1952 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. IV, № 3
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

О некоторых вариационных задачах теории однолистных функций

В. А. Зморович

1. Автор настоящей работы показал [1], что некоторые практически важные классы регулярных однолистных в круге $|z| < 1$ функций $f(z)$, нормированных условиями

$$f(0) = 0, \ f'(0) = 1, \tag{1,1}$$

могут быть определены „структурными формулами" вида

$$f(z) = \Phi(z; \ \mu(\theta)), \tag{1,2}$$

где $\mu(\theta)$ пробегает класс неубывающих на сегменте $[-\pi, \pi]$ функций, нормированных условиями

$$\mu(-\pi) = \mu(-\pi + 0) = 0, \quad \mu(\pi) = 2\pi, \tag{1,3}$$

который мы в дальнейшем будем называть классом M, а Φ есть функционал (вообще говоря, нелинейный), определенный на классе M, причем z является параметром этого функционала. К классам функций, допускающим представление вида (1,2), относятся классы функций выпуклых, звездных, спиральных [1], функций с ограниченным вращением [1] и некоторые другие. Условия (1,3) обеспечивают применимость теоремы единственности представления (1,2), в силу которой из тождества

$$\Phi(z; \ \mu(\theta)) \equiv \Phi(z; \ \mu_1(\theta)), \ |z| < 1$$

следует $\mu(\theta) = \mu_1(\theta)$, $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$ с точностью до значений обеих функций на множестве точек разрыва, которые у этих функций совпадают. Такие две функции класса M, которые имеют общие точки разрыва, обладают одинаковыми скачками в каждой точке разрыва и совпадают на множестве точек непрерывности, мы условимся называть эквивалентными. При замене функции $\mu(\theta)$ функцией, ей эквивалентной, интеграл Стильтьеса $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta)\, d\mu(\theta)$ не изменяется, а функции класса M в формулах вида (1,2) встречаются только в такой роли.

Основываясь на представлении (1,2), любой вещественный функционал $J(f(z))$, определенный при условии $z = \text{const}$ ($|z| < 1$) на том или ином из указанных выше классов регулярных однолистных в круге $|z| < 1$ функций $f(z)$, нормированных условиями (1,1), можно рассматривать, как некоторый вещественный функционал

$$J_1(\mu(\theta)), \tag{1,4}$$

определенный на классе M, благодаря чему вариационная задача, относящаяся к одному из упомянутых выше классов регулярных однолистных в круге $|z|<1$ функций (1,2), оказывается сведенной к некоторой вариационной задаче, связанной с классом M. В силу теоремы единственности представления (1,2), возможность и единственность решения одной из этих задач влечет за собою возможность и единственность решения другой.

Классические методы вариационного исчисления неприменимы к функционалу (1,4), так как класс допустимых функций содержит разрывные функции, которые должны обладать свойством быть неубывающими на сегменте $[-\pi;\ \pi]$, что совместно с первым обстоятельством затрудняет построение ε-окрестности в смысле функционального анализа для каждой из таких функций и препятствует применению метода диференциальных уравнений. Поэтому возникает необходимость в разработке некоторого нового прямого метода для экстремизации функционалов (1,4), учитывающего все перечисленные специфические условия. Изложение оснований такого метода для одного достаточно общего класса функционалов (1,4), а также известных применений этого метода и составляет содержание настоящей работы.

2. Предположим, что вещественный функционал $J(\mu)$ обладает следующим свойством:

$$J(\mu+\varepsilon\eta)=J(\mu)+\varepsilon A(\mu,\ \eta)+\varepsilon^2 B(\mu,\ \eta;\ \varepsilon) \tag{2,1}$$

для любой функции $\eta(\theta)$ с ограниченным изменением на сегменте $[-\pi;\ \pi]$, причем

$$A(\mu,\ \eta)=\int_{-\pi}^{\pi} F_\mu(\theta)\,d\eta(\theta), \tag{2,2}$$

где $F_\mu(\theta)$ — вещественная функция переменной θ на сегменте $[-\pi;\ \pi]$, зависящая, кроме того, от выбора функции $\mu(\theta)$ из класса M, но одна и та же для любых двух эквивалентных функций класса M. Что касается функционала $B(\mu,\ \eta;\ \varepsilon)$, то мы предположим, что он удовлетворяет условию

$$|B(\mu,\eta;\varepsilon)|<B_0,$$

где B_0 — положительная абсолютная константа, если величины $\underset{-\pi\le\theta\le\pi}{\operatorname{var}}\eta(\theta)$ и $|\varepsilon|$ не превосходит некоторых констант.

Из формулы (2,1) видим, что при $A(\mu,\ \eta)\neq 0$ знак рзности

$$J(\mu+\varepsilon\eta)-J(\mu)$$

определяется при всех достаточно малых значениях $|\varepsilon|$ знаком величины

$$\delta J(\mu)=\varepsilon A(\mu,\ \eta), \tag{2,3}$$

которую будем называть вариацией функционала $J(\mu)$ при переходе от функции $\mu(\theta)$ к функции $\mu(\theta)+\varepsilon\eta(\theta)$. Так как варьированная функция $\mu(\theta)+\varepsilon\mu(\theta)$ должна тоже принадлежать к классу M, то это ограничивает как выбор функции $\eta(\theta)$, так и выбор знака параметра ε. Во всяком случае функция $\eta(\theta)$ должна удовлетворять условиям

$$\eta(-\pi)=\eta(-\pi+0)=\eta(\pi)=0, \tag{2,4}$$

являющимся следствиями условий (1,3).

Если предположить, что функция $\mu_0(\theta)$ реализует максимум функционала $J(\mu)$, то, очевидно, должно выполняться условие

$$\varepsilon A(\mu_0, \eta) \leqslant 0 \tag{2,5}$$

для всех допустимых функций $\eta(\theta)$ и всех допустимых значений параметра ε.

Если предположить, что в неравенстве (2,5) возможны оба знака параметра ε, то необходимо, чтобы выполнялось условие

$$A(\mu_0, \eta) = 0. \tag{2,6}$$

Аналогично в случае минимизации функционала $J(\mu)$ функцией μ_0 (θ) должно иметь место неравенство

$$\varepsilon A(\mu_0, \eta) \geqslant 0, \tag{2,7}$$

которое в случае допустимости значений обоих знаков параметра ε должно быть заменено равенством (2,6).

Пользуясь формулой (2,2), можно обнаружить важные свойства экстремальной функции $\mu_0(\theta)$, если подчинить функцию $F_\mu(\theta)$ некоторым достаточно общим условиям. Прежде всего имеет место следующая теорема.

Теорема I. Если функция $F_\mu(\theta)$, входящая в выражение (2,3) вариации $\delta J(\mu)$, при любом выборе функции $\mu(\theta)$ из класса M непрерывна на сегменте $[-\pi; \pi]$ и монотонна в узком смысле в достаточно малой односторонней окрестности каждого значения θ из этого сегмента, то экстремальная функция $\mu_0(\theta)$ не является непрерывной ни в одной точке ее роста.

Доказательство. Точку $\theta_1, -\pi \leqslant \theta_1 < \pi$, назовем точкой роста функции $\mu_0(\theta)$, если для любого $\delta > 0$ существует такое θ_2, $-\pi \leqslant \theta_1 < \theta_2 < \pi$, $0 < \theta_2 - \theta_1 < \delta$, что $\mu_0(\theta_2) > \mu_0(\theta_1)$. Предположим, что в точке $\theta = \theta_1$, являющейся точкой роста экстремальной функции $\mu_0(\theta)$ эта функция непрерывна; выберем такое значение $\theta_2 > \theta_1$, чтобы на сегменте $[\theta_1; \theta_2]$ функция $F_{\mu_0}(\theta)$ была монотонной и чтобы выполнялось условие $\mu_0(\theta_2 - 0) > \mu_0(\theta_1)$. Такое значение θ_2 наверняка существует, ибо если бы $\mu_0(\theta_2 - 0) = \mu_0(\theta_1)$, то должно было бы выполняться условие: $\mu_0(\theta_1) = \mu_0(\theta)$ при $\theta_1 < \theta < \theta_2$, что противоречит определению точки роста. Определим теперь вариацию $\varepsilon\eta(\theta)$ функции $\mu_0(\theta)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\eta(\theta) = 0 && \text{при } -\pi \leqslant \theta \leqslant \theta_1;\\
&\eta(\theta) = \mu_0(\theta_1) - \mu_0(\theta) && \text{,,} \quad \theta_1 < \theta < \theta_2;\\
&\eta(\theta) = 0 && \text{,,} \quad \theta_2 \leqslant \theta \leqslant \pi.
\end{aligned}$$

Легко убедиться, что функция $\mu_0(\theta) + \varepsilon\eta(\theta)$ принадлежит к классу M при всех достаточно малых положительных значениях параметра ε. Вычисляя вариацию $\delta_1 J(\mu_0)$ по формуле (2,3), получаем

$$\delta_1 J(\mu_0) = \varepsilon\left[F_{\mu_0}(\theta_2)(\mu_0(\theta_2 - 0) - \mu_0(\theta_1)) - \lim_{\substack{h\to 0\\(h>0)}} \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2 - h} F_{\mu_0}(\theta)\, d\mu_0(\theta)\right] =$$

$$= \varepsilon\,[F_{\mu_0}(\theta_2) - F_{\mu_0}(\vartheta_1)]\,[\mu_0(\theta_2 - 0) - \mu_0(\theta_1)], \tag{2,8}$$

где $\theta_1 < \vartheta_1 < \theta_2$.

Определим теперь другую вариацию функции $\mu_0(\theta)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &\eta(\theta) = 0 && \text{при} \quad -\pi \leqslant \theta \leqslant \theta_1; \\ &\eta(\theta) = \mu_0(\theta_2 - 0) - \mu_0(\theta) && \quad \text{„} \qquad \theta_1 < \theta < \theta_2; \\ &\eta(\theta) = 0 && \quad \text{„} \qquad \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \pi. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что функция $\mu_0(\theta) + \varepsilon\eta(\theta)$ также принадлежит к классу M при всех достаточно малых положительных значениях параметра ε. Вычисляя вариацию $\delta_2 J(\mu_0)$ по формуле (2,3), получаем

$$\delta_2 J(\mu_0) = \varepsilon\,[F_{\mu_0}(\theta_1) - F_{\mu_0}(\vartheta_2)]\,[\mu_0(\theta_2 - 0) - \mu_0(\theta_1)],$$

где $\theta_1 < \vartheta_2 < \theta_2$.

Очевидно, при $\varepsilon \neq 0$ обе вариации отличны от нуля и обладают противоположными знаками, что противоречит предположению об экстремальности функции $\mu_0(\theta)$. Итак, ни в одной точке роста экстремальная функция $\mu_0(\theta)$ не может быть непрерывной, что и требовалось доказать. Принимая во внимание, что множество точек разрыва функции $\mu_0(\theta)$ не более, чем счетное, мы приходим к заключению: у этой функции есть точки непрерывности, и каждой точке непрерывности θ, $-\pi \leqslant \theta < \pi$, соответствует такое $h_\theta > 0$, что функция $\mu_0(\theta)$ постоянна на сегменте $[\theta;\ \theta + h_\theta]$. Таким образом, функция $\mu_0(\theta)$ является ступенчатой.

Чтобы уточнить множество точек разрыва экстремальной функции $\mu_0(\theta)$, предположим, что $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_2$, где $-\pi < \theta_1 < \theta_2 < \pi$, есть две точки разрыва этой функции. Определим вариацию $\varepsilon\eta(\theta)$ функции $\mu_0(\theta)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &\eta(\theta) = 0 && \text{при} \quad -\pi \leqslant \theta \leqslant \theta_1; \\ &\eta(\theta) = 1 && \quad \text{„} \qquad \theta_1 < \theta < \theta_2; \\ &\eta(\theta) = 0 && \quad \text{„} \qquad \theta_2 \leqslant \theta \leqslant \pi. \end{aligned}$$

Не трудно убедиться, что функция $\mu_0(\theta) + \varepsilon\eta(\theta)$ при надлежащем определении значений функции $\mu_0(\theta)$ в точках $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_2$ и при всех достаточно малых значениях $|\varepsilon|$ есть функция класса M. Вычисляя вариацию $\delta J(\mu_0)$ по формуле (2,3), мы получаем

$$\delta J(\mu_0) = \varepsilon\,[F_{\mu_0}(\theta_1) - F_{\mu_0}(\theta_2)].$$

Должно быть $\delta J(\mu_0) = 0$, ибо ε может принимать значения обоих знаков. Следовательно,

$$F_{\mu_0}(\theta_1) = F_{\mu_0}(\theta_2).$$

Итак, в точках разрыва экстремальной функции $\mu_0(\theta)$ функция $F_{\mu_0}(\theta)$, входящая в выражение (2,3) вариации $\delta J(\mu_0)$, имеет одинаковые значения. Поэтому, если при любом выборе функции $\mu(\theta)$ из класса M функция $F_{\mu_0}(\theta)$ принимает на сегменте $[-\pi;\ \pi]$ каждое свое значение не более n раз, то экстремальная функция имеет не более n точек разрыва. Легко убедиться, что свойство функции $F_\mu(\theta)$, о котором только что было упомянуто, совпадает с тем, которое предполагается в условии теоремы 1. Чтобы еще больше уточнить характеристику множества точек разрыва экстремальной функции $\mu_0(\theta)$ на сегменте $[-\pi;\ \pi]$, докажем следующую теорему.

Теорема II. В каждой точке разрыва экстремальной функции $\mu_0(\theta)$, реализующей максимум (минимум) функционала $J(\mu)$, функция $F_{\mu_0}(\theta)$ достигает своего абсолютного максимума (минимума) на сегменте $[-\pi; \pi]$.

Доказательство. Пусть $\theta = \theta_1$ есть точка разрыва функции $\mu_0(\theta)$ на сегменте $[-\pi; \pi]$, так что $-\pi < \theta_1 < \pi$, и пусть на полуоткрытом интервале $(\theta_0; \theta_1)$, где $-\pi \leqslant \theta_0 < \theta_1$, функция непрерывна (очевидно, такой интервал существует для каждой точки разрыва). Определим функцию $\eta(\theta)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \eta(\theta) &= 0 \quad \text{при } -\pi \leqslant \theta < \theta_0, \\ \eta(\theta) &= 1 \quad \text{,,} \quad \theta_0 < \theta < \theta_1, \\ \eta(\theta) &= 0 \quad \text{,,} \quad \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \pi \end{aligned}$$

и рассмотрим функцию $\mu_0^*(\theta) = \mu_0(\theta) + \varepsilon\eta(\theta)$. Легко убедиться, что при всех достаточно малых положительных значениях ε и надлежащем выборе значения $\mu_0(\theta)$ в точке $\theta = \theta_1$ функция $\mu_0^*(\theta)$ принадлежит к классу M. Вычисляя вариацию $\delta J(\mu_0)$ при переходе от функции $\mu_0(\theta)$ к функции $\mu_0^*(\theta)$ по формуле (2,3), мы получаем

$$\delta J(\mu_0) = \varepsilon [F_{\mu_0}(\theta_0) - F_{\mu_0}(\theta_1)].$$

Так как ε может принимать здесь только положительные значения, то в том случае, когда функция $\mu_0(\theta)$ реализует максимум функционала $J(\mu)$, должно иметь место неравенство

$$F_{\mu_0}(\theta_0) - F_{\mu_0}(\theta_1) \leqslant 0,$$

а когда эта функция реализует минимум функционала $J(\mu)$, должно иметь место неравенство

$$F_{\mu_0}(\theta_0) - F_{\mu_0}(\theta_1) \geqslant 0.$$

Таким образом, учитывая, что во всех точках разрыва функции $\mu_0(\theta)$ функция $F_{\mu_0}(\theta)$ имеет одинаковые значения, мы видим, что в случае максимизирующей (минимизирующей) функции $\mu_0(\theta)$ функция $F_{\mu_0}(\theta)$ принимает в каждой точке разрыва $\mu_0(\theta)$ такое значение, которое не меньше (не больше) ни одного значения этой функции во всех предыдущих точках сегмента $[-\pi; \pi]$. Поэтому, если последняя точка разрыва функции $\mu_0(\theta)$ есть $\theta = \pi$, то теорема доказана. Остается рассмотреть случай, когда последняя точка разрыва функции $\mu_0(\theta)$ есть $\theta = \theta_n < \pi$.

Определим функцию $\tilde{\eta}(\theta)$ условиями:

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(\theta) &= 0 \quad \text{при } -\pi \leqslant \theta \leqslant \theta_n; \\ \tilde{\eta}(\theta) &= 1 \quad \text{,,} \quad \theta_n < \theta < \theta_n + \delta \leqslant \pi; \\ \tilde{\eta}(\theta) &= 0 \quad \text{,,} \quad \theta_n + \delta \leqslant \theta \leqslant \pi. \end{aligned}$$

Легко проверить, что функция $\tilde{\mu}_0(\theta) = \mu_0(\theta) + \varepsilon\tilde{\eta}(\theta)$ при всех достаточно малых положительных значениях ε и при надлежащем выборе значения $\mu_0(\theta)$ в точке $\theta = \theta_n$ принадлежит к классу M. Вычисляя по формуле (2,3) вариацию $\delta J(\mu_0)$ при переходе от функции $\mu_0(\theta)$ к функции $\tilde{\mu}_0(\theta)$, получаем

$$\delta J(\mu_0) = \varepsilon [F_{\mu_0}(\theta_n + \delta) - F_{\mu_0}(\theta_n)].$$

Отсюда заключаем, что в случае максимизирующей функции $\mu_0(\theta)$ должно быть

$$F_{\mu_0}(\theta_n+\delta)-F_{\mu_0}(\theta_n)\leqslant 0,$$

а в случае минимизирующей функции должно быть

$$F_{\mu_0}(\theta_n+\delta)-F_{\mu_0}(\theta_n)\geqslant 0.$$

Установлением этих неравенств доказательство теоремы II, очевидно, завершается. Если дополнительно предположить, что функция $F_\mu(\theta)$ при любом выборе функции $\mu(\theta)$ из класса M является диференцируемой, то, очевидно, в каждой внутренней точке разрыва экстремальной функции $\mu_0(\theta)$ должно выполняться условие

$$F_{\mu_0}'(\theta)=0.$$

Это же условие должно выполняться и в точках $\theta=-\pi$, $\theta=\pi$, если вторая из этих точек тоже является точкой разрыва функции $\mu_0(\theta)$ и если $F_\mu(\theta)$ при любом выборе функции $\mu(\theta)$ из класса M является периодической, имеющей период 2π, как обычно бывает в приложениях рассматриваемого метода.

Резюмируя произведенное исследование, мы видим, что экстремальная функция $\mu_0(\theta)$ является ступенчатой с числом скачков, не превосходящим n, где n наибольшее возможное число экстремумов того же вида функции $F_\mu(\theta)$ на полусегменте $(-\pi;\ \pi]$, когда $\mu(\theta)$ пробегает класс M.

3. Переходя к приложениям метода, основания которого изложены в номере втором, рассмотрим прежде всего задачу об экстремуме кривизны образа окружности $|z|=r$, $0<r<1$, при отображениях круга $|z|<1$ однолистными регулярными выпуклыми в нем функциями $f(z)$, нормированными условиями $f(0)=0$, $f'(0)=1$. Этой задачей, в числе ряда других аналогичных задач, занимался Я. С. Мирошниченко, однако не получил точного ее решения вследствие элементарности примененного им метода. Обозначим через U^0 класс функций $f(z)$, однолистных регулярных и выпуклых в круге $|z|<1$, удовлетворяющих условиям нормировки $f(0)=0$, $f'(0)=1$. Класс U^0 определяется формулой [1]

$$f(z)=\int_0^z e^{-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln(1-\zeta e^{-i\theta})\,d\mu(\theta)}\,d\zeta, \tag{3,1}$$

где $\mu(\theta)$ пробегает класс M.

Не трудно доказать, что кривизна $K_r(\vartheta)$ образа окружности $|z|=r$, $0<r<1$, в точке $w=f(re^{i\vartheta})$ при отображении круга $|z|<1$ функцией (3,1) определяется формулой

$$K_r(\vartheta)=\left\{\frac{1+Re\left[\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}\right]}{|z|\cdot|f'(z)|}\right\}_{z=re^{i\vartheta}}. \tag{3,2}$$

Поскольку преобразование $f^*(z)=e^{i\vartheta}f(ze^{-i\vartheta})$ $(-\pi\leqslant\vartheta\leqslant\pi)$ является автоморфизмом класса U^0, при нахождении экстремумов кривизны

$K_r(\vartheta)$ можно принять, без ограничения общности, что $\vartheta = 0$. Вычисляя в этом предположении (3,2) для функции (3,1), получаем

$$K_r(0) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1-r^2}{r} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{d\mu(\theta)}{F(r, \theta)} \cdot e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln F(r,\theta)\, d\mu(\theta)}, \tag{3,3}$$

где $F(r, \theta) = 1 - 2r\cos\theta + r^2$.

Рассмотрим функционал

$$J(\mu) = \frac{r}{1-r^2} K_r(0). \tag{3,4}$$

Мы имеем

$$\delta J(\mu) = \varepsilon \int\limits_{-\pi}^{\pi} F_\mu(\theta)\, d\eta(\theta), \tag{3,5}$$

где

$$F_\mu(\theta) = C_\mu \left[\frac{1}{F(r, \theta)} + A_\mu \ln F(r, \theta)\right],$$

$$A_\mu = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{d\mu(\theta)}{F(r, \theta)}, \quad C_\mu = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln F(r,\theta)\, d\mu(\theta)}$$

Легко видеть, что

$$\frac{1}{(1+r)^2} \leqslant A_\mu \leqslant \frac{1}{(1-r)^2}. \tag{3,6}$$

Очевидно, функция $F_\mu(\theta)$ при любом выборе функции $\mu(\theta)$ из класса M есть непрерывная четная периодическая функция с периодом 2π. Вычисляя производную $F_\mu'(\theta)$, получаем

$$F_\mu'(\theta) = C_\mu \frac{2r\sin\theta}{F(r, \theta)}\left[A_\mu - \frac{1}{F(r, \theta)}\right]. \tag{3,7}$$

Отсюда, учитывая (3,6) и предполагая $A_\mu \neq \frac{1}{(1+r)^2}$, $\neq \frac{1}{(1-r)^2}$, мы видим, что функция $F_\mu(\theta)$ достигает максимума при $\theta = -\pi$, 0, π, а минимума при $\theta = -\alpha$ и $\theta = \alpha$, где α есть корень уравнения

$$F(r, \theta) = \frac{1}{A_\mu}.$$

Если $A_\mu = \frac{1}{(1+r)^2}$, то функция $F_\mu(\theta)$ имеет максимум при $\theta = 0$ и минимум при $\theta = \pm\pi$; если $A_\mu = \frac{1}{(1-r)^2}$, то функция $F_\mu(\theta)$, наоборот, имеет максимум при $\theta = \pm\pi$ и минимум при $\theta = 0$. Основываясь на результатах предыдущего номера, мы можем утверждать, что максимум функционала $J(\mu)$ реализует ступенчатая функция $\mu_0(\theta)$, у которой не более двух точек разрыва, причем этими точками могут быть только точки $\theta = 0$ и $\theta = \pi$; что касается минимума функционала $J(\mu)$, то функция, которая его реализует, тоже имеет не более двух точек разрыва: $\theta = -\alpha$ и $\theta = \alpha$, где $-\pi < \alpha < \pi$.

Рассмотрим сначала случай максимума. Пусть $2\pi\lambda$ и $2\pi(1-\lambda)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, скачки функции $\mu(\theta)$ в точках $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, а сама функция $\mu(\theta)$ пусть является ступенчатой и принадлежит к классу M. Тогда для $J(\mu)$ мы получаем следующее выражение:

$$J(\mu) = J(r, \lambda) = \left[\frac{\lambda}{(1-r)^2} + \frac{1-\lambda}{(1+r)^2}\right](1-r)^{2\lambda}(1+r)^{2(1-\lambda)} =$$

$$= \lambda\varrho^{1-\lambda} + (1-\lambda)\varrho^{-\lambda}, \tag{3,8}$$

где $\varrho = \left(\dfrac{1+r}{1-r}\right)^2$.

Требуется вычислить абсолютный максимум функции $J(r, \lambda)$ при фиксированном r, $0 < r < 1$, на сегменте $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Мы имеем, полагая $\varrho = e^t$,

$$\frac{dJ}{d\lambda} = e^{-\lambda t}\, t(e^t - 1)\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{e^t - 1} - \lambda\right). \tag{3,9}$$

Обозначая $\psi(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{e^t - 1}$, легко доказать, что

$$\psi(-t) = 1 - \psi(t),$$

откуда следует, что $\psi(0) = \dfrac{1}{2}$.

Кроме того, можно убедиться в существовании следующего равенства:

$$\psi'(t) = -t^{-2}(e^t - 1)^{-2}\sum_{n=4}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}(2^n - n^2 + n - 2).$$

Так как функция $g(x) = 2^x - x^2 + x - 2$ при $x \geqslant 4$ монотонно возрастает вместе с x, то $g(x) \geqslant 2$ при $x \geqslant 4$ и, следовательно, $\psi'(t) < 0$ при $t > 0$. Таким образом, при возрастании t от 0 до $+\infty$ величина $\psi(t)$ монотонно убывает от $\dfrac{1}{2}$ до 0, а потому, учитывая связь между $\psi(t)$ и $\psi(-t)$, заключаем, что при монотонном убывании t от 0 до $-\infty$ величина $\psi(t)$ монотонно возрастает от $\dfrac{1}{2}$ до 1. Пользуясь этими замечаниями, из формулы (3,9) легко усмотреть, что функция $J(r, \lambda)$ достигает своего абсолютного максимума на сегменте [0; 1] в точке $\lambda = \psi(t)$ и только в ней. Если обозначить

$$\varphi(t) = -1 + \frac{t}{2} + \frac{t}{e^t - 1}, \tag{3,10}$$

то после несложных вычислений можно получить следующую формулу:

$$\max J(r;\lambda) = e^{g(t)} \frac{\operatorname{sh}\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1), \tag{3,11}$$

где

$$t = 2 \ln \frac{1+r}{1-r}, \quad 0 < r < 1, \quad \lambda = \frac{1}{t} - \frac{1}{e^t - 1}. \tag{3,12}$$

Так как $J(r;0) = J(r;1) = 1$, то $\max J(r;\lambda) > 1$.

Переходим теперь к установлению вида экстремальной функции в классе U^0. Эта функция должна определяться формулой (3,1) и соответствовать такой функции $\mu_0(\theta)$ класса M, которая является ступенчатой с двумя точками разрыва $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, причем в этих точках ее скачки равны $2\pi\lambda$ и $2\pi(1-\lambda)$ соответственно, где λ определяется формулой (3,12). Учитывая все это, мы получаем

$$f(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{(1-\zeta)^{2\lambda}(1+\zeta)^{2(1-\lambda)}}. \tag{3,13}$$

Здесь, как показано выше, $0 < \lambda < \frac{1}{2}$. Следует вспомнить, что функция (3,13) реализует максимум кривизны образа окружности $|z| = r$, $0 < r < 1$, где r связано с λ соотношением (3,12) в точке $f(r)$. Функция же, реализующая этот максимум в точке, которая соответствует $z = re^{i\vartheta}$, $-\pi \leqslant \vartheta \leqslant \pi$, определяется формулой

$$f_\vartheta(z) = e^{i\vartheta} f(ze^{-i\vartheta}) = \int_0^z \frac{d\zeta}{(1-\zeta e^{-i\vartheta})^{2\lambda}(1+\zeta e^{-i\vartheta})^{2(1-\lambda)}}. \tag{3,14}$$

Производя в (3,14) замену переменной

$$\omega = \frac{1-\zeta e^{-i\vartheta}}{1+\zeta e^{-i\vartheta}},$$

легко получить следующее выражение для функции $f_\vartheta(z)$:

$$f_\vartheta(z) = \frac{e^{i\vartheta}}{2(1-2\lambda)}\left[1 - \left(\frac{1-ze^{-i\vartheta}}{1+ze^{-i\vartheta}}\right)^{1-2\lambda}\right]. \tag{3,15}$$

Пользуясь формулой (3,14), замечаем, что

$$f_\pi(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{(1-\zeta)^{2\lambda_1}(1+\zeta)^{2(1-\lambda_1)}}, \tag{3,16}$$

где $\frac{1}{2} < \lambda_1 < 1$.

Так как формула (3,16) вполне аналогична (3,13), то можно утверждать, что функция (3,13) при $\frac{1}{2} < \lambda < 1$ тоже реализует максимум кривизны образа окружности $|z|=r$, где r связано с λ соотношением

$$1-\lambda=\frac{1}{t}-\frac{t}{e^t-1},\quad t=2\ln\frac{1+r}{1-r},$$

но только уже не в точке $f(r)$, а в точке $f(-r)$. Полагая в (3,15 $\lambda\to\frac{1}{2}$, получаем путем несложных преобразований

$$f_\vartheta^*(z)=\frac{e^{i\vartheta}}{2}\ln\frac{1+ze^{-i\vartheta}}{1-ze^{-i\vartheta}}. \tag{3,17}$$

Наконец, при $\lambda\to 0$ мы получаем из (3,15)

$$\tilde{f}_\vartheta(z)=\frac{z}{1+ze^{-i\vartheta}}. \tag{3,18}$$

Обратимся теперь к решению вопроса о минимуме функционала $J(\mu)$. Мы уже видели, что функция $\mu_0(\theta)$, реализующая этот минимум, является ступенчатой с двумя (и не более) точками разрыва, которыми могут быть любые две точки $\theta=-\alpha$, $\theta=\alpha$, где $-\pi<\alpha<\pi$, причем скачки ее в этих точках равны $2\pi\lambda$ и $2\pi(1-\lambda)$, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, соответственно. Однако не трудно убедиться, что в этих предположениях относительно функции $\mu_0(\theta)$, мы получаем для $J(\mu_0)$ по формуле (3,4)

$$J(\mu_0)=1.$$

Таким образом, минимум функционала $J(\mu_0)$ равен единице, и его реализует любая ступенчатая функция класса M с точками разрыва $\theta=-\alpha$, $\theta=\alpha$, $-\pi<\alpha<\pi$, и скачками $2\pi\lambda$ и $2\pi(1-\lambda)$ в этих точках. Для функций класса U^0, соответствующих этим функциям класса M, мы получаем следующую формулу:

$$F(z)=\int_0^z\frac{d\zeta}{(1-\zeta e^{-i\alpha})^{2\lambda}(1-\zeta e^{i\alpha})^{2(1-\lambda)}}. \tag{3,19}$$

Подвергая функцию (3,19) преобразованию

$$e^{i\vartheta}F(ze^{-i\vartheta})\qquad(-\pi\leqslant\vartheta\leqslant\pi),$$

получаем общий вид функций класса U^0, реализующих минимум кривизны образа окружности $|z|=r$, $0<r<1$:

$$F_\vartheta(z)=\int_0^z\frac{d\zeta}{(1-\zeta e^{-i(\alpha+\vartheta)})^{2\lambda}(1-\zeta e^{i(\alpha-\vartheta)})^{2(1-\lambda)}}. \tag{3,20}$$

Так как в формуле (3,20) ни λ, ни α не связаны с r, то, следовательно, любая из функций (3,20) реализует минимум кривизны образа любой окружности $|z|=r$, $0<r<1$.

Полагая в (3,20) $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\vartheta=-\frac{\pi}{2}$ или $\alpha=-\frac{\pi}{2}$, $\vartheta=\frac{\pi}{2}$, мы преобразуем (3,20) к виду (3,13), откуда следует, что каждая функция (3,13) тоже реализует минимум кривизны образа каждой окружности $|z|=r$, $0<r<1$, в точках $f(\pm ir)$.

При помощи замены переменной

$$\omega = \frac{1 - \zeta e^{-i(\alpha+\vartheta)}}{1 - \zeta e^{i(\alpha-\vartheta)}}$$

интеграл (3,20) может быть вычислен в конечном виде, и мы получаем окончательно в предположении $2\lambda \neq 1$, $\sin\alpha \neq 0$:

$$F_\vartheta(z) = \frac{ie^{i\vartheta}}{2\sin\alpha\cdot(1-2\lambda)}\left[1 - \left(\frac{1-ze^{-i(\alpha+\vartheta)}}{1-ze^{i(\alpha-\vartheta)}}\right)^{1-2\lambda}\right]. \tag{3,21}$$

При $\lambda \to \frac{1}{2}$ эта формула превращается в такую:

$$F_\vartheta^*(z) = \frac{ie^{i\vartheta}}{2\sin\alpha}\ln\frac{1-ze^{i(\alpha-\vartheta)}}{1-ze^{-i(\alpha+\vartheta)}}, \tag{3,22}$$

а при $\lambda = 0$ она принимает наиболее простой вид

$$F_\vartheta(z) = \frac{z}{1-ze^{i(\alpha-\vartheta)}}. \tag{3,23}$$

Таким образом, среди функций класса U^0, реализующих минимум функционала K_r, есть и ступенчатые функции с одной точкой разрыва. Характеристическая особенность функций (3,23) состоит в том, что они преобразуют каждую окружность $|z| = r$ тоже в окружность радиуса $\frac{r}{1-r^2}$.

Резюмируя произведенные исследования, получаем следующую теорему.

Теорема III. При отображении круга $|z| < 1$ однолистными регулярными выпуклыми в этом круге функциями $f(z)$, нормированными условиями $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, кривизна $K_r(\vartheta)$ образа окружности $|z| = r$, $0 < r < 1$, при любом значении ϑ, $-\pi \leqslant \vartheta \leqslant \pi$, удовлетворяет неравенствам

$$\frac{1-r^2}{r} \leqslant K_r(\vartheta) \leqslant \frac{1-r^2}{r}A(r),$$

где $A(r) = e^{\varphi(t)}\dfrac{\operatorname{sh}\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}$, причем $\varphi(t) = -1 + \dfrac{t}{2} + \dfrac{t}{e^t-1}$, $t = 2\ln\dfrac{1+r}{1-r}$.

Границы, устанавливаемые этими неравенствами, точные и достигаются: нижняя — функциями (3,21), (3,22), (3,23), верхняя — функциями (3,15), и только ими.

4. В настоящем номере рассмотрим задачу об экстремуме кривизны образа окружности $|z| = r$, $0 < r < 1$ при отображениях круга однолистными в нем s-кратно симметричными регулярными выпуклыми функциями, нормированными условиями $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$. Класс этих функций условимся обозначать U_s^0, где s-целое $\geqslant 1$. Очевидно, $U_s^0 \subset U_1^0 \equiv U^0$. Как известно, класс функций U_s^0 получается из класса функций U^0 при помощи преобразования

$$F(z) = \int_0^z \sqrt[s]{f'(\zeta)}\,d\zeta, \tag{4,1}$$

где $f(z) \in U^0$, а корень определяется условием $\sqrt[s]{1} = 1$. Используя формулу (3,1), мы получаем для класса U_s^0 следующее представление:

$$F(z) = \int_0^z e^{-\frac{1}{\pi s}\int_{-\pi}^{\pi} \ln (1-\zeta^s e^{-i\theta})\, d\mu(\theta)}\, d\zeta, \tag{4,2}$$

где $\mu(\theta) \in M$. Вычисляя кривизну $K_r(\vartheta)$ образа окружности $|z| = r$, $0 < r < 1$, по формуле (3,2) и полагая в ней $\vartheta = 0$, получаем

$$K_r(0) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^{2s}}{r}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu(\theta)}{1-2r^s\cos\theta+r^{2s}}\; e^{\frac{1}{2\pi s}\int_{-\pi}^{\pi}\ln(1-2r^s\cos\theta+r^{2s})\,d\mu(\theta)}. \tag{4,3}$$

Полагая $r^s = \varrho$, рассмотрим функционал

$$J_s(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\mu(\theta)}{F(\varrho;\theta)}\; e^{\frac{1}{2\pi s}\int_{-\pi}^{\pi}\ln F(\varrho;\,\theta)\,d\mu(\theta)}, \tag{4,4}$$

где $F(\varrho;\theta) = 1-2\varrho\cos\theta+\varrho^2$, $\quad 0<\varrho<1$.

Варьируя $J_s(\mu)$, получаем

$$\delta J_s(\mu) = \varepsilon\int_{-\pi}^{\pi} F_{\mu,\,s}(\theta)\,d\eta(\theta), \tag{4,5}$$

где

$$F_{\mu,\,s}(\theta) = C_{\mu,\,s}\left[\frac{1}{F(\varrho;\theta)} + A_{\mu,\,s}\ln F(\varrho;\theta)\right], \tag{4,6}$$

$$C_{\mu,\,s} = \frac{1}{2\pi}e^{\frac{1}{2\pi s}\int_{-\pi}^{\pi}\ln F(\varrho;\,\theta)\,d\mu(\theta)}, \quad A_{\mu,\,s} = \frac{1}{2\pi s}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\mu(\theta)}{F(\varrho;\theta)}.$$

Легко видеть, что

$$\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{(1+\varrho)^2} \leqslant A_{\mu,\,s} \leqslant \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{(1-\varrho)^2}. \tag{4,7}$$

Из (4,6) получаем

$$F'_{\mu,\,s}(\theta) = C_{\mu,\,s}\frac{2\varrho\sin\theta}{F(\varrho;\theta)}\left[A_{\mu,\,s} - \frac{1}{F(\varrho;\theta)}\right]. \tag{4,8}$$

Так как величина $\dfrac{1}{F(\varrho;\,\theta)}$ изменяется в границах от $\dfrac{1}{(1+\varrho)^2}$ до $\dfrac{1}{(1-\varrho)^2}$, то при $\dfrac{1}{s}\cdot\dfrac{1}{(1-\varrho)^2} < \dfrac{1}{(1+\varrho)^2}$, т. е. при

$$0<\varrho<\frac{\sqrt{s}-1}{\sqrt{s}+1} \quad (s<1) \tag{4,9}$$

разность $A_{\mu,s} - \dfrac{1}{F(\varrho;\theta)}$ отрицательна при всех значениях θ, $-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$, и для любой функции $\mu(\theta)$ класса M. Поэтому функции $F_{\mu,s}(\theta)$ при условии (4,9) имеет минимум в точках $\theta=\pm\pi$ и максимум в точке $\theta=0$. В этом случае, очевидно, экстремальная функция $\mu_0(\theta)$ есть ступенчатая с одним скачком. Если вместо условия (4,9) выполняется условие

$$1>\varrho>\frac{\sqrt{s}-1}{\sqrt{s}+1}, \tag{4,10}$$

то среди функций класса M существуют такие, для которых функция $F_{\mu,s}(\theta)$ имеет максимум в точках $\theta=0$, $\theta=\pm\pi$ и минимум в точках $\theta=\pm a$, где a определяется из уравнения

$$F(\varrho;a)=\frac{1}{A_{\mu,s}}. \tag{4,11}$$

Поэтому при условии (4,10) следует ожидать, что экстремальная функция $\mu_0(\theta)$ в случае максимума функционала $J_s(\mu)$ есть ступенчатая с двумя точками разрыва: $\theta=0$ и $\theta=\pi$. В случае же минимума функционала $J_s(\mu)$ экстремальная функция $\mu_0(\theta)$ может иметь разрывы в двух точках $\theta=\pm a$, где $-\pi<a<\pi$, $a\neq 0$, или же в одной точке $\theta=\beta$, где β некоторое число из полуоткрытого интервала $(-\pi;\pi]$, подлежащее определению. Рассмотрим подробнее случай максимума $J_s(\mu)$ при условии (4,10). Мы имеем следующее выражение для $J_s(\mu)$:

$$J_s(\mu)=\lambda(1-\varrho)^{2\left(\frac{\lambda}{s}-1\right)}(1+\varrho)^{2\frac{1-\lambda}{s}}+(1-\lambda)(1-\varrho)^{\frac{2\lambda}{s}}(1+\varrho)^{2\left(\frac{1-\lambda}{s}-1\right)}. \tag{4,12}$$

Требуется определить максимум $J_s(\mu)$ на сегменте $[0;1]$, считая ϱ, $0<\varrho<1$, фиксированной величиной. Для упрощения выражения (4,12), разделим обе части равенства (4,12) на $(1-\varrho)^{2\left(\frac{1}{s}-1\right)}$ и положим $\left(\frac{1+\varrho}{1-\varrho}\right)^2=e^t$. Тогда получим

$$\tilde{J}_s(\mu)\equiv(1-\varrho)^{2\left(\frac{1}{s}-1\right)}J_s(\mu)=\lambda e^{\frac{1-\lambda}{s}t}+(1-\lambda)e^{\left(\frac{1-\lambda}{s}-1\right)t}. \tag{4,13}$$

Диференцируя $\tilde{J}_s(\mu)$ по λ, находим

$$\frac{d\tilde{J}_s}{d\lambda}=\frac{1}{s}te^{\left(\frac{1-\lambda}{s}-1\right)t}(e^t-1)\left(\frac{s}{t}-\frac{1}{e^t-1}-\lambda\right). \tag{4,14}$$

Введем обозначение:

$$\psi_s(t)=\frac{s}{t}-\frac{1}{e^t-1}=\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{e^t-1}\right)+\frac{s-1}{t}.$$

На основании результатов предыдущего номера можно утверждать, что $\psi_s(t)$ при возрастании t от 0 до $+\infty$ монотонно убывает от $+\infty$ до 0. Так как $0\leqslant\lambda<1$, то при $\psi_s(t)\geqslant 1$ из формулы (4,14) следует что $\frac{d\tilde{J}_s}{d\lambda}>0$, если $0\leqslant\lambda<1$, следовательно, $J_s(\mu)$ монотонно возрастает вместе с λ, так что максимум $J_s(\mu)$ на сегменте имеет место при $\lambda=1$. Если же выполняется условие $\psi_s(t)<1$, то максимум $J_s(\mu)$

на сегменте $[0;1]$ имеет место при $\lambda = \psi_s(t)$. Обозначая через t_0 корень уравнения

$$\psi_s(t_0) = 1, \tag{4,15}$$

мы видим, таким образом, что при $t_0 \leqslant 1$ максимум функционала $J_s(\mu)$ реализует ступенчатая функция $\mu_0(\theta)$ класса M с одной точкой разрыва $\theta = 0$, а при $t_0 > 1$ — ступенчатая функция с двумя точками разрыва: $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, причем скачки ее в этих точках равны $2\pi\psi_s(t)$ и $2\pi[1 - \psi_s(t)]$ соответственно, где

$$\psi_s(t) = \frac{s}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \quad \text{и} \quad t = 2 \ln \frac{1+\varrho}{1-\varrho}.$$

Вычисляя $J_s(\mu)$ при $\lambda = \psi_s(t)$, получаем

$$\max_{0 \leq \lambda \leq 1} J_s(\mu) = s e^{\varphi_s(t)} \frac{\operatorname{sh} \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}, \quad t < t_0,$$

где $\varphi_s(t) = -1 + \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\right) t + \frac{1}{s} \cdot \frac{t}{e^t - 1}$, $t = 2 \ln \frac{1 + r^s}{1 - r^s}$.

Функция U_s^0, реализующая этот максимум при $z = r$, на основании сказанного выше и формулы (4,2), имеет вид

$$F(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{(1-\zeta^s)^{\frac{2\lambda}{s}} (1+\zeta^s)^{\frac{2}{s}(1-\lambda)}}, \tag{4,16}$$

где $\lambda = \frac{s}{t} - \frac{1}{e^t - 1}$, $t = 2 \ln \frac{1 + r^s}{1 - r^s}$, причем $r > \left(\operatorname{th} \frac{t_0}{4}\right)^{\frac{1}{s}}$ и t_0 есть корень уравнения $\frac{s}{t} - \frac{1}{e^t - 1} = 1$. Подвергая функцию $F(z)$ преобразованию $e^{i\vartheta} F(ze^{-i\vartheta})$, $-\pi \leqslant \vartheta \leqslant \pi$, получаем функцию класса U_s^0, реализующую максимум функционала $J_s(\mu)$ при $z = re^{i\vartheta}$. Если $r \leqslant \left(\operatorname{th} \frac{t_0}{4}\right)^{\frac{1}{s}}$, то функция класса U_s^0, реализующая максимум $J_s(\mu)$ при $z = r$, имеет вид

$$F(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{(1-\zeta^s)^{\frac{2}{s}}}. \tag{4,17}$$

Рассмотрим теперь вопрос о минимуме $J_s(\mu)$. Мы видели выше, что этот минимум реализуется ступенчатой функцией $\mu_0(\theta)$ с двумя точками разрыва $\theta = \pm\alpha$ или с одной $\theta = \alpha$, где α подлежит определению. Пользуясь формулой (4,4), мы находим, что для любой такой функции $\mu_0(\theta)$

$$J_s(\mu_0) = (1 - 2\varrho\cos\alpha + \varrho^2)^{-\left(1 - \frac{1}{s}\right)}.$$

Отсюда видим, что

$$\min J_s(\mu_0) = (1 + \varrho)^{-2\left(1 - \frac{1}{s}\right)}, \tag{4,18}$$

причем $\alpha = \pi$. Таким образом, экстремальная функция $\mu_0(\theta)$ в случае минимума $J_s(\mu)$ есть ступенчатая с одной точкой разрыва $\theta = \pi$, а потому соответствующая ей функция $\check{F}(z)$ класса U_s^0 имеет вид

$$\check{F}(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{(1+\zeta^s)^{\frac{2}{s}}}. \tag{4,19}$$

Сравнивая (4,17) и (4,19), замечаем, что $\check{F}(z) = e^{i\frac{\pi}{s}} F(ze^{-i\frac{\pi}{s}})$, т. е. что функция класса U_s^0, реализующая минимум кривизны образа окружности $|z| = r$, реализует и максимум этой кривизны, но при условии, что $r \leqslant \left(\operatorname{th}\frac{t_0}{4}\right)^{\frac{1}{s}}$, где t_0 — корень уравнения $\frac{s}{t_0} - \frac{1}{e^{t_0} - 1} = 1$. При невыполнении этого условия обе функции не совпадают. Таким образом, при $s > 1$ обстоятельства реализации экстремумов кривизны образа окружности $|z| = r$, $0 < r < 1$, существенно иные, чем при $s = 1$. Подводя итоги исследования настоящего номера, можем сформулировать следующую теорему.

Теорема IV. При отображениях круга $|z| < 1$ однолистными регулярными s-кратно (s-целое $\geqslant 1$) симметричными выпуклыми в этом круге функциями $F(z)$, нормированными условиями $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$, кривизна $K_r(\vartheta)$ образа окружности $|z| = r$, $0 < r < 1$, в точке $F(re^{i\frac{\vartheta}{s}})$ при любом ϑ, $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$, удовлетворяет неравенствам:

$$\frac{1}{r}\,\frac{1-r^s}{(1+r^s)^{1-\frac{2}{s}}} \leqslant K_r(\vartheta) \leqslant \frac{1}{r}\cdot\frac{1+r^s}{(1-r^s)^{1-\frac{2}{s}}},$$

если $0 < r \leqslant r_0$, где $r_0 = \left(\operatorname{th}\frac{t_0}{4}\right)^{\frac{1}{s}}$, $\frac{s}{t_0} - \frac{1}{e^{t_0}-1} = 1$, и неравенствам

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{1-r^s}{(1+r^s)^{1-\frac{2}{s}}} \leqslant K_r(\vartheta) \leqslant \frac{1}{r}\,\frac{1+r^s}{(1-r^s)^{1-\frac{2}{s}}} A_s(r),$$

если $r > r_0$, где

$$A_s(r) = se^{\varphi_s(t)}\,\frac{\operatorname{sh}\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} > 1,$$

$$\varphi_s(t) = -1 + \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\right)t + \frac{t}{s(e^t-1)}, \quad t = 2\ln\frac{1+r^s}{1-r^s}.$$

Границы, устанавливаемые этими неравенствами, точные и достигаются: нижняя — только функциями $e^{i\frac{\vartheta}{s}}\check{F}(ze^{-i\frac{\vartheta}{s}})$, где $\check{F}(z)$ определяется формулой (4,19), верхняя — только функциями $e^{i\frac{\vartheta}{s}}F(ze^{-i\frac{\vartheta}{s}})$, где $F(z)$ при $r \leqslant r_0$ определяется формулой (4,17), а при $r > r_0$ формулой (4,16).

5. В настоящем номере мы рассмотрим задачу об экстремуме кривизны образа окружности $|z| = r$, $r > 1$ при отображениях круговой области $|z| > 1$ классом Σ^0 однолистных и выпуклых в этой области функций $\Phi(z)$, нормированных условиями $\Phi(z_0) = \omega_0$, $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) = 1$, где $|z_0| > 1$. Этот класс функций может быть представлен формулой

$$\Phi(z) = w_0 + \int_0^z e^{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 - \frac{1}{\zeta} e^{i\theta}\right) d\mu(\theta)} d\zeta, \tag{5,1}$$

где $\mu(\theta)$ есть неубывающая на сегменте $[-\pi; \pi]$ функция, нормированная условиями:

$$\mu(-\pi) = \mu(-\pi + 0) = 0, \quad \mu(\pi) = 2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta} d\mu(\theta) = 0. \tag{5,2}$$

Условимся обозначать этот класс функций через M^*. Очевидно, $M^* \subset M$. Вычисляя кривизну $K_r(0)$ образа окружности $|z| = r$, $r > 1$, при $z = r$ для функций (5,1) так, как это делалось в предыдущем изложении, получаем

$$K_r(0) = \frac{1 - \frac{1}{r^2}}{r} J(\mu), \tag{5,3}$$

где

$$J(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\mu(\theta)}{F(r;\theta)} \cdot e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\frac{1}{F(r;\theta)} d\mu(\theta)}, \quad F(r;\theta) = 1 - \frac{2}{r}\cos\theta + \frac{1}{r^2}.$$

Требуется найти абсолютный максимум и абсолютный минимум функционала (5,3) в классе M^* или же в классе M, но при дополнительных условиях:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos\theta \, d\mu(\theta) = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin\theta \, d\mu(\theta) = 0. \tag{5,4}$$

Для решения этой задачи образуем вспомогательный функционал

$$\tilde{J}(\mu) = J(\mu) + C_1\int_{-\pi}^{\pi} \cos\theta \, d\mu(\theta) + C_2\int_{-\pi}^{\pi} \sin\theta \, d\mu(\theta) \tag{5,5}$$

и изучим его свободный экстремум в классе M. Варьируя $\tilde{J}(\mu)$, получаем

$$\delta\tilde{J}(\mu) = \varepsilon\int_{-\pi}^{\pi} F_\mu(\theta) \, d\eta(\theta), \tag{5,6}$$

где

$$F_\mu(\theta) = C_\mu\left[\frac{1}{F(r;\theta)} + A_\mu \ln\frac{1}{F(r;\theta)}\right] + C_1\cos\theta + C_2\sin\theta.$$

Здесь

$$C_\mu = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln F(r\,;\,\theta)\, d\mu(\theta)} > 0, \quad A_\mu = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{d\mu(\lambda)}{F(r;\theta)} > 0.$$

Исследуем $F_\mu'(\theta)$. Мы имеем

$$F_\mu'(\theta) = -\frac{2}{r}\sin\theta\, C_\mu\left(\frac{1}{F^2} + \frac{A_\mu}{F}\right) - C_1\sin\theta + C_2\cos\theta,$$

где, для сокращения записи, положено $F = F(r;\theta)$, Уравнение $F_\mu'(\theta) = 0$ перепишем в виде

$$\frac{1}{F^2} + \frac{A_\mu}{F} = C + D\operatorname{ctg}\theta, \tag{5,7}$$

где $C = -\frac{r}{2}\frac{C_1}{C_\mu}$, $\quad D = \frac{r}{2}\frac{C_2}{C_\mu}$.

Докажем, что уравнение (5,7) имеет не более четырех корней на сегменте $[-\pi;\,\pi]$. Для этого положим

$$p(\theta) = \frac{1}{F^2} + \frac{A_\mu}{F} - C - D\operatorname{ctg}\theta. \tag{5,8}$$

Диференцируя (5,8) по θ, находим

$$p'(\theta) = -\frac{4r\sin\theta}{F^3} - \frac{2rA_\mu\sin\theta}{F^2} + D\cdot\operatorname{cosec}^2\theta.$$

Если $D > 0$, то $p'(\theta)$ сохраняет знак $+$ на интервале $(-\pi;\,0)$; если $D<0$, то $p'(\theta)$ сохраняет знак $-$ на интервале $(0;\,\pi)$. Поэтому при $D > 0$ функция $p(\theta)$ имеет только один корень на интервале $(-\pi;\,0)$, а при $D < 0$ только один корень на интервале $(0;\,\pi)$. Если бы $D = 0$, то функция $p(\theta)$ имела бы не более двух корней на сегменте $[-\pi;\,\pi]$. Предполагая $D > 0$, исследуем функцию $p'(\theta)$ на интервале $(0;\,\pi)$. Поскольку

$$p'(\theta) = -\frac{2r}{\sin^2\theta}\left[\sin^3\theta\left(\frac{2}{F^3} + \frac{A_\mu}{F^2}\right) - \frac{D}{2r}\right],$$

то рассмотрим функцию

$$q(\theta) = \sin^3\theta\left(\frac{2}{F^3} + \frac{A_\mu}{F^2}\right).$$

Так как функция $\sin\theta$ убывает на сегменте $\left[\frac{\pi}{2};\,\pi\right]$, а функция $\frac{2}{F^3} + \frac{A_\mu}{F^2}$ убывает на сегменте $[0\,;\,\pi]$ (ибо $A_\mu > 0$) при возрастании θ, то $q(\theta)$ убывает на сегменте $\left[\frac{\pi}{2};\,\pi\right]$. Остается изучить ее поведение на сегменте $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$. Для этого вычислим производную $q'(\theta)$. Мы получаем

$$q'(\theta) = 3\sin^2\theta\cos\theta\left(\frac{3}{F^4} + \frac{2A_\mu}{F^3}\right)\left(\frac{2F + A_\mu F^2}{3 + A_\mu F} - \frac{4}{3}r\sin\theta\operatorname{tg}\theta\right).$$

Так как $\cos\theta = \dfrac{1+r^2-F}{2r}$, то выражение в квадратных скобках можно представить в виде

$$\frac{6(1-r^2)^2+[2A_\mu(1-r^2)^2-6(1+r^2)]F-A_\mu(1+r^2)F^2-A_\mu F^3}{3(3+A_\mu F)(1+r^2-F)}.$$

Обозначая через $\varphi(F)$ числитель этой дроби и замечая, что при монотонном возрастании θ от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$ величина F монотонно растет от $(1-r)^2$ до $1+r^2$, легко убедиться, что $\varphi''(F)<0$ при $(1-r)^2\leqslant F\leqslant 1+r^2$ и что $\varphi((1-r)^2)>0$, $\varphi(1+r^2)<0$. Отсюда ясно, что $\varphi(F)$ один, и только один, раз обращается в нуль на интервале $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$. Поэтому функция $q(\theta)$ имеет на интервале $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ максимум. Поэтому функция $p'(\theta)$ имеет не более двух корней на интервале $(0;\pi)$, а следовательно, функция $p(\theta)$ не более трех. Таким образом, при $D>0$ функция $p(\theta)$ имеет не более четырех корней на интервале $(-\pi;\pi)$. Легко видеть, что заключение остается в силе и при $D<0$, так как функция $q(\theta)$ нечетная. Таким образом, функция $F_\mu(\theta)$ имеет не более четырех экстремумов на сегменте $[-\pi;\pi]$, и потому экстремальная функция $\mu_0(\theta)$ как в случае максимума функционала $J(\mu)$, так и в случае минимума его является ступенчатой функцией класса M с двумя (и не более) точками разрыва. С другой стороны, учитывая, что эта функция должна принадлежать к подклассу M^* класса M, мы видим, что она не может иметь менее двух точек разрыва. Следовательно, эта функция имеет только две точки разрыва. Если эти точки есть $\theta=\alpha$ и $\theta=\beta$, где $\alpha<\beta$, а скачки в этих точках есть $2\pi\lambda$ и $2\pi(1-\lambda)$ соответственно, то из (5,4) следует:

$$\begin{gathered}\lambda\cos\alpha+(1-\lambda)\cos\beta=0,\\ \lambda\sin\alpha+(1-\lambda)\sin\beta=0.\end{gathered}\tag{5,9}$$

Легко видеть, что условием совместности этой системы является уравнение $\sin(\alpha-\beta)=0$, из которого получаем $\beta=\alpha+\pi$. Пользуясь этим результатом, из (5,9) находим $\lambda=\dfrac{1}{2}$. Таким образом, функция класса Σ^0, реализующая экстремум функционала (5,3) на основании формулы (5,1), имеет следующий вид:

$$\Phi(z)=z+\frac{e^{2i\alpha}}{z}+\text{const},\tag{5,10}$$

где $\alpha=0$ в случае максимума и $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ в случае минимума $J(\mu)$. Легко заметить, что при любом α, $-\pi\leqslant\alpha\leqslant\pi$, функция (5,10) реализует максимум $J(\mu)$ при $z=\pm re^{i\alpha}$ и минимум при $z=\pm ire^{i\alpha}$ и что

$$\min J(\mu)=\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{r^2}\right)^2},\qquad \max J(\mu)=\frac{1+\dfrac{1}{r^2}}{\left(1-\dfrac{1}{r^2}\right)^3}.$$

Подводя итоги исследованию этого номера, получаем следующую теорему.

— Теорема V. При отображениях круговой области $|z|>1$ однолистными и выпуклыми в ней функциями $\Phi(z)$, нормированными условиями $\Phi(\infty)=\infty$, $\Phi'(\infty)=1$, кривизна $K_r(\vartheta)$ образа окружности $|z|=r$, $1<r$, в точке $\Phi(re^{i\vartheta})$, $-\pi\leqslant\vartheta\leqslant\pi$, удовлетворяет неравенствам

$$\frac{1-\frac{1}{r^2}}{r\left(1+\frac{1}{r^2}\right)^2}\leqslant K_r(\vartheta)\leqslant\frac{1+\frac{1}{r^2}}{r\left(1-\frac{1}{r^2}\right)^2}.$$

Границы, устанавливаемые этими неравенствами, точные и достигаются функциями (5,10) и только ими.

6. В настоящем номере рассмотрим класс функций с ограниченным вращением, определяемый формулой [2]:

$$f(z)=z-\frac{e^{i\alpha}\cos\alpha}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[z+e^{i\theta}\ln(1-ze^{-i\theta})]\,d\mu(\theta), \qquad (6,1)$$

где $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и $\mu(\theta)$ пробегает класс M. Условимся обозначать класс функций (6,1) через $\tilde{U}_\alpha$. Решим задачу об экстремуме функционала $\arg f'(z)$ на окружности $|z|=r$, $0<r<1$, при условии, что $f(z)\in\tilde{U}_\alpha$. Вычисляя $f'(z)$, получаем

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1+ze^{-i(\theta+2\alpha)}}{1-ze^{-i\theta}}\,d\mu(\theta). \qquad (6,2)$$

Отсюда следует, что в точке $z=r$, которую мы берем, как обычно, без ограничения общности,

$$J(\mu)=[\arg f'(z)]_{z=r}=\operatorname{arctg}\frac{\Psi_\alpha(r;\mu)}{\Phi_\alpha(r;\mu)}, \qquad (6,3)$$

где

$$\Psi_\alpha(r;\mu)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{2r\cos\alpha\sin(\theta+\alpha)-r^2\sin 2\alpha}{1-2r\cos\theta+r^2}\,d\mu(\theta),\ \Phi_\alpha(r;\mu)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\frac{1-2r\sin\alpha\sin(\theta+\alpha)-r^2\cos 2\alpha}{1-2r\cos\theta+r^2}\,d\mu(\theta). \qquad (6,4)$$

Если предположить, что $\alpha=0$, то получим простейший подкласс функций с ограниченным вращением, для которых

$$\Psi_0(r;\mu)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{2r\sin\theta\,d\mu(\theta)}{1-2r\cos\theta+r^2},\ \Phi_0(r;\mu)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-r^2)\,d\mu(\theta)}{1-2r\cos\theta+r^2}. \qquad (6,5)$$

В этом последнем случае экстремумы функционала легко найти на основании следующей леммы.

Лемма. Если функции $\psi(\theta)$ и $\varphi(\theta)$ непрерывны на сегменте $[-\pi;\ \pi]$ и функция $\varphi(\theta)$ сохраняет свой знак на этом сегменте, то для любой функции $\mu(\theta)$ класса M имеют место неравенства

$$l \leqslant \frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \psi(\theta)\, d\mu(\theta)}{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta)\, d\mu(\theta)} \leqslant L,$$

где l и L точные границы отношения $\frac{\psi(\theta)}{\varphi(\theta)}$ на сегменте $[-\pi;\pi]$. Для доказательства этой леммы достаточно заметить, что при $\lambda_j > 0$ и $b_j > 0$ $(j = 1,\ 2,\ 3, \ldots, n)$ имеют место легко проверяемые неравенства

$$l_n \leqslant \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j a_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j\ b_j} \leqslant L_n,$$

где $l_n = \min\left(\frac{a_1}{b_1}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right), \quad L_n = \max\left(\frac{a_1}{b_1}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right).$

Основываясь на этой лемме, не трудно заметить, что для функций класса $\tilde{U}_0$ имеют место следующие оценки:

$$-\operatorname{arc\,tg}\frac{2r}{1-r^2} \leqslant J(\mu) \leqslant \operatorname{arc\,tg}\frac{2r}{1-r^2}\,. \tag{6,6}$$

Эти оценки являются точными и реализуются теми, и только теми, функциями класса $\tilde{U}_0$, которые соответствуют ступенчатым функциям класса M с одним скачком, т. е. на основании (6,1) функциями:

$$f(z) = -z - 2e^{i\vartheta}\ln(1 - ze^{-i\vartheta}), \quad -\pi \leqslant \vartheta \leqslant \pi\,. \tag{6,7}$$

При $\alpha \neq 0$ нахождение экстремумов функционала $J(\mu)$ осложняется тем, что, как не трудно убедиться, подинтегральная функция в выражении $\Phi_\alpha\ (r;\ \mu)$ (6,4) не сохраняет своего знака на сегменте $[-\pi;\ \pi]$ при значениях r, достаточно близких к 1. Поэтому в этих случаях пользоваться леммой нельзя и нужно обратиться к изучению вариации $\delta J(\mu)$. На основании формулы (6,3) вариацию можно представить в виде

$$\delta J = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Im}\left[(A+iB)\frac{1+ze^{-i2\alpha}}{1-z}\right] d\eta(\theta), \tag{6,8}$$

где

$$z = re^{-i\theta},\ A = R_\alpha \Phi_\alpha(r;\mu),\ B = -R_\alpha \Psi_\alpha(r;\mu),\ R_\alpha = [\Phi_\alpha^2(r;\mu) + \Psi_\alpha^2(r;\mu)]^{-1}.$$

Проанализируем функцию $F_\mu(\theta) \equiv \operatorname{Im}\left[(A+iB)\dfrac{1+ze^{-2i\alpha}}{1-z}\right]$ при $z = re^{-i\theta}$, считая r фиксированной величиной, $0 < r < 1$. Внимание должно быть обращено на то, сколько экстремумов может иметь эта функция на сегменте $[-\pi; \pi]$ при различных значениях константы $A + iB$. Полагая $\varphi(z) = (A + iB)\dfrac{1+ze^{-2i\alpha}}{1-z}$, мы замечаем, что функция $\varphi(z)$ преобразует окружности $|z| = r$, $0 < r < 1$, в окружности φ-плоскости в силу известного кругового свойства дробно-линейной функции. Но в таком случае функция $F_\mu(\theta)$ имеет один максимум и один минимум на сегменте $[-\pi; \pi]$. Следовательно, экстремальная функция $\mu_0(\theta)$ при любом фиксированном значении r, $0 < r < 1$, как в случае максимума, так и в случае минимума функционала $J(\mu)$ является ступенчатой с одной точкой разрыва. Если бы вместо функционала (6,3) мы взяли функционал

$$J_1(\mu) = \Phi_\alpha^2(r; \mu) + \Psi_\alpha^2(r; \mu), \tag{6,9}$$

то получили бы

$$\delta J_1 = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Im}\left[(A_1 + iB_1)\frac{1 + ze^{-2i\alpha}}{1 - z}\right] d\eta(\theta), \tag{6,10}$$

где

$$A_1 = 2\Phi_\alpha(r; \mu), \quad B_1 = 2\Psi_\alpha(r; \mu), \quad z = re^{i\theta}, \quad 0 < r < 1, \quad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

Поскольку выражения (6,8) и (6,10) совпадают, если истолковывать A, B, A_1, B_1 как произвольные вещественные постоянные, то, следовательно, максимум и минимум функционала (6,10) тоже реализуется ступенчатой функцией $\mu_0(\theta)$ с одной точкой разрыва, что, впрочем, в случае максимума легко может быть установлено и элементарным путем. Итак, имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а VI. При отображениях круга $|z| < 1$ однолистными и регулярными в нем функциями с ограниченным вращением (6,1), нормированными условиями $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, функции

$$f_0(z) = z - 2e^{i\alpha}\cos\alpha\,[z + e^{i\vartheta}\ln(1 - ze^{-i\vartheta})] \qquad (-\pi \leqslant \vartheta \leqslant \pi),$$

и только они одни, реализуют максимум и минимум функционалов $\arg f'(z)$, $|f'(z)|$ на каждой окружности $|z| = r$, $0 < r < 1$.

7. Полученный в предыдущем номере результат может быть обобщен следующим образом. Пусть $\varphi(z)$, $\varphi'(0) = 1$, есть регулярная в круге $|z| < 1$ функция, однолистно отображающая этот круг на некоторую выпуклую область B_φ φ-плоскости, не содержащую точки $\varphi = 0$. Рассмотрим семейство регулярных в круге $|z| < 1$ функций, определяемое формулой

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta}\,\Phi(ze^{-i\theta})\,d\mu(\theta), \tag{7,1}$$

где $\Phi(z) = \displaystyle\int_0^z \varphi(\zeta)\,d\zeta$, а $\mu(\theta) \in M$.

Можно доказать, что функции (7,1) однолистны в круге $|z| < 1$, причем $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$. Для этого достаточно заметить, что производная

$F'(z)$ регулярна в круге $|z| < 1$ и ее значения содержатся в выпуклой области B_φ, так как

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(ze^{-i\theta})\, d\mu(\theta). \tag{7,2}$$

Применяя рассуждения, аналогичные приведенным в номере 6, можно доказать, что из всех функций (7,1) только функции

$$F_0(z) = e^{i\vartheta}\Phi(ze^{-i\vartheta}) \qquad (-\pi \leqslant \vartheta \leqslant \pi)$$

реализуют максимум и минимум функционалов $\arg F'(z)$, $|F'(z)|$ на каждой окружности $|z| = r$, $0 < r < 1$.

Действительно, пусть

$$\varphi(re^{i\vartheta}) = u(r;\vartheta) + iv(r;\vartheta).$$

Тогда при $\vartheta = 0$ получаем

$$J(\mu) = [\arg F'(z)]_{z=r} = \operatorname{arc\,tg} \frac{\int_{-\pi}^{\pi} v(r;-\theta)\, d\mu(\theta)}{\int_{-\pi}^{\pi} u(r;-\theta)\, d\mu(\theta)}, \tag{7,3}$$

$$J_1(\mu) = |F'(z)|^2_{z=r} = \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(r;-\theta)\, d\mu(\theta)\right]^2 + \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(r;-\theta)\, d\mu(\theta)\right]^2. \tag{7,4}$$

Отсюда

$$\delta J(\mu) = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Im}[(A+iB)\varphi(z)]_{z=re^{-i\theta}}\, d\mu(\theta), \tag{7,5}$$

$$\delta J_1(\mu) = \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Im}[(A_1+iB_1)\varphi(z)]_{z=re^{-i\theta}}\, d\mu(\theta),$$

где A, B, A_1, B_1 некоторые постоянные, зависящие от выбора функции $\mu(\theta)$ класса M. Поскольку функция $\varphi_1(z) = C\varphi(z)$, где C — комплексная константа $\neq 0$, преобразует окружность $|z| = r$, $0 < r < 1$, в гладкую замкнутую выпуклую кривую, то ясно, что на сегменте $[-\pi;\pi]$ функция $\operatorname{Im}\varphi_1(z)]_{z=re^{-i\theta}}$ имеет один максимум и один минимум, откуда следует, что экстремумы функционалов $J(\mu)$ и $J_1(\mu)$ реализуются ступенчатой функцией $\mu_0(\theta)$ класса M с одной точкой разрыва, которой, очевидно, соответствует функция

$$F_0(z) = e^{i\vartheta}\Phi(ze^{-i\vartheta}) \qquad (-\pi \leqslant \vartheta \leqslant \pi),$$

как и утверждалось выше.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Зморович, Про деякі питання теорії унівалентних функцій, Науко
записки Київського держ. пед. ін-ту, т. VI, вип. 3, 1948.
2. В. А. Зморович, О структурных формулах некоторых классов однолистн
функций, ДАН СССР, т. LXXII, вып. 5, 1950.

Получена
17 сентября 1951 г.