Об устранимых граничных множествах

Ю. Ю. Трохимчук

В своей работе о римановых поверхностях с устранимой границей Л. Сарио [1] указал для случая плоских областей два критерия устранимости всюду разрывного граничного их множества точек. Ниже устанавливаются некоторые свойства множеств, удовлетворяющих этим критериям, причем показывается, что второму критерию могут удовлетворять лишь множества, проекции которых на оси координат имеют меру нуль; такие множества обладают более сильным свойством, чем устранимость.

В конце дается построение примеров множеств, которые удовлетворяют первому критерию устранимости и проектируются в произвольное наперед заданное замкнутое множество на прямой. Попутно обнаруживается существенное различие между непрерывными функциями, обладающими свойством (N) на отрезке и на совершенном всюду разрывном множестве точек.

1. Устранимые множества и два критерия устранимости Л. Сарио

Следуя Л. Сарио, введем следующее определение:

Граница Γ плоской области G называется устранимой, если в G не существует не равной тождественно постоянной однозначной аналитической функции с конечным интегралом Дирихле.

Из этого определения следует прежде всего, что свойство устранимости сохраняется при любых конформных отображениях; во-вторых, устранимое множество не содержит континуума, т. е. является замкнутым разрывным множеством на плоскости [1]. В самом деле, всегда внешность континуума можно отобразить конформно в единичный круг и очевидно, что отображающая функция имеет конечный интеграл Дирихле и не является постоянной.

Пусть G — произвольная область на плоскости; рассмотрим какое-либо исчерпание этой области, т. е. произвольную последовательность вложенных одна в другую компактных подобластей области G: $G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_n \subset \ldots$, обладающую следующими свойствами:

1) граница Γ_n области G_n состоит из конечного числа k_n замкнутых жордановых кривых Γ_{n_i} $(i = 1, 2, \ldots, k_n)$;

2) множества $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots$ не имеют общих точек;

3) каждое дополнение $G \setminus G_n$ состоит из некоторого числа некомпактных областей;

[1] Такое множество характеризуется также тем свойством, что в каждой окрестности произвольной его точки можно провести замкнутую жорданову кривую, окружающую эту точку и не проходящую через точки множества.

4) каждая компактная подобласть области G, начиная с некоторого n, принадлежит всем G_n.

Покрывая каждый из контуров Γ_{ni} некоторой двусвязной областью — „кольцом" E_{ni} так, чтобы никакие кольца E_{pi} и E_{qj} не перекрывались (но общие граничные точки они могут иметь), получим системы колец $E_n = \{E_{ni}\}$ $(i = 1, 2, \ldots, k_n)$, определяющие некоторое кольцевое исчерпание области G.

Так как нас интересуют лишь вопросы, касающиеся устранимости, то из предыдущего ясно, что можно предположить границу Γ области G ограниченным множеством на плоскости и что все кольца E_{ni} также ограничены.

Пусть γ и γ' — внешняя и внутренняя граничные кривые некоторого кольца E и пусть $d > 0$ — его ширина, т. е. минимальное расстояние между γ и γ'. Нижнюю грань длин спрямляемых кривых, разделяющих γ и γ', каждая точка которых отстоит как от γ, так и от γ' на расстоянии $\geqslant \frac{d}{2}$, назовем длиной L кольца E, а число $\beta = \frac{d}{L}$ — относительной его шириной.

Обозначая относительную ширину кольца E_{ni} через β_{ni}, положим $\beta_n = \min\limits_i \beta_{ni}$ $(i = 1, 2, \ldots, k_n)$. Первый критерий Л. Сарио гласит:

Если при некотором кольцевом исчерпании $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ *ряд* $\sum\limits_n \beta_n$ *расходится, то множество* Γ *устранимо.*

Рассмотрим еще другой критерий Л. Сарио, который естественно примыкает к первому.

Пусть G, как и раньше, произвольная плоская область, граница Γ которой есть ограниченное и разрывное множество. Для получения ее исчерпания построим на числовой плоскости сеть квадратов со сторонами, параллельными осям координат, длины которых равны 1; пусть Q_0 — множество тех квадратов, которые внутри или на границе имеют точки Γ. Деля каждый построенный квадрат на четыре равные квадрата, получим сеть с длиной сторон, равной $\frac{1}{2}$; пусть Q_1 — соответствующее множество этих квадратов, имеющих общие точки с Γ. При последующих подразделениях имеющихся уже квадратов мы для каждого n можем определить соответствующую совокупность Q_n квадратов с длинами сторон, равными $\frac{1}{2^n}$, имеющих общие с Γ точки. Каждое из Q_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ состоит из конечного числа l_n изолированных связных частей Q_{ni}; если q_{ni} — число квадратов в Q_{ni}, то положим $q_n = \max\limits_i q_{ni}$ $(i = 1, \ldots, l_n)$.

Тогда, по второму критерию Л. Сарио, *множество Γ устранимо, если* $\sum\limits_n \frac{1}{q_n} = \infty$.

Этот критерий нетрудно получить, применяя первый критерий к системе колец, строящихся следующим образом: каждое из Q_{ni} окружаем ломаными γ_{ni} и γ_{ni}', составленными из отрезков, параллельных свободным сторонам части Q_{ni} соответственно на расстоянии, равном $\frac{1}{2^{n+1}}$ и $\frac{1}{2^{n+2}}$.

2. О множествах, удовлетворяющих первому критерию устранимости

Покажем теперь, что множество Γ, удовлетворяющее первому критерию Л. Сарио, обладает тем свойством, что каждая спрямляемая кривая на плоскости пересекает его по множеству меры нуль. Доказательство проведем для частного случая прямой; для общего случая оно будет аналогично, но лишь с небольшим изменением.

Пусть, наоборот, некоторая прямая пересекает Γ по (очевидно, замкнутому) множеству γ положительной меры и пусть γ_0 — какое-либо совершенное множество точек его плотности также положительной меры. Выберем некоторый сходящийся ряд $\sum\limits_n \varepsilon_n$ положительных чисел ε_n и пусть $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ — произвольное кольцевое исчерпание для множества Γ.

Для каждой точки a из γ_0 определим окрестность $U_a^{(1)}$ такую чтобы

$$\lambda_a^{(1)} - \operatorname{mes} \gamma_a^{(1)} < \varepsilon_1 \cdot \lambda_a^{(1)}, \tag{1}$$

где $\lambda_a^{(1)}$ — длина интервала $U_a^{(1)}$ а $\gamma_a^{(1)}$ — часть множества γ, расположенного внутри него. Потребуем еще, чтобы отрезки $U_a^{(1)}$ лежали внутри первой системы колец $E_1 = \{E_{1i}\}$ $(i = 1, 2, \ldots, k_1)$, т. е. в области, ограниченной внутренним контуром какого-либо из колец E_{1i}. Выбирая конечное покрытие γ_0 окрестностями $U_a^{(1)}$, можем предположить их непересекающимися, так как в случае перекрытий мы объединим эти окрестности в одну и легко видеть, что для этого объединения соотношение (1) выполняется; систему этих непересекающихся отрезков обозначим $\lambda^{(1)} = \{\lambda_k^{(1)}\}$ $(k = 1, \ldots, m_1)$. Концы их всегда можно выбрать не принадлежащими γ (в силу его разрывности).

На каждом $\lambda_k^{(1)}$ как на средней линии строим прямоугольник $r_k^{(1)}$ настолько узкий, чтобы сумма периметров всех $r_k^{(1)}$ $(k = 1, 2, \ldots, m_1)$, равная $\Lambda^{(1)}$, удовлетворяла неравенству

$$\frac{1}{2} \Lambda^{(1)} - \operatorname{mes} \gamma_0 < C \cdot \varepsilon_1,$$

где C — фиксированное во всем дальнейшем число, обозначающее длину наименьшего сегмента, содержащего систему отрезков $\lambda^{(1)}$.

Имея систему прямоугольников[1] $\Lambda^{(n)} = \{r_k^{(n)}\}$ $(k = 1, \ldots, m_n)$ строим систему $\Lambda^{(n+1)}$ так.

Определяем окрестности $U_a^{(n+1)}$ точек $a \in \gamma_0$, расположенные как внутри системы колец $E_{n+1} = \{E_{(n+1)i}\}$ $(i=1, \ldots, k_{n+1})$, так и внутри системы прямоугольников $\Lambda^{(n)}$ так, чтобы

$$\lambda_a^{(n+1)} - \operatorname{mes} \gamma_a^{(n+1)} < \varepsilon_{n+1} \cdot \lambda_a^{(n+1)},$$

где обозначения ясны из предыдущего. Берем конечное покрытие γ_0 этими окрестностями и, как и раньше, образуем систему $\lambda^{(n+1)} = \{\lambda_k^{(n+1)}\}$ $(k = 1, 2, \ldots, m_{n+1})$ непересекающихся отрезков, покрывающих γ_0. На каждом $\lambda_k^{(n+1)}$ как на средней линии строим прямоугольник $r_k^{(n+1)}$ настоль-

---

[1] Систему прямоугольников и сумму их периметров будем для простоты обозначать одинаково.

ко узкий, чтобы сумма $\Lambda^{(n+1)}$ периметров всех их удовлетворяла неравенству

$$\frac{1}{2}\Lambda^{(n+1)} - \operatorname{mes}\gamma_0 < C\cdot\varepsilon_{n+1}.$$

Для удобства предположим еще, что между $\Lambda^{(n)}$ и $\Lambda^{(n+1)}$ всегда полностью расположена, по крайней мере, одна система колец $E_s = \{E_{si}\}$ $(i=1,\ldots,k_s)$; этого можно достичь, беря первоначальные окрестности $U_a^{(n+1)}$ достаточно малыми.

Оценим теперь члены ряда $\sum\limits_n \beta_n$ для всего множества Γ_i; так как $\gamma_0 \subset \Gamma$, то $\beta_n^* \geqslant \beta_n$, следовательно, $\sum\limits_n \beta_n^* \geqslant \sum\limits_n \beta_n$, где β_n^* — минимум относительных широт колец $\{E_{nt}\}$, покрывающих лишь множество γ_0. Поэтому, если мы докажем сходимость ряда $\sum\limits_n \beta_n^*$, то получим высказанное утверждение.

Рассмотрим лишь те системы колец исчерпания $E_n = \{E_{nt}\}$, которые полностью расположены внутри $\Lambda^{(1)}$; этим отбрасывается некоторое конечное число первых членов ряда $\sum\limits_n \beta_n^*$, не влияющих, конечно, на его сходимость.

Возьмем произвольную систему $\Lambda^{(n)}$; пусть системы колец E_{s_n}, $E_{s_n+1},\ldots,E_{s_n+p-1}$ таковы, что E_{s_n} является первой системой, расположенной полностью внутри $\Lambda^{(n)}$, а E_{s_n+p} — первая система, расположенная полностью внутри $\Lambda^{(n+1)}$. Такая совокупность систем непуста, так как между $\Lambda^{(n)}$ и $\Lambda^{(n+1)}$ всегда находится по крайней мере одна система колец.

Пусть $\{d_{s_n i}\},\ldots,\{d_{(s_n+p-1)\,i}\}$ — широты соответствующих колец, а $\{L_{s_n i}\},\ldots,\{L_{(s_n+p-1)\,i}\}$ — их длины. Ясно, что всегда

$$\sum_i L_{(s_n+r)\,i} \geqslant 2\operatorname{mes}\gamma_0 \qquad (r=0,\ldots,p-1). \tag{2}$$

Далее,

$$2\left(\sum_i d_{s_n i} + \ldots + \sum_i d_{(s_n+p-1)\,i}\right) < \sum_k \lambda_k^{(n)} - \operatorname{mes}\gamma^{(n)} <$$

$$< \varepsilon_n \sum_k \lambda_k^{(n)} < \frac{1}{2}\varepsilon_n \Lambda^{(n)}, \tag{3}$$

где $\gamma^{(n)} = \gamma \cap \Lambda^{(n)}$.

Расположим системы длин $\{L_{(s_n+r)\,i}\}$ в порядке возрастания их сумм; предположим, что уже для первоначальной нумерации будет:

$$2\operatorname{mes}\gamma_0 \leqslant \sum_i L_{s_n i} \leqslant \sum_i L_{(s_n+1)\,i} \leqslant \ldots \leqslant \sum_i L_{(s_n+p-1)\,i}. \tag{4}$$

По определению,

$$\beta^*_{s_n+r} = \min \frac{d_{(s_n+r)\,i}}{L_{(s_n+r)\,i}} \qquad (i=1,\ldots,k_{s_n+r}),$$

а потому

$$\frac{\sum\limits_i d_{(s_n+r)\,i}}{\sum\limits_i L_{(s_n+r)\,i}} \geqslant \beta^*_{s_n+r}.$$

Деля последовательно неравенство (3) на неравенства (4), получим

$$\frac{\varepsilon_n}{8}\cdot\frac{\mathcal{A}^{(n)}}{\operatorname{mes}\gamma_0}\geqslant\frac{\sum\limits_i d_{s_n i}+\ldots+\sum\limits_i d_{(s_n+p-1)\,i}}{\sum\limits_i L_{s_n i}}\geqslant\beta^*_{s_n}+$$

$$+\frac{\sum\limits_i d_{(s_n+1)\,i}+\ldots+\sum\limits_i d_{(s_n+p-1)\,i}}{\sum\limits_i L_{(s_n+1)\,i}}\geqslant\ldots\geqslant\beta^*_{s_n}+\beta^*_{s_n+1}+\ldots+\beta^*_{s_n+p-1}.$$

Так как суммы периметров $\mathcal{A}^{(n)}$ равномерно ограничены и $\operatorname{mes}\gamma_0>0$, то существует абсолютная постоянная M такая, что $M\varepsilon_n\geqslant\sum\limits_{r=0}^{p-1}\beta^*_{s_n+r}$; суммируя это неравенство по n, легко получим сходимость ряда, что и нужно.

Отсюда видно, что первый критерий Л. Сарио принципиально не может решить вопроса об устранимости множеств положительной меры на спрямляемых кривых и, тем более, множеств положительной поверхностной меры. Это показывает, что либо такие множества неустранимы, либо критерий Л. Сарио охватывает сравнительно небольшой класс устранимых границ.

Укажем еще на одно свойство множества, удовлетворяющего первому критерию устранимости. Введем следующее понятие:

Определение. *Ограниченное замкнутое (всюду) разрывное множество Γ называется локально-выпуклым, если, какова бы ни была выпуклая кривая $\tilde{L}$ длины L, окружающая некоторую точку Γ, и ее окрестность $U(\tilde{L})$, существует кривая L^*, окружающая эту же точку, не проходящая через множество Γ, расположенная внутри $U(\tilde{L})$ и длины, не превышающей $K\cdot L$, где K — постоянная для всего множества Γ*[1] ($\tilde{L}$ может иметь общие точки с Γ).

Пусть Γ какое-либо ограниченное замкнутое и разрывное множество. Рассмотрим произвольное его замкнутое подмножество e, $e\subseteq\Gamma$. Будем проводить всевозможные конечные системы спрямляемых кривых, не проходящих через множество Γ и окружающих все множество e, и только его; нижнюю грань сумм длин этих кривых, когда диаметры их стремятся к нулю, назовем относительной длиной множества $e\subseteq\Gamma$ (относительно Γ). В частном случае, когда $e=\Gamma$, — это определение длины разрывного множества Γ по Пенлеве.

Докажем теперь следующее утверждение:

Для того чтобы множество Γ плоской меры нуль было локально-выпуклым, необходимо и достаточно, чтобы каждое подмножество $e\subseteq\Gamma$ длины нуль имело и относительную длину нуль.

---

[1] Можно было бы показать, что класс локально-выпуклых множеств совпадает с классом множеств со всюду конечной извилистостью (понятие, введенное Данжуа [2]); отсюда вытекает, что в определении локально-выпуклого множества можно требовать лишь, чтобы конечное число K зависело от точки множества Γ.

Легко показать, что в качестве последовательности систем спрямляемых кривых, „реализующих длину" множества e длины нуль, можно брать выпуклые кривые. Отсюда вытекает необходимость высказанного условия.

Возьмем произвольную выпуклую кривую $\tilde{L}$, окружающую некоторую точку из Γ; в любой окрестности $U(\tilde{L})$ существует ломаная λ, пересекающая Γ по множеству e меры нуль, так как поверхностная мера Γ есть нуль. Если теперь e имеет и относительную длину нуль, то отсюда вытекает локальная выпуклость множества Γ.

Это утверждение показывает, что свойство локальной выпуклости множества сохраняется при любых конформных отображениях.

Из проведенного рассуждения видно, что в условии нашего утверждения мы могли бы брать не произвольные подмножества e длины нуль, а лишь расположенные на прямых множества меры нуль.

Используя это замечание, покажем, что множество, удовлетворяющее первому критерию устранимости, будет локально-выпуклым.

Если бы это было не так, то существовала бы прямая, пересекающая Γ по некоторому множеству e меры нуль, относительная длина которого $l > 0$. Для сходящегося ряда $\sum_n \varepsilon_n$ положительных чисел ε_n выбираем покрытия множества e системами $\lambda^{(n)} = \{\lambda_k^{(n)}\}$ $(k = 1, \ldots, m_n)$ непересекающихся отрезков так, чтобы $\sum_k \lambda_k^{(n)} \leqslant \varepsilon_n$. Тогда неравенствам (2) и (3) соответствуют здесь неравенства:

$$\sum_i L_{(s_n+r)\, i} \geqslant l$$

$$2\Big(\sum_i d_{s_n i} + \ldots + \sum_i d_{(s_n+p-1)\, i}\Big) \leqslant \varepsilon_n.$$

Так же, как и раньше, придем к сходимости ряда $\sum_n \beta_n$ при любом кольцевом исчерпании внешности Γ.

Итак, имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *Множество Γ, удовлетворяющее при некотором кольцевом исчерпании первому критерию устранимости, $\sum_n \beta_n = \infty$, обладает свойствами:* 1) *каждая спрямляемая кривая на плоскости пересекает его по множеству меры нуль;* 2) *оно локально-выпукло.*

3. О множествах, удовлетворяющих второму критерию устранимости

Если подобным образом исследовать и второй критерий Л. Сарио: $\sum_n \frac{1}{q_n} = \infty$, то можно показать гораздо больше, а именно:

Теорема 2. *Множество Γ, удовлетворяющее второму критерию устранимости, $\sum_n \frac{1}{q_n} = \infty$, проектируется как на ось x-ов, так и на ось y-ов в множество меры нуль*[1].

---

[1] Исключительность осей координат связана здесь с выводом самого критерия (см. п. 1). Но весьма вероятно, что множество Γ с только что указанным свойством, проектируется и в любом направлении на множество меры нуль.

Допуская противное, получим, что, например, на ось x-ов множество Γ проектируется в замкнутое множество P' положительной меры. Не ограничивая общности, можем предположить, что Γ расположено в верхней полуплоскости.

Для каждого $x_0 \in P'$ прямая $x = x_0$ пересекает Γ по некоторому (непустому по условию) замкнутому множеству Γ_{x_0}; выбирая в каждом таком множестве ближайшую к x_0 точку $f(x_0)$, получим вполне определенную функцию $f(x) \geqslant 0$, заданную на множестве P'. Эта функция измерима — даже B-измерима, — так как множества вида $E\{f < a\}$ замкнуты. Существует поэтому совершенное множество $P \subset P'$ положительной меры, на котором $f(x)$ непрерывна. Ясно, что график этой функции есть совершенное разрывное подмножество Q множества Γ, а потому разрывным будет и P.

Снова рассматриваем совершенное множество γ_0 точек плотности P положительной меры: $\operatorname{mes} \gamma_0 > 0$; графиком функции $f(x)$ на γ_0 есть некоторое совершенное подмножество $q \subset \Gamma$.

Строя для γ_0 систему $\lambda^{(1)} = \{\lambda_k^{(1)}\}$ $(k = 1, \ldots, m_1)$ непересекающихся отрезков (см. п. 2), рассмотрим лишь те кольца указанного в п. 1 вида, которые охватывают q и проектируются внутрь $\lambda^{(1)}$; это, как и раньше, не будет влиять на сходимость исследуемых нами рядов. Имея $\lambda^{(n)}$, строим $\lambda^{(n+1)}$ так же, как и в п. 2, и предположим для удобства, что „между" системами $\lambda^{(n)}$ и $\lambda^{(n+1)}$ находится полная проекция по крайней мере одной системы $E_s = \{E_{si}\}$ колец нашего исчерпания, т. е. что каждое кольцо этой системы проектируется внутрь какого-либо $\lambda_k^{(n)}$ и каждое $\lambda_k^{(n+1)}$ содержится в проекции внутреннего контура γ'_{si} какого-либо кольца E_{si} этой системы.

Ясно, что ширина произвольного кольца в нашем исчерпании проектируется во внешность множества P с сохранением длины в проекции, следовательно, неравенство (3) имеет место и в этом случае:

$$2\Big(\sum_i d_{s_n i} + \ldots + \sum_i d_{(s_n+p-1)\,i}\Big) < \varepsilon_n \sum_n \lambda_k^{(n)}.$$

А так как, очевидно,

$$\sum_i L_{(s_{n+r})\,i} \geqslant 2 \operatorname{mes} \gamma_0 \qquad (r = 0, \ldots, p-1),$$

то обычным путем приходим к сходимости ряда $\sum\limits_n \beta_n > \dfrac{1}{32} \sum\limits_n \dfrac{1}{q_n}$.

Теорема доказана.

Покажем теперь, что второй критерий дает множества, обладающие свойством, более сильным, чем устранимость; оно вытекает из следующего общего утверждения:

Теорема 3. *Пусть Γ — некоторое множество на плоскости Z, расположенное в ограниченной области D, обладающее тем свойством, что проекция его как на ось x-ов, так и на ось y-ов имеет меру нуль. Тогда, если $f(z)$ — измеримая функция, моногенная вне Γ в области D и* $\iint\limits_{D \setminus \Gamma} |f'(z)|\,dx\,dy = \iint\limits_D |f'|\,d\omega < \infty$, *то $f(z)$ аналитична всюду в области D.*

Возьмем в области D произвольный прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат: $R\,[x_1 \leqslant x \leqslant x_2;\ \ y_1 \leqslant y \leqslant y_2]$; из суммируемости $|f'(z)|$ по области D вытекает суммируемость частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}, \ldots$ по области D и, тем более, по прямоугольнику $R\,(f(z)= = u + iv)$.

Поэтому по теореме Фубини

$$\iint\limits_R \frac{\partial u}{\partial x}\,dx\,dy = \int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x}\,dx.$$

Почти для всех значений y из $[y_1, y_2]$, а, значит, почти для всех $y \in C\Gamma_y$ (Γ_x и Γ_y суть соответствующие проекции множества Γ на ось x-ов и y-ов), внутренний интеграл $\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x}\,d_n = u(x_2,\ y) - u(x_1,\ y)$, так как $\frac{\partial u}{\partial x}$ существует всюду вне Γ — в силу моногенности там функции $f(z)$, а для точной всюду конечной и суммируемой производной интеграл Лебега решает вопрос о восстановлении первообразной. Поэтому

$$\iint\limits_R \frac{\partial u}{\partial x}\,dx\,dy = \int\limits_{y_1}^{y_2} [u(x_2,\ y) - u(x_1,\ y)]\,dy;$$

легко показать, что и каждое слагаемое под знаком последнего интеграла суммируемо; для этого достаточно зафиксировать, например, значение x_1 и выбрать $x_2^* \in C\Gamma_x$. Отсюда имеем право написать:

$$\int\limits_{y_1}^{y_2} [u(x_2,\ y) - u(x_1,\ y)]\,dy = \int\limits_R u\,dy.$$

Аналогично вычисляются и остальные интегралы $\iint\limits_R \frac{\partial v}{\partial x}\,dx\,dy, \ldots$ Окончательно получим

$$-\iint\limits_R \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx\,dy + i \iint\limits_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy =$$

$$= \int\limits_R u\,dx - v\,dy + i \int\limits_R v\,dx + u\,dy = \int\limits_R f(z)\,dz.$$

Так как (плоская) мера Γ равна нулю, то условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

выполнены почти всюду в R и из предыдущего равенства следует:

$$\int\limits_R f(z)\,dz = 0.$$

Аналогично покажем справедливость этого равенства для произвольного выпуклого контура внутри области D, а отсюда, в силу одной теоремы Г. П. Толстова [3][1], следует аналитичность $f(z)$ всюду внутри области D, и т. д.

Если, в частности, Γ замкнуто, а в силу условия теоремы и разрывно, то каждая нетождественная постоянной однозначная всюду вне Γ аналитическая функция $f(z)$ не может обладать суммируемым в окрестности Γ, — а, значит, и по всей его внешности, — модулем производной $|f'(z)|$. Это и есть искомое усиление критерия Л. Сарио.

Замкнутое разрывное множество длины нуль всегда обладает свойством, высказанным в теореме 3; поэтому такое множество устранимо (даже с усилением). В частности, любое замкнутое множество на спрямляемой кривой меры нуль устранимо; это — в некотором смысле обобщение полученных Л. Сарио результатов. Устранимость — но без усиления — замкнутых множеств длины нуль можно было бы получить и более простым путем.

Итак, множество, удовлетворяющее второму критерию устранимости, обладает свойством, высказанным в теореме 2. Естественно поставить вопрос, будет ли иметь место подобное свойство и в условиях теоремы 1; оказывается, что нет. Более того, каково бы ни было замкнутое множество на оси x-ов, существует в плоскости множество Γ, которое проектируется в точности в это множество и для которого при некотором исчерпании $\sum\limits_n \beta_n = \infty$. Это показывает, что первый критерий является существенно более общим, чем второй.

Построение указанных примеров, а также некоторых других, побочных составляет содержание следующих пунктов.

4. Построение некоторых множеств, удовлетворяющих первому критерию устранимости

Пусть задано произвольное замкнутое множество P на оси x-ов; это множество всегда можно представить в виде пересечения монотонно убывающей совокупности систем $q^{(n)} = \{q_k^{(n)}\}$, $q^{(n)} \supseteq q^{(n+1)}$, $(k = 1, \ldots, m_n)$ отрезков, максимальный диаметр ε_n которых стремится к нулю с возрастанием n. Предположим еще, что $\varepsilon_n \geqslant 6\,\varepsilon_{n+1}$, тогда $\varepsilon_n > 2\,(2\,\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+2})$.

Будем строить искомое множество Γ как пересечение конечных систем прямоугольников, вложенных одна в другую. Пусть крайними для P точками будут a и b; тогда в качестве системы $R^{(0)}$ примем прямоугольник $R\,[a - \varepsilon_0 \leqslant x \leqslant b + \varepsilon_0;\ 0 \leqslant y \leqslant 2\,(2\,\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]$.

Имея систему $R^{(n)}$ прямоугольников, строим $R^{(n+1)}$ так: внутри каждого прямоугольника $R_k^{(n)}$ системы $R^{(n)}$ помещаем четные и соответственно нечетные прямоугольники $\tilde{R}_l^{(n+1)}$ на одинаковой ординате, расположенные над соответствующими $q_l^{(n+1)}$ и имеющие высоту, равную ε_{n+2}, причем расстояние по высоте между $\tilde{R}_l^{(n+1)}$ и $\tilde{R}_{l+1}^{(n+1)}$ равно ε_{n+1}. Всегда можно потребовать, чтобы расстояние между $q_k^{(n+1)}$ и $q_{k+2}^{(n+1)}$ было $\geqslant \varepsilon_{n+1}$. К каждому из этих прямоугольников справа и слева пристраиваем

---

[1] Вот формулировка этой теоремы: если $f(z)$ — измерима в области D и для всякого замкнутого и выпуклого контура C, лежащего в D, $\int\limits_C f(z)\,dz = 0$, причем интеграл берется в смысле Лебега, то с точностью до изменения на множестве плоской нулевой меры $f(z)$ есть функция, аналитическая в D.

квадраты со стороной ε_{n+2}; систему полученных прямоугольников и определим как $R^{(n+1)}$. По построению $R_l^{(n+1)}$ расположены строго внутри прямоугольников системы $R^{(n)}$.

На расстоянии $\frac{\varepsilon_{n+1}}{2}$ от каждого $\tilde{R}_k^{(n+1)}$ строим прямоугольник $Q_k^{(n+1)}$; простое вычисление показывает, что относительная ширина кольца, образованного контурами $Q_k^{(n+1)}$ и $R_k^{(n+1)}$ удовлетворяет неравенству

$$\beta_k^{(n+1)} \geqslant \frac{\frac{1}{2}\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+2}}{3\varepsilon_{n+1} + 4\varepsilon_{n+2}} > \frac{1}{12}.$$

Эти кольца также полностью расположены внутри прямоугольников системы $R^{(n)}$ и не перекрываются между собой.

Пересечение всех систем $R^{(n)}$ прямоугольников, очевидно, дает нам некоторое плоское разрывное множество Γ; нетрудно проверить, что оно в точности проектируется в данное множество P. Построенные выше кольца образуют в силу построения кольцевое исчерпание для нашего множества Γ, причем произвольное такое кольцо имеет относительную ширину $\beta > \frac{1}{12}$, и ряд $\sum_n \beta_n$ тривиальным образом расходится, т. е. Γ удовлетворяет первому критерию устранимости.

Несколько видоизменяя построение, можно получить множество, удовлетворяющее соотношению $\sum_n \beta_n = \infty$, проектирующееся в любом направлении в некоторый сегмент, и для каждой точки которого в некоторой ее окрестности нельзя провести точной выпуклой кривой, не проходящей через множество Γ. Если вспомнить, что множества с соотношением $\sum_n \beta_n = \infty$ пересекаются с любой спрямляемой кривой по множеству меры нуль, а также локально-выпуклы, то существование такого множества не является очевидным.

5. О диференцируемости непрерывных функций, обладающих свойством (N)

Сделаем еще некоторые замечания по поводу полученных примеров. Из подробно проведенного выше построения множеств видно, что в случае разрывности их проекций они являются графиками непрерывных функций, заданных на проекции, и даже имеют конечную длину.

Рассмотрим произвольные непрерывные функции, заданные на совершенном разрывном множестве P положительной меры; либо такая функция обладает свойством (N) [1] на P, либо существует совершенное множество меры нуль, отображающееся на оси y-ов в множество положительной меры π. Беря для π однозначное непрерывное соответствие $x = \varphi(y)$, определенное на совершенном подмножестве $\pi_0 \subseteq \pi$ положительной меры (см. п. 3), найдем, что все π_0 отображается на некоторое множество меры нуль, т. е. $\varphi(y)$ заведомо обладает свойством (N) на π_0. Итак, для произвольного замкнутого множества Γ на плоскости, проектирующегося в некотором направлении на множество положительной меры,

[1] О свойстве (N) см. [4].

можно определить совершенное его подмножество Γ_0, являющееся графиком непрерывной функции $f(x)$ на некотором совершенном множестве π_0 положительной меры, обладающей там свойством (N).

Если к тому же Γ пересекается с любой спрямляемой кривой по множеству меры нуль, то для такой функции имеют место соотношения:

$$\bar{f}^{+}(x) = \bar{f}^{-}(x) = +\infty,$$
$$\underline{f}^{+}(x) = \underline{f}^{-}(x) = -\infty.$$

Более точно: контингенция в каждой точке Γ_0, кроме подмножества его длины нуль, есть полная плоскость[1]. В самом деле, если бы на множестве положительной длины контингенция не была полной плоскостью, то из теории Колмогорова-Верченко следовало бы, что существует кривая, удовлетворяющая в некоторой системе координат условию Липшица, пересекающая наше множество по множеству положительной длины. Но так как Γ_0 замкнуто, то эта кривая пересекает его по замкнутому множеству положительной меры, что противоречиво (ведь кривая, удовлетворяющая условию Липшица, подавно спрямляема). Если, в частности, Γ удовлетворяет первому критерию Л. Сарио и проектируется в какое-либо направлении на множество положительной меры, то подобные функции всегда можно определить.

Из предыдущего построения видно, что множество Γ проектируется на ось y-ов в множество меры $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n\varepsilon_n = 0$. Беря проекцию P разрывной и положительной меры и линейно интерполируя полученную функцию на интервалах смежности к P, получим функцию $F(x)$, непрерывную на сегменте, обладающую там свойством (N) и даже являющуюся суперпозицией абсолютно непрерывных функций (см. [6]), которая почти всюду на P не имеет ни обыкновенной производной, ни асимптотической. Отсюда следует, что $F(x)$ не является даже функцией обобщенной ограниченной вариации в широком смысле (см. [5]).

Как известно (см. [6]), функция $f(x)$, непрерывная *на сегменте* и обладающая на нем свойством (N), имеет квази-всюду на этом сегменте конечную производную (т. е. на измеримом множестве, каждая порция которого на этом сегменте имеет положительную меру). Из предыдущего следует, что свойство Дарбу непрерывной на сегменте функции является здесь существенным фактом для наличия производной квази-всюду.

ЛИТЕРАТУРА

1. **L. Sario, Über Riemannsche Flächen mit hebbarem Rand, Ann. Acad. Sci. Fennicae, A. I. 50, 1948.**

2. **A. Denjoy, Sur les ensembles parfaits discontinus à deux dimensions. C. R. Acad. Sci., 149, 1909, 726—728.**

3. Г. П. Толстов, О криволинейном и повторном интеграле, Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, XXXV, 1950.

4. Н. Н. Лузин, Интеграл и тригонометрический ряд, 1951.

5. С. Сакс, Теория интеграла, 1949.

6. **N. Bary, Mémoire sur la représentation finie des fonctions continues, Math. Ann., 103, 1930, 185—248.**

Получена
25 марта 1952 г.

[1] О понятии контингенции и результатах Колмогорова и Верченко см. С. Сакс [5].