначается отображение множества L на N, определенное в предложении (5,8).

Действительно, в силу (5,5) $L = \bigcup_{\nu \in N} S(A_\nu, \text{E}, \Omega_{\text{A}})$. Поэтому

$$\bigcup_{\nu \in N} (P \cap F_\nu) = \bigcup_{\nu \in N} (P \cap F \cap S(A_\nu, E, \Omega_A)) = P \cap F \cap L = P \cap F.$$

Теперь, заменяя прямые слагаемые в (2) на основании равенства (1) и принимая во внимание (3), получим

$$H_P = \sum_{\lambda \in P \cap F} C_\lambda + \sum_{\nu \in N} (A_\nu \cap H_{P \setminus F_\nu}). \tag{c}$$

Полагая в (c) $P = L$, получим прямое разложение

$$G = \sum_{\lambda \in F} C_\lambda + \sum_{\nu \in N} (A_\nu \cap H_{L \setminus F_\nu}). \tag{C}$$

2°. Докажем, что разложение (E) согласовано с разложением (C).

Принимая во внимание соотношение $H_{P \setminus F_\nu} \subset H_{L \setminus F_\nu}$, на основании (c) и (C) заключаем, что

$$C_i \cap H_P \subset C_i \cap \Big(\sum_{\alpha \in F \setminus \{i\}} C_\alpha + \sum_{\nu \in N} (A_\nu \cap H_{L \setminus F_\nu}) \Big) = \{0\} \qquad (i \in F \setminus P),$$

откуда

$$C_i \cap H_P = \{0\} \qquad (i \in F \setminus P). \tag{4}$$

Кроме того, в силу (c)

$$C_i \cap H_P = C_i \qquad (i \in F \cap P). \tag{5}$$

Далее, поскольку $(L \setminus F_\nu) \cap P = P \setminus F_\nu$, имеет место равенство

$$(A_\nu \cap H_{L \setminus F_\nu}) \cap H_P = A_\nu \cap H_{P \setminus F_\nu} \qquad (\nu \in N). \tag{6}$$

Теперь, на основании (4), (5), (6) равенство (c) можно записать в виде

$$H_P = \sum_{\lambda \in F} (C_\lambda \cap H_P) + \sum_{\nu \in N} ((A_\nu \cap H_{L \setminus F_\nu}) \cap H_P). \tag{7}$$

Так как прямое разложение (7) имеет место для любого замкнутого подмножества P частично упорядоченного множества $L(\text{E}, \Omega_{\text{A}})$, то в силу (3,7) разложение (E) согласовано с разложением (C).

3°. Докажем, что подмножество P множества L тогда, и только тогда, замкнуто в $L(\text{E}, \Omega_{\text{C}})$, когда оно замкнуто в $L(\text{E}, \Omega_{\text{A}})$.

Выше было показано, что для всякого подмножества P, замкнутого в $L(\text{E}, \Omega_{\text{A}})$, имеет место прямое разложение (7) и поэтому в силу (3,6) оно будет замкнутым также в $L(\text{E}, \Omega_{\text{C}})$.

Обратно, предположим, что подмножество P замкнуто в $L(\text{E}, \Omega_{\text{C}})$. Покажем, что имеет место прямое разложение

$$H_P = \sum_{\nu \in N} (A_\nu \cap H_P); \tag{8}$$

этим в силу (3,6) будет доказано, что подмножество P замкнуто в $L(\text{E}, \Omega_{\text{A}})$. Так как разложение (E) согласовано с разложением (C) и подмножество P замкнуто в $L(\text{E}, \Omega_{\text{C}})$, то в силу (3,6) имеет место прямое разложение

$$H_P = \sum_{\lambda \in F} (C_\lambda \cap H_P) + \sum_{\nu \in N} ((A_\nu \cap H_{L \setminus F_\nu}) \cap H_P).$$

Так как согласно условию $C_\lambda \subset A_{\varrho(\lambda)}$ при $\lambda \in F$, то не трудно видеть, что из этого прямого разложения получаем соотношение

$$H_P \subset \sum_{\nu \in N}' A_\nu \cap H_P,$$

из которого следует (8), так как, очевидно, имеет место и обратное включение.

4°. Обозначим через V_λ комбинаторное замыкание элемента λ в частично упорядоченном множестве $L(\mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})$ и положим $U_\lambda = V_\lambda \setminus \{\lambda\}$. Тогда в силу (2,9)

$$\overline{E}_\lambda = H_{V_\lambda} = \sum_{i \in V_\lambda}' E_i, \tag{9}$$

$$\check{E}_\lambda = H_{U_\lambda} = \sum_{i \in U_\lambda}' E_i. \tag{10}$$

Но на основании доказанного в пункте 3° мы можем утверждать, что V_λ является комбинаторным замыканием элемента λ также в частично упорядоченном множестве $L(\mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{C}})$. Поэтому группа $\overline{E}_\lambda$, $\overline{E}_\lambda = U(E_\lambda, \mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})$ является также наименьшей группой из множества $\Delta(\mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{C}})$, содержащей E_λ, т. е.

$$\overline{E}_\lambda = U(E_\lambda, \mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{C}}) \qquad (\lambda \in L), \tag{11}$$

и группа $\check{E}_\lambda$, $\check{E}_\lambda = V(E_\lambda, \mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})$ является наибольшей подгруппой группы $\overline{E}_\lambda$, принадлежащей множеству $\Delta(\mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{C}})$ и не содержащей E_λ, т. е.

$$\check{E}_\lambda = V(E_\lambda, \mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{C}}) \qquad (\lambda \in L). \tag{12}$$

5°. Докажем, что имеют место следующие соотношения:

$$(H_{L \setminus F_\nu} \cap A_\nu) \cap \overline{E}_\lambda \subset \check{E}_\lambda \qquad (\nu \neq \varrho(\lambda),\ \nu \in N,\ \lambda \in L), \tag{13}$$

$$(H_{L \setminus F_\nu} \cap A_\nu) \cap E_\lambda \subset \check{E}_\lambda \qquad (\nu \in N,\ \lambda \in F_\nu), \tag{14}$$

$$C_i \cap \overline{E}_\lambda \subset \check{E}_\lambda \qquad (i \neq \lambda,\ i \in F,\ \lambda \in L). \tag{15}$$

Согласно условию разложение (E) вполне согласовано с разложением (A). Поэтому согласно (5,9) имеет место соотношение

$$A_\lambda \cap \overline{E}_\lambda = A_\nu \cap \check{E}_\lambda \qquad (\nu \neq \varrho(\lambda),\ \nu \in N,\ \lambda \in L),$$

из которого следует соотношение (13).

Принимая во внимание (9) и (10), легко видеть, что

$$H_{L \setminus F_\nu} \cap \overline{E}_\lambda = H_{L \setminus F_\nu} \cap H_{V_\lambda} = H_{V_\lambda \setminus F_\nu}, \quad H_{L \setminus F_\nu} \cap \check{E}_\lambda = H_{U_\lambda \setminus F_\nu}.$$

Кроме того, очевидно, $V_\lambda \setminus F_\nu = U_\lambda \setminus F_\nu$ при $\lambda \in F_\nu$. Поэтому имеет место равенство

$$H_{L \setminus F_\nu} \cap \overline{E}_\lambda = H_{L \setminus F_\nu} \cap \check{E}_\lambda \qquad (\lambda \in F_\nu,\ \nu \in N),$$

из которого следует соотношение (14).

Наконец, полагая в (4) и (5) $P = U_\lambda$ и заменяя H_{U_λ} через $\check{E}_\lambda$, получим соотношения:

$$C_i \cap \check{E}_\lambda = \{0\} \qquad (i \in F \setminus U_\lambda),$$

$$C_i \cap \check{E}_\lambda = C_i \qquad (i \in F \cap U_\lambda),$$

из которых следует соотношение (15).

6°. Докажем, что прямое разложение (E) вполне согласовано с разложением (C). Выше было показано, что разложение (E) согласовано с разложением (C). Следовательно, согласно определению (5,7) достаточно показать, что разложение (C) обладает свойством (b) предложения (5,6). Таким образом, поскольку имеют место соотношения (12) и (13), достаточно показать, что для всякого фиксированного $\lambda \in L$ пересечение любого прямого слагаемого разложения (C), за исключением, быть может, одного, с группой $\bar{E}_\lambda$ содержится в группе $\breve{E}_\lambda$. Возможны два случая:

1 случай: $\lambda \in F$. В этом случае существует индекс $\nu \in N$ такой, что $\lambda \in F_\nu$, так как $F \bigcup\limits_{\nu \in N} F_\nu$. Поэтому на основании соотношений (13), (14), (15) заключаем, что пересечение любого прямого слагаемого разложения (C), за исключением, быть может, прямого слагаемого C_λ, с группой $\bar{E}_\lambda$ содержится в группе $\breve{E}_\lambda$.

2 случай: $\lambda \bar{\in} F$. В этом случае на основании (13) и (15) заключаем, что пересечение любого прямого слагаемого разложения (C), за исключением, быть может, прямого слагаемого $A_{\varrho(\lambda)} \cap H_{L \setminus F_{\varrho(\lambda)}}$ с группой $\bar{E}_\lambda$ содержится в группе $\breve{E}_\lambda$.

Таким образом, разложение (E) вполне согласовано с разложением (C). Теорема доказана.

(6,4). *Пусть*

$$G = \sum_{\lambda \in L} E_\lambda \tag{E}$$

прямое разложение группы G, *вполне согласованное с разложением*

$$G = \sum_{\nu \in N} A_\nu \tag{A}$$

и F — *подмножество* $L(\mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})$ *такое, что для всякого* $\nu \in N$ *множество* F_ν, $F_\nu = F \cap S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})$, *удовлетворяет условию минимальности. Обозначим через* C_λ, $\lambda \in L$ *компоненту группы* E_λ *в прямом слагаемом* $A_{\varrho(\lambda)}$ *разложения. Тогда для любого замкнутого подмножества* P *частично упорядоченного множества* $L(\mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})$ *имеет место прямое разложение*

$$H_P = \sum_{\lambda \in P \cap F} C_\lambda + \sum_{\nu \in N} (A_\nu \cap H_{P \setminus F_\nu})$$

и, в частности,

$$G = \sum_{\lambda \in F} C_\lambda + \sum_{\nu \in N} (A_\nu \cap H_{L \setminus F_\nu}).$$

Доказательство. В силу (5,11j) группа C_λ удовлетворяет условию

$$C_\lambda + \breve{E}_\lambda = E_\lambda + \breve{E}_\lambda \qquad (\lambda \in F). \tag{c}$$

Кроме того, поскольку C_λ — компонента группы E_λ в прямом слагаемом $A_{\varrho(\lambda)}$ разложения (A), C_λ удовлетворяет условию

$$C_\lambda \subset A_{\varrho(\lambda)} \qquad (\lambda \in F). \tag{d}$$

Поэтому предложение (6,4) является следствием предложения (6,3).

(6,5). *Пусть*

$$G=\sum_{\lambda\in L} E_\lambda \tag{E}$$

прямое разложение группы G, согласованное с разложением

$$G=\sum_{\nu\in N} A_\nu. \tag{A}$$

Тогда имеют место соотношения:

$$A_\nu \cap H_{L\setminus S(A_\nu,\, \mathrm{E},\, \Omega_\mathrm{A})}=\{0\} \qquad (\nu\in N). \tag{1}$$

Доказательство. Допустим, что в N существует индекс ν, для которого соотношение (1) не имеет места. Тогда существует отличный от нуля элемент x группы G такой, что

$$x\in A_\nu, \tag{2}$$

$$x\in H_{L\setminus S(A_\nu,\, \mathrm{E},\, \Omega_\mathrm{A})}. \tag{3}$$

Обозначим через Γ множество тех индексов $\lambda\in L$, для которых элемент x имеет ненулевую компоненту в прямом слагаемом E_λ разложения (E). В силу (3)

$$\Gamma\subset L\setminus S(A_\nu,\, \mathrm{E},\, \Omega_\mathrm{A}). \tag{4}$$

Так как x — ненулевой элемент, то Γ является конечным *непустым* множеством. Обозначим через γ какой-нибудь максимальный элемент множества Γ, которое мы при этом рассматриваем как подмножество частично упорядоченного множества $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$. Такой элемент существует, поскольку Γ — конечное непустое множество. В силу (4)

$$\gamma\,\overline{\in}\, S(A_\nu,\, \mathrm{E},\, \Omega_\mathrm{A}). \tag{5}$$

Обозначим через V_γ комбинаторное замыкание элемента γ в частично упорядоченном множестве $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$ и положим $U_\gamma=V_\gamma\setminus\{\gamma\}$. Обозначим, далее, через P множество всех элементов из L, больших чем γ или не сравнимых с γ, и положим

$$Q=P\cup\{\gamma\}.$$

Легко видеть, что имеют место следующие соотношения:

$$\Gamma\subset Q, \tag{6}$$

$$\Gamma\,\overline{\subset}\, P, \tag{7}$$

$$U_\gamma\subset P, \tag{8}$$

$$Q=P\cup V_\gamma. \tag{9}$$

Из определения множества Γ в силу (6), (7) следует, что

$$x\in H_Q,\ x\,\overline{\in}\, H_P,$$

откуда в силу (2) получим

$$A_\nu\cap H_Q\neq A_\nu\cap H_P. \tag{10}$$

Из (8) и (9) следуют соответственно соотношения:

$$H_{U_\gamma}\subset H_P, \tag{11}$$

$$H_Q=[H_P,\ H_{V_\gamma}]. \tag{12}$$

Множества P и V_γ замкнуты в $L(\mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})$, что непосредственно следует из определения этих множеств. В силу (9) множество Q также замкнуто в $L(\mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})$. Кроме того, по условию разложение (E) согласовано с разложением (A). Поэтому в силу (2,5) подгруппы H_P, H_{V_γ}, H_Q являются допустимыми относительно множества эндоморфизмов Ω_A. Отсюда в силу (3,9) следует равенство

$$A_\nu \cap H_Q = [A_\nu \cap H_P,\ A_\nu \cap H_{V_\gamma}]. \tag{13}$$

Теперь легко показать, что

$$A_\nu \cap H_{V_\gamma} \neq A_\nu \cap H_{U_\gamma}. \tag{14}$$

Действительно, если мы допустим, что

$$A_\nu \cap H_{V_\gamma} = A_\nu \cap H_{U_\gamma},$$

то в силу (11) получим

$$A_\nu \cap H_{V_\gamma} \subset A_\nu \cap H_P,$$

откуда в силу (13)

$$A_\nu \cap H_Q = A_\nu \cap H_P,$$

что невозможно в силу (10). Таким образом, имеет место соотношение (14).

Принимая во внимание, что в силу (2,9) $H_{V_\gamma} = \overline{E}_\gamma$ и $H_{U_\gamma} = \check{E}_\gamma$, мы можем соотношение (14) записать в виде:

$$A_\nu \cap \overline{E}_\gamma \neq A_\nu \cap \check{E}_\gamma,$$

откуда получим

$$A_\nu \cap \overline{E}_\gamma \,\overline{\subset}\, \check{E}_\gamma. \tag{15}$$

Из (15) согласно определению (5,4) следует, что

$$\gamma \in S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}}). \tag{16}$$

Соотношение (15) противоречит соотношению (5). Этим доказано, что соотношение (1) имеет место для всякого $\nu \in N$.

Предложение (6,5) доказано.

(6,6). Теорема. *Пусть*

$$G = \sum_{\lambda \in L} E_\lambda \tag{E}$$

прямое разложение группы G, вполне согласованное с разложением

$$G = \sum_{\nu \in N} A_\nu. \tag{A}$$

Обозначим через C_λ, $\lambda \in L$ компоненту группы E_λ в прямом слагаемом $A_{\varrho(\gamma)}$ разложения (A). *Если подмножество $S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})$ частично упорядоченного множества $L(\mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})$ удовлетворяет условию минимальности, то имеет место прямое разложение*

$$A_\nu = \sum_{\lambda \in S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})} C_\lambda. \tag{C$_\nu$}$$

Доказательство. Так как группа C_λ является компонентой группы E_λ в прямом слагаемом $A_{\varrho(\lambda)}$ разложения (A), то она удовлетворяет условию

$$C_\lambda \subset A_\lambda \qquad (\lambda \in S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})), \tag{d}$$

и в силу (5,11) также условию

$$C_\lambda + \check{E}_\lambda = E_\lambda + \check{E}_\lambda \qquad (\lambda \in L,\ E_\lambda = V(E_\lambda,\ \mathrm{E},\ \Omega_\mathrm{A})). \tag{c}$$

Кроме того, по условию, $S(A_\nu,\ \mathrm{E},\ \Omega_\mathrm{A})$ удовлетворяет условию минимальности. Поэтому, полагая $F = S(A_\nu,\ \mathrm{E},\ \Omega_\mathrm{A})$, мы на основании (6,2) можем утверждать, что имеет место прямое разложение

$$A_\nu \cap H_P = \sum_{\lambda \in P \cap S(A_\nu,\ \mathrm{E},\ \Omega_\mathrm{A})} C_\lambda + A_\nu \cap H_{P \setminus S(A_\nu,\ \mathrm{E},\ \Omega_\mathrm{A})}. \tag{e}$$

Полагая в прямом разложении (e) $P = L$ и замечая, что $A_\nu \cap H_L = A_\nu \cap G = A_\nu$, получим

$$A_\nu = \sum_{\lambda \in S(A_\nu,\ \mathrm{E},\ \Omega_\mathrm{A})} C_\lambda + A_\nu \cap H_{L \setminus S(A_\nu,\ \mathrm{E},\ \Omega_\mathrm{A})}. \tag{1}$$

Кроме того, в силу (6,5)

$$A_\nu \cap H_{L \setminus S(A_\nu,\ \mathrm{E},\ \Omega_\mathrm{A})} = \{0\}, \tag{2}$$

так как по условию разложение (E) согласовано с разложением (A). Теперь, сопоставляя (1) и (2), мы видим, что имеет место прямое разложение (C_ν).

§ 7

Пусть $G = \sum\limits_{\lambda \in L} E_\lambda$ и Γ — произвольное подмножество множества L. Подгруппу $\sum\limits_{\lambda \in \Gamma} E_\lambda$ группы G будем для краткости всюду ниже обозначать через H_Γ.

(7,1). Т е о р е м а. *Пусть*

$$G = \sum_{\lambda \in L} E_\lambda \tag{E}$$

прямое разложение группы G, *вполне согласованное с разложением*

$$G = \sum_{\nu \in N} A_\nu, \tag{A}$$

и F — *конечное подмножество множества* L. *Тогда для любого замкнутого подмножества* P *частично упорядоченного множества* $L(\mathrm{E},\ \Omega_\mathrm{A})$ *имеет место прямое разложение*

$$H_P = H_{P \cap F} + \sum_{\nu \in N} (A_\nu \cap H_{P \setminus F_\nu}), \tag{a_P}$$

где $F_\nu = F \cap S(A_\nu,\ \mathrm{E},\ \Omega_\mathrm{A})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть заданы конечное множество F, $F \subset L$ и замкнутое подмножество P частично упорядоченного множества $L(\mathrm{E},\ \Omega_\mathrm{A})$. Докажем, что имеет место прямое разложение (a_P). Доказательство будем вести индукцией по мощности множества F. Теорема, очевидно, верна, когда F — пустое множество. Предположим, что она верна для каждого множества F', имеющего меньшую чем F мощность, и докажем, что тогда она верна для заданного множества F.

Возможны два случая: $F \bar{\subset} P$, $F \subset P$.

В первом случае существует элемент $\gamma \in F \setminus P$. Положим $F' = F \setminus \{\gamma\}$. Так как мощность множества F' меньше мощности множества F, то по индуктивному предположению

$$H_P = H_{P \cap F'} + \sum_{\nu \in N} (A_\nu \cap H_{P \setminus F'_\gamma}), \text{ где } F'_\nu = F' \cap S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}}). \qquad (*)$$

Легко видеть, что из соотношений $\gamma \in F \setminus P$, $F' = F \setminus \{\gamma\}$ следуют равенства $P \cap F' = P \cap F$, $P \setminus F'_\nu = P \setminus F_\nu$ и, таким образом, из равенства (*) следует равенство (a_P). Итак, равенство (a_P) имеет место, когда $F \subset P$. Поэтому всюду ниже мы будем предполагать, что имеет место второй случай, т. е. имеет место соотношение

$$F \subset P. \qquad (1)$$

Будем рассматривать F как подмножество частично упорядоченного множества $L(\mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})$. Обозначим через α какой-либо максимальный элемент множества F. Поскольку F — непустое множество, то такой элемент существует. Положим $F^* = F \setminus \{\alpha\}$. Тогда

$$F = F^* \cup \{\alpha\} \qquad \alpha \in F^*. \qquad (2)$$

Обозначим через Q наименьшее замкнутое подмножество множества $L(\mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})$, содержащее F^*. Так как P является замкнутым множеством и содержит F^*, то

$$Q \subset P. \qquad (3)$$

Принимая во внимание, что α — максимальный элемент множества F и $\alpha \bar{\in} F^*$, не трудно видеть, что

$$\alpha \bar{\in} Q. \qquad (4)$$

Обозначим через V_α комбинаторное замыкание элемента α в $L(\mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})$ и положим

$$U_\alpha = V_\alpha \setminus \{\alpha\}. \qquad (5)$$

Легко видеть, что U_α — замкнутое множество, содержащееся в P. Положим

$$\Gamma = Q \cup U_\alpha, \qquad (6)$$

тогда

$$\Gamma \subset P, \qquad (7)$$

так как $U_\alpha \subset P$ и в силу (3) $Q \subset P$. Множество Γ, как сумма двух замкнутых множеств, является замкнутым. Поскольку $F^* \subset Q$, из (6) следует соотношение

$$F^* \subset \Gamma. \qquad (8)$$

Далее, на основании (4), (5), (6) заключаем, что

$$\alpha \bar{\in} \Gamma, \qquad (9)$$

откуда в силу (2), (8) следует равенство

$$F^* = \Gamma \cap F. \qquad (10)$$

Положим

$$F^*_\nu = F^* \cap S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}}), \qquad (11)$$

$$F_\nu = F \cap S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}}). \qquad (12)$$

На основании равенств (10), (11), (12) заключаем, что

$$\Gamma \setminus F_\nu^* = \Gamma \setminus F_\nu \qquad (\nu \in N). \tag{13}$$

В силу (2) множество F^* имеет меньшую мощность, чем F, и, следовательно, по индуктивному предположению, имеет место равенство

$$H_\Gamma = H_{\Gamma \cap F^*} + \sum_{\nu \in N} (A_\nu \cap H_{\Gamma \setminus F_\nu^*}).$$

Отсюда в силу (8) и (13) следует равенство

$$H_\Gamma = H_{F^*} + \sum_{\nu \in N} (A_\nu \cap H_{\Gamma \setminus F_\nu^*}). \tag{14}$$

Обозначим через C_λ компоненту группы E_λ в прямом слагаемом $A_{\varrho(\lambda)}$ разложения (A). По условию разложение (E) вполне согласовано с разложением (A) и F — конечное подмножество L. Кроме того, Γ и P — замкнутые подмножества $L(\mathrm{E}, \Omega_\mathrm{A})$. Поэтому в силу (6,4) имеют место равенства

$$H_\Gamma = \sum_{\lambda \in \Gamma \cap F} C_\lambda + \sum_{\nu \in N} (A_\nu \cap H_{\Gamma \setminus F_\nu}), \tag{15}$$

$$H_P = \sum_{\lambda \in P \cap F} C_\lambda + \sum_{\nu \in N} (A_\nu \cap H_{P \setminus F_\nu}). \tag{16}$$

Группа $A_\nu \cap H_{\Gamma \setminus F_\nu}$ является прямым слагаемым группы G, так как в силу (15) она является прямым слагаемым группы H_Γ, а H_Γ, очевидно, является прямым слагаемым группы G. Кроме того, $A_\nu \cap H_{\Gamma \setminus F_\nu} \subset A_\nu \cap H_{P \setminus F_\nu}$, так как в силу (7) $\Gamma \subset P$. Поэтому группа $A_\nu \cap H_{\Gamma \setminus F_\nu}$ является прямым слагаемым группы $A_\nu \cap H_{P \setminus F_\nu}$

$$A_\nu \cap H_P = A_\nu \cap H_{\Gamma \setminus F_\nu} + X_\nu \qquad (\nu \in N). \tag{17}$$

На основании (1), (2) и (8) заключаем что $P \cap F = \{\alpha\} \cup \Gamma \cap F$. Поэтому, принимая во внимание (15) и (17), мы равенство (16) можем записать в виде

$$H_P = C_\alpha + H_\Gamma + \sum_{\nu \in N} X_\nu. \tag{18}$$

Докажем, что имеет место равенство

$$C_\alpha + H_\Gamma = E_\alpha + H_\Gamma. \tag{19}$$

Так как по условию разложение (E) вполне согласовано с разложением (A), то в силу (5,11j) $C_\alpha + \check{E}_\alpha = E_\alpha + \check{E}_\alpha$, где $\check{E}_\alpha = \sum_{\lambda \in U_\alpha} E_\lambda$, т. е.

$$C_\alpha + \sum_{\lambda \in U_\alpha} E_\lambda = E_\alpha + \sum_{\lambda \in U_\alpha} E_\lambda. \tag{20}$$

Но, в силу (6) и (9) $U_\alpha \subset \Gamma$ и $\alpha \bar{\in} \Gamma$. Отсюда и из (20) следует равенство

$$C_\alpha + \sum_{\lambda \in \Gamma} E_\lambda = E_\alpha + \sum_{\lambda \in \Gamma} E_\lambda,$$

откуда, поскольку $\sum_{\lambda \in \Gamma} E_\lambda = H_\Gamma$, следует (19).

Сопоставляя (18) и (19), получим

$$H_P = E_\alpha + H_\Gamma + \sum_{\nu \in N} X_\nu,$$

откуда в силу (14)

$$H_P = E_\alpha + H_F + \sum_{\nu \in N} (A_\nu \cap H_{\Gamma \setminus F_\nu}) + \sum_{\nu \in N} X_\nu.$$

Это равенство на основании (17) можно записать в виде

$$H_P = E_\alpha + H_{F^*} + \sum_{\nu \in N} (A_\nu \cap H_{P \setminus F_\nu}). \tag{21}$$

В силу (2) $E_\alpha + H_{F^*} = H_F$. Кроме того, в силу (1) $F = P \cap F$. Поэтому

$$E_\alpha + H_{F^*} = H_{P \cap F}. \tag{22}$$

Сопоставляя (21) и (22), получим

$$H_P = H_{P \cap F} + \sum_{\nu \in N} (A_\nu \cap H_{P \setminus F_\nu}).$$

Таким образом, прямое разложение (a_P) имеет место также и во втором случае, т. е. в случае, когда имеет место (1). Теорема (7,1) доказана.

(7,2). *Пусть*

$$G = \sum_{\lambda \in L} E_\lambda \tag{E}$$

прямое разложение группы G, *вполне согласованное с разложением*

$$G = \sum_{\nu \in N} A_\nu. \tag{A}$$

Пусть, далее, задано прямое слагаемое A_κ *разложения* (A) *и отличный от нуля элемент* x *группы* A_κ. *Тогда существуют конечное подмножество* Γ *множества* $S(A_\kappa, \mathrm{E}, \Omega_A)$ *и множество* $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Gamma}$ *подгрупп группы* A_κ, *удовлетворяющие следующим условиям:*

$$C_\lambda + \breve{E}_\lambda = E_\lambda + \breve{E}_\lambda \qquad (\lambda \in \Gamma,\ \breve{E}_\lambda = U(E_\lambda, \mathrm{E}, \Omega_A)), \tag{a}$$

$$A_k = \sum_{\lambda \in \Gamma} C_\lambda + A_k \cap H_{L \setminus \Gamma}, \tag{b}$$

$$x \in \sum_{\lambda \in \Gamma} C_\lambda, \tag{c}$$

имеет место прямое разложение (d)

$$G = \sum_{\lambda \in \Gamma} C_\lambda + A_k \cap H_{L \setminus \Gamma} + \sum_{\nu \in N \setminus \{k\}} A_\nu \tag{C}$$

и разложение (E) *вполне согласовано с разложением* (C).

Доказательство. По условию x — отличный от нуля элемент группы G. Поэтому существует непустое конечное подмножество F множества L, удовлетворяющее условию:

$$x \in H_F, \text{ где } H_F = \sum_{\lambda \in F} E_\lambda. \tag{1}$$

Обозначим через V_λ комбинаторное замыкание элемента λ в частично упорядоченном множестве $L(\mathrm{E}, \Omega_\Lambda)$ и положим $U_\lambda = V_\lambda \setminus \{\lambda\}$. По условию, разложение (E) вполне согласовано с разложением (A). Поэтому на основании (7,1) заключаем, что имеют место прямые разложения:

$$G = H_F + \sum_{\nu \in N} (A_\nu \cap H_{L \setminus F_\nu}) \tag{2}$$

$$H_{V_\lambda} = H_{V_\lambda \cap F} + \sum_{\nu \in N} (A_\nu \cap H_{V_\lambda \setminus F_\nu}) \qquad (\lambda \in F_k), \tag{3}$$

$$H_{U_\lambda} = H_{U_\lambda \cap F} + \sum_{\nu \in N} (A_\nu \cap H_{U_\lambda \setminus F_\nu}) \qquad (\lambda \in F_k), \tag{4}$$

где $F_\nu = F \cap S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_\Lambda)$. Равенства (2), (3), (4) получаются из равенства (a_P) теоремы (7,1), если положить P равным соответственно L, U_λ, V_λ. Из равенств (2), (3), (4) в силу (3,10) следуют соответственно соотношения:

$$A_k = A_k \cap H_{L \setminus F_k} + X, \tag{5}$$

$$A_k \cap H_{V_\lambda} = A_k \cap H_{V_\lambda \setminus F_k} + X_\lambda \qquad (\lambda \in F_k), \tag{6}$$

$$A_k \cap H_{U_\lambda} = A_k \cap H_{U_\lambda \setminus F_k} + Y_\lambda \qquad (\lambda \in F_k), \tag{7}$$

где

$$X = A_k \cap \Big(H_F + \sum_{\nu \in N \setminus \{k\}} (A_\nu \cap H_{L \setminus F_\nu}) \Big), \tag{8}$$

$$X_\lambda = A_k \cap \Big(H_{V_\lambda \cap F} + \sum_{\nu \in N \setminus \{k\}} (A_\nu \cap H_{V_\lambda \setminus F_\nu}) \Big) \qquad (\lambda \in F_k), \tag{9}$$

$$Y_\lambda = A_k \cap \Big(H_{U_\lambda \cap F} + \sum_{\nu \in N \setminus \{k\}} (A_\nu \cap H_{U_\lambda \setminus F_\nu}) \Big) \qquad (\lambda \in F_k). \tag{10}$$

В силу (7) Y_λ является прямым слагаемым группы $A_k \cap H_{U_\lambda}$. По условию (E) согласовано с (A), следовательно, в силу (4,6) $H_{U_\lambda} = \sum_{\lambda \in N} (A_\nu \cap H_{U_\lambda})$ и, таким образом, группа $A_k \cap H_{U_\lambda}$ является прямым слагаемым группы H_{U_λ}, а значит, и группы G. Поэтому Y_λ является прямым слагаемым группы G. Далее, равенства (9) и (10) показывают, что $Y_\lambda \subset X_\lambda$. Следовательно, Y_λ является прямым слагаемым группы X_λ, т. е. существует подгруппа C_λ группы X_λ, удовлетворяющая соотношению

$$X_\lambda = Y_\lambda + C_\lambda \qquad (\lambda \in F_k). \tag{11}$$

На основании соотношений (6), (7), (11) заключаем, что

$$A_k \cap H_{V_\lambda} = C_\lambda + A_k \cap H_{U_\lambda} \qquad (\lambda \in F_k).$$

Так как $\overline{E}_\lambda = H_{V_\lambda}$ и $\check{E}_\lambda = H_{U_\lambda}$, то это соотношение можно записать в виде

$$A_k \cap \overline{E}_\lambda = C_\lambda + A_k \cap \check{E}_\lambda \qquad (\lambda \in F_k). \tag{12}$$

По условию разложение (E) вполне согласовано с разложением (A). Поэтому в силу (5,11f)

$$[A_k \cap \bar{E}_\lambda,\ \check{E}_\lambda] = \bar{E}_\lambda. \qquad (\lambda \in F_k). \tag{13}$$

На основании (12) и (13) заключаем, что $C_\lambda + \check{E}_\lambda = \bar{E}_\lambda$, откуда, поскольку $\bar{E}_\lambda = E_\lambda + \check{E}_\lambda$, получим

$$C_\lambda + \check{E}_\lambda = E_\lambda + \check{E}_\lambda, \qquad (\lambda \in F_k). \tag{14}$$

Далее, из (9) и (11) следует, что

$$C_\lambda \subset A_k \qquad (\lambda \in F_k). \tag{15}$$

Соотношения (14) и (15) показывают, что множество $\{C_\lambda\}_{\lambda \in F_k}$ подгрупп группы G удовлетворяет условиям (c) и (d) предложения (6,2). Кроме того, F_k — конечное подмножество L и по условию разложение (E) согласовано с разложением (A). Поэтому в силу (6,2) имеет место прямое разложение

$$A_k + \sum_{\lambda \in F_k} C_\lambda + A_k \cap H_{L \setminus F_k}. \tag{16}$$

Равенство (16) получается из равенства (e) предложения (6,2), если положить $F = F_k$ и $P = L$.

В силу (11), $C_\lambda \subset X_\lambda$ и, как показывают равенства (8) и (9), $X_\lambda \subset X$. Поэтому $C_\lambda \subset X$ при $\lambda \in F_k$. Отсюда следует соотношение

$$\sum_{\lambda \in F_k} C_\lambda \subset X. \tag{17}$$

Теперь на основании (5), (16), (17) заключаем, что

$$X = \sum_{\lambda \in F_k} C_\lambda. \tag{18}$$

Далее, по условию $x \in A_k$ и согласно (1) $x \in H_F$. Отсюда в силу (8) следует, что $x \in X$ и, значит, в силу (18)

$$x \in \sum_{\lambda \in F_k} C_\lambda. \tag{19}$$

Положим $\Gamma = F_k$. Тогда соотношения (14), (16), (19) показывают, что множество $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Gamma}$ подгрупп C_λ удовлетворяет условиям (a), (b), (c). Наконец, разложение (C) имеет место в силу разложений (A) и (16), причем согласно (6,3) разложение (E) вполне согласовано с разложением (C) и, таким образом, группы C_λ удовлетворяют также условию (d).

(7,3). *Пусть*

$$G = \sum_{\lambda \in L} E_\lambda \tag{E}$$

прямое разложение группы G, вполне согласованное с разложением

$$G = \sum_{\nu \in N} A_\nu. \tag{A}$$

Пусть, далее, для какого-либо прямого слагаемого A_β разложения (A) *имеет место прямое разложение*

$$A_\beta = \sum_{\lambda \in Q} C_\lambda, \tag{1}$$

где Q — подмножество множества L и прямые слагаемые C_λ удовлетворяют условию

$$C_\lambda + \check{E}_\lambda = \bar{E}_\lambda \qquad (\lambda \in Q). \tag{2}$$

Тогда $Q = S(A_\beta, \mathrm{E}, \Omega_\Lambda)$ и для любого замкнутого подмножества P частично упорядоченного множества $L(\mathrm{E}, \Omega_\Lambda)$ имеет место прямое разложение

$$A_\beta \cap H_P + \sum_{\lambda \in P \cap Q} C_\lambda. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть P — замкнутое подмножество частично упорядоченного множества $L(\mathrm{E}, \Omega_\Lambda)$. Докажем, что имеет место прямое разложение (3). Пусть F — конечное подмножество множества $Q \setminus P$,

$$F \subset Q \setminus P. \tag{4}$$

Принимая во внимание условия теоремы, мы на основании (6,2) заключаем, что

$$A_\beta \cap H_L = \sum_{\lambda \in F} C_\lambda + A_\beta \cap H_{L \setminus F}. \tag{5}$$

Согласно (4) $F \subset L \setminus P$, откуда $P \subset L \setminus F$, и, следовательно,

$$H_P \subset H_{L \setminus F}. \tag{6}$$

На основании (5), (6) заключаем, что

$$\sum_{\lambda \in F} C_\lambda \cap (A_\beta \cap H_P) \subset \sum_{\lambda \in F} C_\lambda \cap (A_\beta \cap H_{L \setminus F}) = \{0\},$$

откуда

$$\sum_{\lambda \in Q \setminus P} C_\lambda \cap (A_\beta \cap H_P) = \{0\}. \tag{7}$$

Из (7), поскольку F — любое конечное подмножество множества Q, следует соотношение

$$\sum_{\lambda \in Q \setminus P} C_\lambda \cap (A_\beta \cap H_P) = \{0\}. \tag{8}$$

Поскольку подмножество P замкнуто в $L(\mathrm{E}, \Omega_\Lambda)$, не трудно видеть, что

$$\bar{E}_\lambda \subset H_P \qquad (\lambda \in P),$$

откуда в силу условия (2)

$$C_\lambda \subset H_P \qquad (\lambda \in P \cap Q). \tag{9}$$

Кроме того, в силу (1)

$$C_\lambda \subset A_\beta \qquad (\lambda \in Q). \tag{10}$$

На основании (1), (9), (10) заключаем, что

$$\sum_{\lambda \in P \cap Q} C_\lambda \subset A_\beta \cap H_P. \tag{11}$$

Так как $Q=(Q\setminus P)\cup(P\cap Q)$, то равенство (1) можно записать в виде

$$A_\beta=\sum_{\lambda\in Q\setminus P}C_\lambda+\sum_{\lambda\in P\cap Q}C_\lambda. \tag{12}$$

Теперь, на основании (8), (11), (12) заключаем, что имеет место прямое разложение (3).

Докажем, что имеет место равенство

$$Q=S(A_\beta,\ \mathrm{E},\ \Omega_\mathrm{A}).$$

Пусть

$$\alpha\in S(A_\beta,\ \mathrm{E},\ \Omega_\mathrm{A}). \tag{13}$$

Обозначим через V_α комбинаторное замыкание элемента α в частично упорядоченном множестве $L(\mathrm{E},\ \Omega_\mathrm{A})$ и через U_λ множество $V_\alpha\setminus\{\alpha\}$. Полагая в (3) множество P равным U_λ и V_λ и замечая, что $H_{U_\lambda}=\check{E}_\alpha$, $H_{V_\lambda}=\bar{E}_\alpha$, получим

$$A_\beta\cap\check{E}_\alpha=\sum_{\lambda\in U_\alpha\cap Q}C_\lambda, \tag{14}$$

$$A_\beta\cap\bar{E}_\alpha=\sum_{\lambda\in V_\alpha\cap Q}C_\lambda. \tag{15}$$

Если $\alpha\bar{\in}Q$, то $U_\alpha\cap Q=V_\alpha\cap Q$ и, следовательно, согласно (14) и (15)

$$A_\beta\cap\bar{E}_\alpha=A_\beta\cap\check{E}_\alpha,$$

что невозможно в силу (13). Этим доказано, что $\alpha\in Q$, если только имеет место (13). Следовательно,

$$Q\supset S(A_\beta,\ \mathrm{E},\ \Omega_\mathrm{A}). \tag{16}$$

Предположим теперь, что $\alpha\bar{\in}S(A_\beta,\ \mathrm{E},\ \Omega_\mathrm{A})$. Тогда в силу (5,9) $A_\beta\cap\bar{E}_\alpha=A_\beta\cap\check{E}_\alpha$. Отсюда, поскольку соотношения (14), (15) имеют место для всякого $\alpha\in L$, получим $\sum\limits_{\lambda\in U_\alpha\cap Q}C_\lambda=\sum\limits_{\lambda\in V_\alpha\cap Q}C_\lambda$. Это равенство показывает, что $U_\alpha\cap Q=V_\alpha\cap Q$ и, следовательно, $\alpha\bar{\in}Q$. Таким образом, $Q\subset S(A_\beta,\ \mathrm{E},\ \Omega_\mathrm{A})$. Сопоставляя это соотношение и (16), получим равенство $Q=S(A_\beta,\ \mathrm{E},\ \Omega_\mathrm{A})$.

(7,4). Теорема. *Пусть*

$$G=\sum_{\lambda\in L}E_\lambda \tag{E}$$

прямое разложение группы G, вполне согласованное с разложением

$$G=\sum_{\nu\in\mathrm{A}}A_\nu. \tag{A}$$

Если какое-либо прямое слагаемое A_β разложения (A) *является счетной или конечной группой, то существует множество $\{C_\lambda\}_{\lambda\in L(A_\beta)}$ подгрупп группы G со следующими свойствами:*

$$A_\beta=\sum_{\lambda\in S(A_\beta,\ \mathrm{E},\ \Omega_\mathrm{A})}C_\lambda \tag{1}$$

$$C_\lambda+\check{E}_\lambda=E_\lambda+\check{E}_\lambda\qquad(\lambda\in L(A_\beta)). \tag{2}$$

Доказательство. Согласно условию A_β — счетная или конечная группа. Поэтому существует последовательность

$$x_1,\ x_2, \dots,\ x_n, \dots, \tag{3}$$

содержащая все отличные от нуля элементы группы A_β, занумерованные натуральными числами.

Докажем, что для каждого натурального числа n существует совокупность $\{T_i\}_{0<i\leq n}$ подмножеств множества L и множества $\{C_\lambda\}_{\lambda\in T_n}$, $\{A_\beta^{(i)}\}_{0<i\leq n}$ подгрупп группы G со следующими свойствами:

$$C_\lambda + \check{E}_\lambda = \bar{E}_\lambda \qquad (\lambda \in T_n), \tag{a$_n$}$$

$$A_\beta = \sum_{\lambda\in T_n} C_\lambda + A_\beta^{(n)}, \tag{b$_n$}$$

$$\{x_1,\ x_2, \dots, x_n\} \subset \sum_{\lambda\in T_n} C_\lambda, \tag{c$_n$}$$

имеет место прямое разложение (d$_n$)

$$G = \sum_{\lambda\in T_n} C_\lambda + A_\beta^{(n)} + \sum_{\nu\in N\setminus\{\beta\}} A_\nu \tag{C$_n$}$$

и разложение (E) вполне согласовано с разложением (C$_n$),

$$T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset T_n \subset L. \tag{e$_n$}$$

В силу (7,2) при $n=1$ искомые множества существуют. Предположим, что для некоторого натурального числа n множества $\{T_i\}_{0<i\leq n}$ $\{C_\lambda\}_{\lambda\in T_n}$, $\{A_\beta^{(i)}\}_{0<i\leq n}$ со свойствами (a$_n$) — (e$_n$) существуют, и докажем, что тогда существуют множества $\{T_i\}_{0<i\leq n+1}$, $\{C_\lambda\}_{\lambda\in T_{n+1}}$, $\{A_\beta^{(i)}\}_{0<i\leq n+1}$ со свойствами (a$_{n+1}$) — (e$_{n+1}$).

Легко видеть, что наше утверждение справедливо, когда элемент x_{n+1} принадлежит группе $\sum\limits_{\lambda\in T_n} C_\lambda$ или группа $\sum\limits_{\lambda\in T_n} C_\lambda$ совпадает с группой A_β, ибо в этом случае достаточно положить $T_{n+1} = T_n$ и $A_\beta^{(n+1)} = A_\beta^{(n)}$.

Предположим теперь, что элемент x_{n+1} не содержится в группе $\sum\limits_{\lambda\in \Gamma_n} C_\lambda$. Тогда компонента y_{n+1} элемента x_{n+1} в прямом слагаемом $A_\beta^{(n)}$ разложения (C$_n$) отлична от нуля. По индуктивному предположению разложение (E) вполне согласовано с разложением (C$_n$). Поэтому в силу (7,2) для прямого слагаемого $A_\beta^{(n)}$ разложения (C$_n$) и элемента y_{n+1} существуют конечное подмножество Γ_n множества $L(A_\beta^{(n)})$, множество $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Gamma_n}$ подгрупп группы G и группа $A_\beta^{(n+1)}$, обладающие следующими свойствами:

$$C_\lambda + \check{E}_\lambda = \bar{E}_\lambda \qquad (\lambda\in\Gamma_n), \tag{a$_n^*$}$$

$$A_\beta^{(n)} = \sum_{\lambda\in\Gamma_n} C_\lambda + A_\beta^{(n+1)},\ \text{где}\ A_\beta^{(n+1)} = A_\beta^{(n)} \cap G_{L\setminus\Gamma_n}, \tag{b$_n^*$}$$

$$y_{n+1} \in \sum_{\lambda\in\Gamma_n} C_\lambda, \tag{c$_n^*$}$$

имеет место прямое разложение (d_n^*)

$$G=\sum_{\lambda\in T_n} C_\lambda+\sum_{\lambda\in\Gamma_n} C_\lambda+A_\beta^{(n+1)}+\sum_{\nu\in N\setminus\{\beta\}} A_\nu \qquad (C_{n+1}^*)$$

и разложение (E) вполне согласовано с разложением (C_{n+1}^*).

Теперь, полагая $T_{n+1}=T_n\cup\Gamma_n$, мы на основании $(a_n)-(e_n)$ и $(a_n^*)-(d_n^*)$ заключаем, что множества $\{T_i\}_{0<i\le n+1}$, $\{C_\lambda\}_{\lambda\in T_{n+1}}$, $\{A_\beta^{(i)}\}_{0<i<n+1}$ обладают свойствами $(a_{n+1})-(e_{n+1})$. Этим доказано, что множества $\{T_i\}_{0<i\le n}$, $\{C_\lambda\}_{\lambda\in T_n}$, $\{A_\beta^{(i)}\}_{0<i\le n}$ со свойствами $(a_n)-(e_n)$ существуют для каждого натурального числа n.

Положим

$$Q=\bigcup_{n=1,2,\dots} T_n. \qquad (4)$$

На основании соотношений (b_n), (e_n), (4) заключаем, что

$$[\bigcup_{\lambda\in Q} C_\lambda]=\sum_{\lambda\in Q} C_\lambda.$$

Отсюда, поскольку соотношение (c_n) имеет место для любого натурального числа n, следует, что все элементы последовательности (3) принадлежат группе $\sum_{\lambda\in Q} C_\lambda$, т. е. $A_\beta\subset\sum_{\lambda\in Q} C_\lambda$. Но, согласно (b_n), $C_\lambda\subset A_\beta$, следовательно,

$$A_\beta=\sum_{\lambda\in Q} C_\lambda. \qquad (5)$$

Далее, в силу соотношений (a_n) и (4)

$$C_\lambda+\check{E}_\lambda=\bar{E}_\lambda. \qquad (6)$$

Теперь, из (5), (6) в силу (7,3) следует, что

$$Q=S(A_\beta,\ E,\ \Omega_A). \qquad (7)$$

Сопоставляя соотношения (5), (6), (7), мы видим, что имеют место соотношения (1), (2). Теорема доказана.

(Окончание статьи будет помещено в следующем номере журнала)