1952 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. IV, № 3
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Приближенное интегрирование линейных диференциальных уравнений 2-го порядка с переменными коэфициентами методом С. А. Чаплыгина

К. В. Задирака

В 1919 г. академик С. А. Чаплыгин [1] опубликовал новый метод приближенного интегрирования диференциальных уравнений, значительно отличающийся от ранее существовавших, и применил его к решению уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$ при условии неизменности знака $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ в некоторой области.

Так как теоремы С. А. Чаплыгина о диференциальных неравенствах имеют неограниченный радиус применимости только для уравнения 1-го порядка, то распространение предложенного метода на уравнения высших порядков встречает трудности и требует дополнительных ограничений. Так, в работах Б. Н. Бабкина [2] метод Чаплыгина распространен на диференциальное уравнение n-го порядка при условии, что $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} > 0$. Это существенное ограничение не позволяет применить предложенный Бабкиным алгорифм для решения краевых задач.

Через 23 года после опубликования работ С. А. Чаплыгина о новом методе приближенного интегрирования диференциальных уравнений была опубликована работа Кваде [3] „Новые способы последовательных приближений к решению уравнения $y' = f(x, y)$“, повторяющая идеи Чаплыгина. Характерно, что как в указанной работе, так и в работе Кваде [4], опубликованной в 1948 г., никаких ссылок на работы С. А. Чаплыгина, Н. Н. Лузина, Д. Ю. Панова и других советских авторов по этим вопросам не имеется.

В настоящей работе поставлена цель распространить метод Чаплыгина на линейные уравнения 2-го порядка с переменными коэфициентами, а затем применить метод к решению краевых задач.

Рассмотрим диференциальное уравнение

$$p_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)\,y = 0,$$

где $p_0(x)$, $p_1(x)$ и $p_2(x)$ — непрерывные функции для рассматриваемых значений аргумента, которое, как известно, может быть приведено к самосопряженному уравнению вида

$$\frac{d}{dx}\left(p\,\frac{dy}{dx}\right) + qy = 0,$$

а заменой независимой или зависимой переменной к уравнению вида

$$\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)y=0.$$

Известно, что последнее уравнение имеет в любом промежутке неколеблющиеся решения, если $Q(x)\leqslant 0$, и колеблющиеся в достаточно большом промежутке, если $Q(x)>0$. Рассмотрим отдельно оба случая.

1. Уравнение с неколеблющимися решениями

Будем искать решение диференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2}=Q_1(x)y \qquad (Q_1(x)=-Q(x)\geqslant 0) \tag{1,1}$$

с начальными условиями

$$y(a)=y_0, \qquad y'(a)=y_0'. \tag{1,2}$$

Так как условия, при которых доказаны неравенства Чаплыгина, выполняются для уравнений (1,1) всюду на $[a, b]$, где $Q_1(x)$ непрерывная функция, то непрерывные вместе со своими первыми и вторыми производными функции $t(x)$ и $z(x)$, удовлетворяющие начальным условиям (1,2) и неравенствам

$$\begin{aligned}\psi(x)&=\frac{d^2t}{dx^2}-Q_1(x)t\geqslant 0,\\ \varphi(x)&=\frac{d^2z}{dx^2}-Q_1(x)z\leqslant 0\end{aligned} \tag{1,3}$$

на некотором замкнутом промежутке $[a, b]$, удовлетворяют таким неравенствам:

$$z(x)\leqslant y(x)\leqslant t(x). \tag{1,4}$$

Диференциальные неравенства Чаплыгина в этом случае имеют неограниченный радиус применимости.

Действительно, уравнение (1,1) применением линейного сдвига $y=u+y_0$ приводится к уравнению вида

$$\frac{d^2u}{dx^2}-Q_1(x)u=y_0Q_1(x) \tag{1,5}$$

с начальными условиями

$$u(a)=0, \qquad u'(a)=y_0'.$$

Пределом же применимости теоремы о диференциальных неравенствах для последнего уравнения есть первый нуль решения уравнения, сопряженного с (1,5) без правой части

$$\frac{d^2v}{dx^2}-Q_1(x)v=0,$$

которое, по условию, имеет неколеблющиеся решения.

Для построения следующей пары приближений введем обозначения

$$M^2=\max_{a\leqq x\leqq b}Q_1(x), \qquad m^2=\min_{a\leqq x\leqq b}Q_1(x), \qquad t-y=\eta, \ y-z=\xi.$$

Из (1,3) и (1,1) имеем

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} - Q_1(x)\eta - \psi(x) = 0, \qquad \eta(a) = \eta'(a) = 0;$$
$$\frac{d^2\xi}{dx^2} - Q_1(x)\xi + \varphi(x) = 0, \qquad \xi(a) = \xi'(a) = 0. \tag{1,6}$$

Вместо уравнений (1,6) рассмотрим уравнения с постоянными коэфициентами

$$\frac{d^2\eta_1}{dx^2} - m^2\eta_1 - \psi(x) = 0, \qquad \eta_1(a) = \eta_1'(a) = 0;$$
$$\frac{d^2\xi_1}{dx^2} - m^2\xi_1 + \varphi(x) = 0, \qquad \xi_1(a) = \xi_1'(a) = 0. \tag{1,7}$$

Подставляя в (1,7) нуль вместо η_1 и ξ_1, на основании неравенств Чаплыгина получаем

$$\eta_1(x) \geqslant 0, \; \xi_1(x) \geqslant 0 \text{ на } [a, b].$$

Заменяя в (1,6) η и ξ через η_1 и ξ_1 и принимая во внимание (1,7), получаем соответственно

$$\frac{d^2\eta_1}{dx^2} - Q_1(x)\eta_1 - \psi(x) = (m^2 - Q_1)\,\eta_1 \leqslant 0,$$
$$\frac{d^2\xi_1}{dx^2} - Q_1(x)\,\xi_1 + \varphi(x) = (m^2 - Q_1)\,\xi_1 \leqslant 0.$$

Отсюда следует на основании диференциальных неравенств Чаплыгина, что

$$\eta_1(x) \leqslant \eta(x), \qquad \xi_1(x) \leqslant \xi(x).$$

Следовательно,

$$t_1(x) = t(x) - \eta_1(x) \geqslant y(x), \qquad z_1(x) = z(x) + \xi_1(x) \leqslant y(x),$$
$$z(x) \leqslant z_1(x) \leqslant y(x) \leqslant t_1(x) \leqslant t(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b),$$

т. е. мы получили вторую пару приближений $t_1(x)$ и $z_1(x)$, заключенную внутри первой пары $t(x)$ и $z(x)$ и охватывающую сверху и снизу решение $y(x)$.

Покажем, что новая пара приближений t_1 и z_1 удовлетворяет неравенствам Чаплыгина.

Имеем

$$\psi_1 = t_1'' - Q_1 t_1 = Q_1 t + \psi - m^2\eta_1 - \psi - Q_1 t + Q_1\eta_1 = (Q_1 - m^2)\,\eta_1 \geqslant 0,$$
$$\varphi_1 = z_1'' - Q_1 z_1 = Q_1 z + \varphi + m^2\xi_1 - \varphi - Q_1 z - Q_1\xi_1 = (m^2 - Q_1)\,\xi_1 \leqslant 0,$$

т. е. $t_1(x)$ и $z_1(x)$ являются верхней и нижней функциями Чаплыгина и их можно брать за исходные для получения следующей пары приближений.

Решая уравнения (1,7), получаем

$$\eta_1(x) = \frac{1}{m}\int_a^x \psi(\nu)\,\mathrm{sh}\, m(x-\nu)\,d\nu, \qquad \xi_1(x) = -\frac{1}{m}\int_a^x \varphi(\nu)\,\mathrm{sh}\, m(x-\nu)\,d\nu$$

и последовательно

$$\eta_n(x)=\frac{1}{m}\int_a^x \psi_{n-1}(\nu)\operatorname{sh} m(x-\nu)\,d\nu,\quad \xi_n(x)=-\frac{1}{m}\int_a^x \varphi_{n-1}(\nu)\operatorname{sh} m(x-\nu)d\nu,\quad (1,8)$$

$$t_n=t_{n-1}-\eta_n,\quad z_n=z_{n-1}+\xi_n,\quad \psi_n=\eta_n(Q_1-m^2),\quad \varphi_n=\xi_n(m^2-Q_1).$$

Покажем, что построенные таким способом приближения t_n и z_n сходятся равномерно на $[a, b]$ к искомому решению $y(x)$.

Чтобы доказать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\eta_i(x)$ на $[a, b]$, введем обозначение

$$\delta_0=\max_{a\leq x\leq b}\psi(x).$$

Тогда имеем последовательно

$$\eta_1(x)<\frac{1}{m}\delta_0\operatorname{sh} m(x-a)\cdot(x-a),$$

$$\eta_2(x)=\frac{1}{m}\int_a^x\psi_1(\nu)\operatorname{sh} m(x-\nu)\,d\nu=$$

$$=\frac{1}{m}\int_a^x(Q_1-m^2)\eta_1\operatorname{sh} m(x-\nu)\,d\nu<\frac{M^2-m^2}{m^2}\delta_0\operatorname{sh}^2 m(x-a)\cdot\frac{(x-a)^2}{2!},$$

. . . .

$$\eta_n(x)<\frac{(M^2-m^2)^{n-1}}{m^n}\delta_0\operatorname{sh}^n m(x-a)\cdot\frac{(x-a)^n}{n!}.$$

Так как превышающий числовой ряд с общим членом

$$\frac{(M^2-m^2)^{n-1}}{m^n}\delta_0\operatorname{sh}^n m(b-a)\cdot\frac{(b-a)^n}{n!}$$

сходится, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\eta_i(x)$, члены которого суть непрерывные функции x, сходится равномерно на $[a, b]$ и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}t_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left[t(x)-\sum_{i=1}^{n}\eta_i(x)\right]=Y(x).$$

Покажем, наконец, что $Y(x)$ удовлетворяет данному уравнению (1,1) при начальных условиях (1,2), использовав для этой цели предпоследнее из соотношений (1,8)

$$t_n''=Q_1t_n+\eta_n(Q_1-m^2),$$

из которого имеем

$$t_n(x)=y_0+\int_a^x\left\{y_0'+\int_a^x[Q_1t_n+\eta_n(Q_1-m^2)]\,dx\right\}dx,$$

$$\lim_{n\to\infty}t_n(x)=Y(x)=y_0+\int_a^x\left\{y_0'+\int_a^x Q_1Ydx\right\}dx.$$

Следовательно,

$$Y'' = Q_1 Y.$$

Так как $Y(x)$, кроме того, удовлетворяет начальным условиям (1,2), то $Y(x) = y(x)$ в силу единственности решения. Аналогично показывается сходимость последовательности $\{z_n(x)\}$ к $y(x)$.

Пользуясь полученными оценками для поправок $\eta_i(x)$, оценим погрешность k-го верхнего приближения.

Имеем

$$y(x) = t(x) - \eta_1(x) - \eta_2(x) - \cdots - \eta_k(x) - \eta_{k+1}(x) - \ldots = t_k(x) - r_k(x),$$

$$t_k(x) - y(x) = r_k(x) < \frac{\delta_0}{M^2 - m^2} \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{(M^2 - m^2)^i \operatorname{sh}^i m(x-a)}{m^i} \frac{(x-a)^i}{i!}$$

или

$$t_k(x) - y(x) < \frac{\delta_0}{M^2 - m^2} \left[e^{\frac{(M^2 - m^2)(x-a) \operatorname{sh} m(x-a)}{m}} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{k} \frac{(M^2 - m^2)^i \operatorname{sh}^i m(x-a) (x-a)^i}{m^i \, i!} \right].$$

Вводя обозначения $\min\limits_{a \leq x \leq b} \varphi(x) = -\gamma_0$ и $\tilde{y}_k = \frac{1}{2}(t_k + z_k)$, аналогично получаем следующие оценки для $z_k(x)$ и $\tilde{y}_k(x)$:

$$y(x) - z_k(x) < \frac{\gamma_0}{M^2 - m^2} \left[e^{\frac{(M^2 - m^2)(x-a) \operatorname{sh} m(x-a)}{m}} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{k} \frac{(M^2 - m^2)^i \operatorname{sh}^i m(x-a) (x-a)^i}{m^i \, i!} \right].$$

$$\tilde{y}_k(x) - y(x) < \frac{\delta_0 - \gamma_0}{2(M^2 - m^2)} \left[e^{\frac{(M^2 - m^2)(x-a) \operatorname{sh} m(x-a)}{m}} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{k} \frac{(M^2 - m^2)^i \operatorname{sh}^i m(x-a) (x-a)^i}{m^i \, i!} \right].$$

Обозначая $\max\limits_{a \leq x \leq b} \psi_k(x)$ и $\min\limits_{a \leq x \leq b} \varphi_k(x)$ соответственно через δ_k и $-\gamma_k$, получаем следующие оценки для k-го верхнего и нижнего приближений:

$$t_k(x) - y(x) < \delta_k A(x) \quad \text{и} \quad y(x) - z_k(x) < \gamma_k A(x),$$

где

$$A(x) = \frac{1}{M^2 - m^2} \left[e^{\frac{(M^2 - m^2)(x-a) \operatorname{sh} m(x-a)}{m}} - 1 \right].$$

Покажем еще, как по одной только верхней функции Чаплыгина можно построить нижнюю функцию Чаплыгина.

Для этого наряду с первым из уравнений (1,6)

$$\eta'' - Q_1(x)\eta - \psi(x) = 0, \quad \eta(a) = \eta'(a) = 0 \tag{1,6}$$

рассмотрим уравнение

$$\overset{*}{\eta}_1'' - M^2\overset{*}{\eta}_1 - \psi(x) = 0, \quad \overset{*}{\eta}_1(a) = \overset{*}{\eta}_1'(a) = 0. \tag{1,9}$$

Подставляя в последнее уравнение нуль вместо $\overset{*}{\eta}_1$, получаем $\overset{*}{\eta}_1(x) \geqslant 0$, а заменяя в (1,6) η_1 через $\overset{*}{\eta}_1$, и приняв во внимание (1,9), получаем

$$\overset{*}{\eta}_1'' - Q_1(x)\overset{*}{\eta}_1 - \psi = (M^2 - Q_1)\overset{*}{\eta}_1 \geqslant 0,$$

откуда следует, что $\overset{*}{\eta}_1 \geqslant \eta(x)$, а значит

$$z_1(x) = t(x) - \overset{*}{\eta}_1(x) \leqslant y(x).$$

Покажем, что построенная таким образом функция $z_1(x)$ удовлетворяет неравенству Чаплыгина. Имеем

$$\varphi_1 = z_1'' - Q_1 z_1 = Q_1 t - M^2\overset{*}{\eta}_1 - Q_1 t + Q_1\overset{*}{\eta}_1 = \overset{*}{\eta}_1(Q_1 - M^2) \leqslant 0,$$

т. е. $z_1(x)$ действительно есть нижняя функция Чаплыгина. Точно так же можно показать, что, зная одну только нижнюю функцию, можно построить улучшенную нижнюю и верхнюю функции, а следовательно, и две последовательности таких функций, равномерно стремящихся к искомому решению на замкнутом промежутке $[a, b]$, на котором $Q_1(x)$ непрерывная функция.

Пример 1. $y'' - (x^2+1)y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Так как здесь $Q_1(x) = x^2 + 1 > 0$ при любом x, то данное уравнение имеет неколеблящиеся решения на всей оси; будем искать приближения к искомому решению для $x \geqslant 0$. В данном случае $m^2 = \min Q_1(x) = 1$; первое нижнее приближение найдем из уравнения

$$z'' - z = 0, \quad z(0) = 0, \quad z'(0) = 1,$$

решением которого будет

$$z(x) = \operatorname{sh} x \text{ при } x \geqslant 0.$$

Подставляя в данное уравнение z вместо y, получаем

$$\varphi(x) = z'' - (x^2+1)z = -x^2 z \leqslant 0$$

для всех $x \geqslant 0$; следовательно $z = \operatorname{sh} x$ есть нижняя функция Чаплыгина.

Для построения второй нижней функции находим поправку $\xi_1(x)$ из уравнения

$$\xi_1'' - \xi_1 = -\varphi = x^2 \operatorname{sh} x, \quad \xi_1(0) = \xi_1'(0) = 0.$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем

$$\xi_1(x) = \int_0^x \nu^2 \operatorname{sh}\nu \operatorname{sh}(x-\nu)\, d\nu = \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x}{4}\right)\operatorname{ch} x - \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}\right)\operatorname{sh} x,$$

$$z_1(x) = z(x) + \xi_1(x) = \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x}{4}\right)\operatorname{ch} x + \frac{1}{4}(3 - x^2)\operatorname{sh} x.$$

Вторую поправку находим из уравнения

$$\xi_2'' - \xi_2 = -\varphi_1(x),$$

где

$$\varphi_1(x) = \xi_1(m^2 - Q_1) = -x^2\xi_1 = -\left(\frac{x^5}{6} + \frac{x^3}{4}\right)\operatorname{ch} x + \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{4}\right)\operatorname{sh} x.$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем

$$\xi_2(x) = \int_0^x \left[\left(\frac{\nu^5}{6} + \frac{\nu^3}{4}\right) \operatorname{ch} \nu - \left(\frac{\nu^4}{4} + \frac{\nu^2}{4}\right) \operatorname{sh} \nu\right] \operatorname{sh}(x-\nu)\, d\nu =$$

$$= \left(\frac{x^6}{72} + \frac{19x^4}{96} + \frac{13x^2}{32} + \frac{45}{32}\right) \operatorname{sh} x - \left(\frac{x^5}{15} + \frac{13x^3}{48} + \frac{13x}{32}\right) \operatorname{ch} x,$$

$$z_2(x) = z_1(x) + \xi_2(x).$$

Ниже приводится таблица первых трех нижних приближений и для сравнения — значения y, найденные другим способом.

x	z	z_1	z_2	y	Относительная погрешность %
0,5	0,5211	0,5227	0,5227	0,5227	0
1,0	1,1752	1,2306	1,2313	1,2313	0
1,5	2,1293	2,6046	2,6363	2,6372	0,03
2,0	3,6269	5,9909	6,4689	6,5172	0,7

Аналогично строятся верхние приближения [1].

Построим еще верхнее приближение по известному нижнему, взяв, например, в качестве исходного приближения $z_1(x)$. Пусть нас интересуют значения приближений, например, в интервале $[0, 2]$; тогда $M^2 = 5$.

Поправку находим из уравнения

$$\overset{*}{\xi}_2{}'' - 5\overset{*}{\xi}_2 = -\varphi_1, \quad \text{где} \quad \varphi_1 = \xi_1(1 - Q_1) = -x^2\xi_1;$$

$$\overset{*}{\xi}_2(x) = \frac{\sqrt{5}}{5} \int_0^x \left[\left(\frac{\nu^6}{6} + \frac{\nu^3}{4}\right) \operatorname{ch} \nu - \left(\frac{\nu^4}{4} + \frac{\nu^2}{4}\right) \operatorname{sh} \nu\right] \operatorname{sh} \sqrt{5}(x-\nu)\, d\nu =$$

$$= -\left(\frac{x^4}{24} + \frac{19x^2}{32} + \frac{55}{64}\right) \operatorname{sh} x - \left(\frac{x^5}{24} + \frac{17x^3}{48} + \frac{9x}{8}\right) \operatorname{ch} x + \frac{127\sqrt{5}}{320} \operatorname{sh} \sqrt{5}x;$$

$$t_2(x) = z_1(x) + \overset{*}{\xi}_2(x).$$

Вычисления дают следующие результаты:

$t_2(0,5) = 0,5227$, $t_2(1) \doteq 1,2313$, $t_2(1,5) = 2,6382$, $t_2(2) = 6,5370$.

2. Уравнение с колеблющимися решениями

Как было указано, решение уравнения

$$y'' + Q(x)y = 0 \qquad (Q > 0) \tag{2,1}$$

с начальными условиями

$$y(a) = y_0, \qquad y'(a) = y_0' \tag{2,2}$$

имеет нули на достаточно большом промежутке.

[1] В качестве первого грубого верхнего приближения можно взять, например, $t(x) = xe^{x^2}$, тогда

$$\psi(x) = t'' - (x^2 + 1)t = xe \quad (3x^2 + 5) \geqslant 0$$

для всех $x \geqslant 0$.

Чтобы распространить метод С. А. Чаплыгина на уравнение указанного вида, будем исходить из таких известных положений.

I. Теорема сравнения. Если имеем два уравнения

$$y'' + Q(x)y = 0, \quad z'' + Q_1(x)z = 0 \tag{2,3}$$

и если $Q_1(x) \geqslant Q(x)$ на (a, b), то между каждыми двумя нулями любого решения $y(x)$ первого уравнения заключен, по крайней мере, один нуль каждого решения $z(x)$ второго уравнения [1].

II. Теорема Чаплыгина о диференциальных неравенствах для линейного уравнения 2-го порядка

Пусть дано уравнение

$$y'' - p(x)y' - p_1(x)y = q(x) \tag{2,4}$$

с начальными условиями

$$y(a) = y_0, \ y'(a) = y_0', \tag{2,5}$$

где $p(x)$ и $p_1(x)$ — непрерывные вместе со своими первыми производными функции от x и $q(x)$ — непрерывная функция x.

Если функция $t(x)$ непрерывная вместе со своими первой и второй производными удовлетворяет начальным условиям (2,5) и условию

$$t'' - p(x)t' - p_1(x)t - q(x) \geqslant 0,$$

то $t(x) \geqslant y(x)$ на некотором промежутке $x \geqslant a$, причем пределом применимости теоремы будет значение x, являющееся полюсом решения уравнения Риккати

$$\sigma' + \sigma^2 + p(x)\sigma + p'(x) - p_1(x) = 0$$

или нулем решения уравнения

$$s'' + (ps)' - p_1 s = 0,$$

сопряженного с (2,4) без правой части.

Пусть $t(x)$ есть первая верхняя функция Чаплыгина, т. е.

$$\psi(x) = t'' + Q(x)t \geqslant 0, \quad t(a) = y_0, \quad t'(a) = y_0' \tag{2,6}$$

на некотором достаточно большом промежутке $[a, b]$, содержащем нуль решения $y(x)$ уравнения (2,1). Она может быть найдена, например, из уравнения

$$t'' + m^2 t = 0, \quad \text{где} \quad m^2 = \min_{a < x < b} Q(x);$$

в этом случае $\psi(x) = t'' + Qt = (Q - m^2)t \geqslant 0$ на $[a, b]$.

Для построения нижней функции Чаплыгина в том же промежутке введем обозначение $t(x) - y(x) = \eta(x)$. Тогда из (2,1) и (2,6) имеем

$$\eta'' + Q(x)\eta = \psi(x), \quad \eta(a) = \eta'(a) = 0. \tag{2,7}$$

Вместо (2,7) напишем уравнение

$$\eta_1'' + m^2\eta_1 = \psi(x), \quad \eta_1(a) = \eta_1'(a) = 0. \tag{2,8}$$

Подставляя в (2,8) нуль вместо η_1, получаем $-\psi(x) \leqslant 0$ на $[a, b]$.

Так как пределом применимости теоремы о диференциальных неравенствах для уравнения (2,8) является нуль решения уравнения

$$s'' + m^2 s = 0,$$

[1] А. В. Степанов, Курс диференциальных уравнений, 1950, стр. 253.

сопряженного с (2,8) без правой части, для которого $x_s > x_y$, то $\eta_1(x) \geqslant 0$ на $[a, x_1 > x_y]$ [1].

Подставляя в (2,7) η_1 вместо η, получаем $\psi(x) - m^2\eta_1 + Q(x)\eta_1 - \psi(x) = [Q - m^2]\eta_1 \geqslant 0$ на $[a, x_1 > x_y]$ и так как пределом применимости неравенств Чаплыгина для уравнения (2,7) есть нуль решения уравнения

$$s'' + Q(x)s = 0,$$

сопряженного с (2,7) без правой части, то $\eta_1(x) \geqslant \eta(x)$ на $[a, x_y < b]$. Так как $t - \eta = y$, то $z_1 = t - \eta_1 \leqslant y$ на $[a, x_y]$.

Покажем, что $z_1(x)$ удовлетворяет диференциальному неравенству Чаплыгина.

Имеем

$$\begin{aligned}\varphi_1 = z_1'' + Qz_1 = t'' + Qt + m^2\eta_1 - \psi - Q\eta_1 = \\ = \eta_1(m^2 - Q) \leqslant 0 \qquad \text{на } [a, x_y < b].\end{aligned} \tag{2,9}$$

Таким образом, мы построили нижнюю функцию $z_1(x)$ на $[a, x_y]$, которую можно взять за исходную для построения следующего приближения.

Займемся построением верхней функции по нижней $z_1(x)$.

Вводя обозначение

$$y(x) - z_1(x) = \xi(x)$$

и вычитая из (2,1) почленно (2,9), получаем

$$\xi'' + Q\xi = -\varphi_1, \quad \xi(a) = \xi'(a) = 0. \tag{2,10}$$

Вместо (2,10) напишем уравнение

$$\xi_1'' + m^2\xi_1 = -\varphi_1, \quad \xi_1(a) = \xi_1'(a) = 0. \tag{2,11}$$

Только что приведенными рассуждениями покажем, что

$$\xi_1(x) \geqslant 0, \quad \xi_1(x) \geqslant \xi(x) \qquad \text{на } [a, x_y].$$

Так как $z_1 + \xi = y$, то $t_1 = z_1 + \xi_1 \geqslant y$.

Построенная функция $t_1(x)$ удовлетворяет на $[a, x_y]$ неравенству Чаплыгина, так как

$$\begin{aligned}\psi_1 = t_1'' + Qt_1 = z_1'' + \xi_1'' + Qz_1 + Q\xi_1 = z_1'' + Qz_1 - \varphi_1 - m^2\xi_1 + Q\xi_1 = \\ = \xi_1(Q - m^2) \geqslant 0 \qquad \text{на } [a, x_y].\end{aligned}$$

Продолжая тот же процесс, мы получим последовательность верхних функций

$$t_k(x) = t - \sum_{i=1}^{k} \eta_i(x) + \sum_{i=1}^{k} \xi_i(x) \tag{2,12}$$

и последовательность нижних функций

$$z_k(x) = t(x) - \sum_{i=1}^{k} \eta_i(x) + \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i(x),$$

где

$$\left.\begin{aligned}\eta_i(x) = \frac{1}{m}\int_a^x \psi_{i-1}(\nu)\sin m(x-\nu)\,d\nu, \qquad \xi_i(x) = -\frac{1}{m}\int_a^x \varphi_i(\nu)\sin m(x-\nu)\,d\nu, \\ \psi_{i-1}(x) = t_{i-1}'' + Qt_{i-1} = \xi_{i-1}(Q - m^2) \geqslant 0, \ \varphi_i(x) = z_i'' + Qz_i = \eta_i(m^2 - Q) \leqslant 0.\end{aligned}\right\} \tag{2,13}$$

[1] x_y — первый нуль решения данного уравнения.

Покажем, что полученная функция $t_1(x) \leqslant t(x)$ на $[a, x_y]$.

Для этого докажем сначала, что $\psi(x) + \varphi_1(x) \geqslant 0$. Действительно, имеем

$$\psi + \varphi_1 = (Q - m^2)\, t + \eta_1\,(m^2 - Q) = (Q - m^2)\,(t - \eta_1) = (Q - m^2) z_1$$

и так как $(Q - m^2) \geqslant 0$ на $[a, b]$, а z_1 всегда можно сделать положительным, применяя к данному уравнению (2,1) линейный сдвиг $u = y + c$, где c — достаточно большое положительное число, то

$$\psi(x) + \varphi_1(x) \geqslant 0.$$

Подставляя в (2,11) η_1 вместо ξ_1 и принимая во внимание (2,8), получаем $\psi + \varphi_1 \geqslant 0$, следовательно,

$$\eta_1(x) \geqslant \xi_1(x), \text{ т. е. } t_1 - t = \xi_1 - \eta_1 \leqslant 0 \qquad \text{на } [a, x_y],$$

Докажем, что $z_2 = t - \eta_1 + \xi_1 - \eta_2 \geqslant z_1 = t - \eta_1$. Заметим прежде всего, что

$$\varphi_1 + \psi_1 = \eta_1(m^2 - Q) + \xi_1(Q - m^2) = (Q - m^2)(\xi_1 - \eta_1) \leqslant 0.$$

Подставляя в уравнение

$$\xi_1'' + m^2\xi_1 = -\varphi_1$$

вместо ξ_1 величину η_2 и принимая во внимание уравнение

$$\eta_2'' + m^2\eta_2 = \psi_1,$$

получаем $\psi_1 + \varphi_1 \leqslant 0$. Отсюда следует, что $z_2 - z_1 = \xi_1 - \eta_2 \geqslant 0$.

Аналогично доказывается, что $t_{k+1} \leqslant t_k$ и $z_{k+1} \geqslant z_k$. Таким образом, последовательность верхних приближений $\{t_k(x)\}$ монотонно убывает, а последовательность нижних приближений $\{z_k(x)\}$ монотонно возрастает при возрастании k.

Аналогично строятся последовательности верхних и нижних функций по известной первой нижней функции $z(x)$.

Доказательство сходимости

Покажем, что ряды

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(x) \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(x) \tag{2,14}$$

сходятся равномерно по x на $[a, x_y]$.

Вводя обозначения

$$\delta_0 = \max_{a \leq x \leq x_y} \psi(x), \qquad M^2 = \max_{a \leq x \leq x_y} Q(x)$$

и принимая во внимание (2,13), получаем

$$\begin{aligned} \eta_1(x) &= \frac{1}{m}\int_a^x \psi(\nu)\sin m(x-\nu)\,d\nu < \frac{\delta_0}{m}(x-a), \\ \xi_1(x) &= -\frac{1}{m}\int_a^x \varphi_1(\nu)\sin m(x-\nu)\,d\nu < \frac{\delta_0}{m}(M^2 - m^2)\cdot\frac{(x-a)^2}{2!}, \end{aligned} \tag{2,15}$$

$$\eta_2(x) < \frac{\delta_0}{m^3}(M^2 - m^2)^2 \frac{(x-a)^3}{3!}, \quad \xi_2(x) < \frac{\delta_0}{m^4}(M^2-m^2)^2 \cdot \frac{(x-a)^4}{4!}.$$

$$\cdots \qquad (2,15)$$

$$\eta_k(x) < \frac{\delta_0}{m^{2k-1}}(M^2-m^2)^{2k-2}\frac{(x-a)^{2k-1}}{(2k-1)!}, \quad \xi_k(x) < \frac{\delta_0}{m^{2k}}(M^2-m^2)^{2k-1}\frac{(x-a)^{2k}}{(2k)!}.$$

Так как числовые ряды с общими членами

$$\frac{\delta_0}{m^{2k-1}}(M^2 - m^2)^{2k-2}\frac{(x_y-a)^{2k-1}}{(2k-1)!} \quad \text{и} \quad \frac{\delta_0}{m^{2k}}(M^2 - m^2)^{2k-1}\frac{(x_y-a)^{2k}}{(2k)!}$$

сходятся, то функциональные ряды (2,14), члены которых суть непрерывные функции x, сходятся равномерно на $[a, x_y]$, а их суммы — непрерывные функции x на $[a, x_y]$ и, следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} t_k(x) = \lim_{k\to\infty}\left[t - \sum_{i=1}^{k}\eta_i + \sum_{i=1}^{k}\xi_i\right] = Y(x),$$

$$\lim_{k\to\infty} z_k(x) = \lim_{k\to\infty}\left[t - \sum_{i=1}^{k}\eta_i + \sum_{i=1}^{k}\xi_i\right] = Y(x).$$

Покажем, что $Y(x)$ удовлетворяет уравнению (2,1). Для этого воспользуемся соотношениями (2,13). Имеем

$$t_k'' = \xi_k(Q-m^2) - Qt_k, \quad t_k' = y_0' + \int_a^x [\xi_k(Q-m^2) - Qt_k]\,dx,$$

$$t_k = y_0 + \int_a^x \left\{ y_0' + \int_a^x [\xi_k(Q-m^2) - Qt_k]\,dx \right\} dx,$$

$$\lim_{k\to\infty} t_k = Y = y_0 + \int_a^x \left\{ y_0' - \int_a^x QY\,dx \right\} dx,$$

$$Y' = y_0' - \int_a^x QY, \quad Y'' + QY = 0.$$

Так как $Y(a) = y_0$, $Y'(a) = y_0'$, то $Y(x) = y(x)$ в силу единственности решения уравнения (2,1) при начальных условиях (2,2).

Полученные оценки позволяют установить погрешность k-го приближения. Так для верхнего и нижнего k-го приближения имеем соответственно

$$y(x) = t - \eta_1 + \xi_1 - \eta_2 + \cdots = t_k - \eta_{k+1} + \xi_{k+1} - \cdots,$$

$$t_k(x) - y(x) < \eta_{k+1} < \frac{\delta_0}{m^{2k+1}}(M^2 - m^2)^{2k}\frac{(x-a)^{2k+1}}{(2k+1)!};$$

$$y(x) = t - \eta_1 + \xi_1 - \eta_2 + \cdots = z_k + \xi_{k+1} - \eta_{k+2} + \cdots,$$

$$y(x) - z_k(x) < \xi_{k+1} < \frac{\delta_0}{m^{2k+2}}(M^2 - m^2)^{2k+1}\frac{(x-a)^{2k+2}}{(2k+2)!}.$$

Пример 2. $y''+\frac{10-x^2}{4}y=0,\ y(-1)=0,\quad y'(-1)=a$. Так как коэфициент при y положительный в промежутке $(-\sqrt{10}, +\sqrt{10})$, а положение первого нуля после -1 нам неизвестно, то будем искать решение уравнения для произвольного промежутка, например, для промежутка $(-1, +1)$ тогда

$$\max_{-1\leq x\leq 1} Q(x)=\frac{10}{4},\quad \min_{-1\leq x\leq 1} Q(x)=\frac{9}{4}.$$

Первую верхнюю функцию находим из уравнения

$$t''+\frac{9}{4}t=0,\quad t(-1)=0,\quad t'(-1)=a,$$

решением которого есть функция

$$t(x)=\frac{2a}{3}\sin\frac{3}{2}(x+1)\geqslant 0 \qquad \text{на } [-1, +1].$$

Подставляя в данное уравнение $t(x)$ вместо $y(x)$, получаем

$$\psi(x)=-\frac{9}{4}t+\frac{10-x^2}{4}t=\frac{1-x^2}{4}t\geqslant 0 \qquad \text{на } [-1, +1],$$

так как на этом промежутке $t(x)\geqslant 0$.

Отсюда вытекает, что $t(x)\geqslant y(x)$ на $[-1, +1]$, если $x_y>1$ и на $[-1, x_y]$ при $x_y<1$.

Аналогично строится первая нижняя функция.

Для построения улучшенной нижней функции по верхней находим поправку из уравнения

$$\eta_1''+\frac{9}{4}\eta_1=\frac{1-x^2}{4}\,\frac{2a}{3}\sin\frac{3}{2}(x+1),\quad \eta_1(-1)=0,\quad \eta_1'(-1)=0,$$

решением которого будет

$$\eta_1(x)=\frac{a}{9}\int\limits_{-1}^{x}(1-\nu^2)\sin\frac{3}{2}(\nu+1)\sin\frac{3}{2}(x-\nu)\,d\nu=$$

$$=\frac{a}{18}\left\{\left[\frac{1}{3}(1-x^2)+\frac{4}{27}\right]\sin\frac{3}{2}(x+1)-\left[\frac{8}{9}+\frac{11}{9}x-\frac{x^3}{3}\right]\cos\frac{3}{2}(x+1)\right\},$$

а улучшенная нижняя функция имеет вид $z_1(x)=t(x)-\eta_1(x)$. Аналогично строятся улучшенная верхняя функция и последовательности верхних и нижних функций.

Вычисления при $a=1{,}558$ дают

$z_1(0)=0{,}9997$ (ошибка не превышает $0{,}031\%$)

$z_1(0{,}5)=0{,}7020$ („ „ „ $0{,}43\%$)

Так как практически коэфициенты диференциальных уравнений задаются приближенно, то их можно апроксимировать полиномами и получить простую схему построения последовательностей верхних и нижних функций при $Q(x) \leqslant 0$ для любого промежутка, а при $Q(x) > 0$ для промежутка $[a, x_y]$. Вычисление поправок в этом случае сводится к интегрированию по частям простых выражений.

В следующей статье предложенный алгорифм будет применен к вычислению собственных значений и функций одномерной регулярной краевой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Чаплыгин, Собрание сочинений, т. I, 1948.
2. Б. Н. Бабкин, ДАН СССР, т. 59, № 3, 1948.
3. W. Quade, Mathem. Zeitschrift, 48, 1942.
4. W. Quade, Mathem. Zeitschrift, 51, 1948.

Получена
20 марта 1952 г.
Киев.