

Устойчивость движения автомобиля

И. И. Метелицын

(Окончание)¹

6. Уравнения движения автомобиля с трехколесным шасси

Выведем теперь уравнения движения автомобиля, предполагая, что он имеет три колеса: допустим, что два задние колеса абсолютно жесткие, а переднее носовое снабжено эластичной шиной.

Ось переднего колеса укреплена в вилке, которая может поворачиваться относительно корпуса автомобиля (рис. 10).

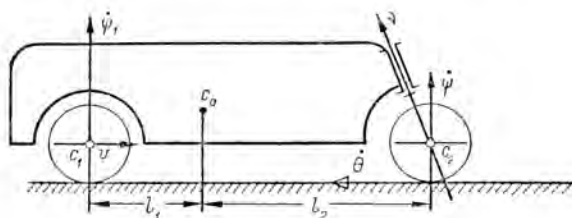


Рис. 10.

Предположим, что установившееся (невозмущенное) движение автомобиля — поступательное, прямолинейное и равномерное, и исследуем возмущенное движение в предположении, что скорость „главного движения“ остается той же, что и при невозмущенном движении.

Составим отдельно уравнения движения для автомобиля без переднего колеса и отдельно для переднего колеса. Та и другая группа уравнений будут содержать реакции внутренних связей.

Уравнения движения автомобиля в целом получим после исключения реакций².

Обозначим через K и M_1 результирующую силу и момент результирующей пары аэродинамических сил, вычисленные в предположении, что за центр приведения выбрана точка C_0 — центр тяжести автомобиля.

¹ Начало см. Украинский матем. журнал, т. IV, № 3.

² Уравнения движения могут быть получены из уравнений движения мотоцикла. См. И. И. Метелицын, Устойчивость движения мотоцикла, „Труды Академии“, № 9, изд. Военной Академии им. Сталина, 1948.

Воспользовавшись обозначениями, приведенными на рис. 10 и 11, напишем уравнения движения автомобиля без переднего колеса

$$m_1 w_{1x_1} = X_1 - X + Y \cdot \delta + K_x, \quad (6,1)$$

$$m_1 w_{1y_1} = Y_1 - Y - X \cdot \delta - Z \cdot \theta + K_y, \quad (6,2)$$

$$m_1 w_{1z_1} = Z_1 + Y \theta - Z - P + K_z, \quad (6,3)$$

$$C_0 \ddot{\psi}_1 = -Y_1 l_1 - (Y + Z \cdot \theta + X \delta) l_2 + M_z - L_z + e(X - Y \delta) \vartheta. \quad (6,4)$$

Уравнения (6,1), (6,2) и (6,3) представляют уравнения движения центра тяжести. Последнее уравнение (6,4) — уравнение моментов количеств движения относительно центра тяжести автомобиля без переднего колеса. Оно справедливо только в том случае, если реакция X_1 равна нулю или лежит в плоскости $C_1 x_1 z_1$, т. е. ее момент относительно вертикальной оси, проходящей через центр тяжести, равен нулю.

Для автомобиля реакция X_1 не равна нулю; для самолета, шасси которого имеет носовое колесо, можно положить $X_1 = 0$, так как лобовое сопротивление уравнивается тягой винта.

Имея в виду рассмотреть устойчивость равномерного поступательного движения, найдем, что уравнения будут иметь один и тот же вид и для автомобиля, и для самолета с трехколесным шасси.

В дальнейшем мы будем полагать

$$X_1 + K_x = 0, \quad w_{1x_1} = 0, \quad w_{1z_1} = 0$$

и

$$w_{1y_1} = v \dot{\psi}_1, \quad (6,5)$$

где v — постоянная по величине скорость точки, лежащей между центрами задних колес в плоскости симметрии $C_1 x_1 z_1$.

Уравнения движения переднего колеса можно заимствовать из предыдущего параграфа:

$$m w_{cx} = X + X', \quad (6,6)$$

$$m w_{cy'} = Y + Y' + (Z' + Z - P) \theta, \quad (6,7)$$

$$m w_{cz} = -(Y + Y') \theta + (Z + Z' - P), \quad (6,8)$$

$$A \ddot{\theta} + B \omega \dot{\psi} = -Y' R_1 - Z' (u + r \theta) - L_x, \quad (6,9)$$

$$C \ddot{\psi} - B \theta \dot{\theta} = X' (R \theta - u) + M_n + L_z. \quad (6,10)$$

Здесь мы также положим

$$w_{cx} = 0, \quad w_{cy'} = \frac{dv_{cy'}}{dt} + v_e \dot{\psi}', \quad w_{cz} = 0, \quad (6,11)$$

$$v_e = v = \omega R_1, \quad v_{cy'} = \dot{\theta} l_1 - \frac{d^* u}{dt},$$

$$-\omega \dot{\theta} + \dot{\psi}' + \frac{d^* \gamma'}{dt} = 0, \quad (6,12)$$

$$Y' = c_1 u, \quad M_n = c_2 \gamma', \quad X' = -X = 0.$$

Добавим к этим уравнениям уравнение моментов относительно оси вилки, причем силами инерции вилки пренебрежем:

$$M - Ye + L_x \sin \alpha - L_z \cos \alpha = 0. \quad (6,13)$$

Из уравнения (6,7) видно, что сумма $(Y + Y')$ есть малое первого порядка, а поэтому в уравнении (6,8) сумма $(Z' + Z - P)$ — малое второго порядка; следовательно, можно положить

$$Z' + Z - P = 0. \quad (6,14)$$

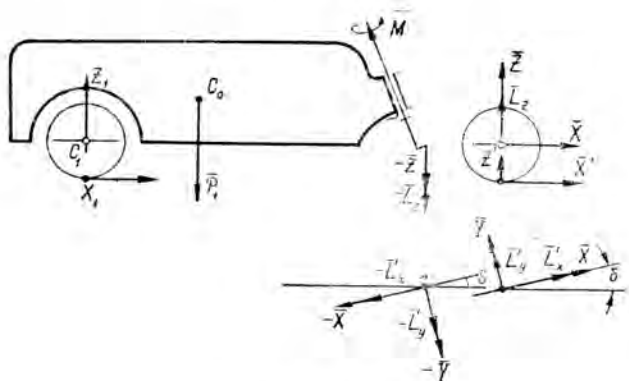


Рис. 11.

Из уравнений (6,14), (6,3) и уравнения моментов для всего автомобиля в целом относительно центра тяжести C_0 можно определить Z_1 и Z' :

$$\begin{aligned} Z' &= \frac{(P_0 - K_z)l_1 + M_{1y}}{l_1 + l_2}, \\ Z_1 &= \frac{(P_0 - K_z)l_2 - M_{1y}}{l_1 + l_2}. \end{aligned} \quad (6,15)$$

Реакции Z' и Z_1 оказываются постоянными, и мы не будем исключать их из уравнений движения, считая известными.

Заметим еще, что

$$Z = P - Z' \approx -Z'.$$

Из уравнений (6,2) и (6,4) исключим Y_1 и найдем

$$C_0 \ddot{\psi}_1 + m_1 l_1 w_{y_1} = -(Y + Z\theta)l - L_z. \quad (6,16)$$

Если отсюда исключить еще Y и L_z , то получим уравнение, не содержащее реакций:

$$C_0 \ddot{\psi}_1 + m_1 l_1 w_{y_1} + mlw_{ey} + C\ddot{\psi} - B\omega\dot{\theta} = Y'l - Zl\theta + K_y l_1 + M_{1z} + M_n. \quad (6,17)$$

Из уравнений (6,7), (6,9), (6,10), (6,13) исключим Y , L_x и L_z , после чего будем иметь в нашем распоряжении еще одно уравнение, не содержащее реакций связей:

$$\begin{aligned} M - (mw_{ey} - Y')e - [Y'R_1 + Z'(u + r\theta) + A\ddot{\theta} + B\omega\dot{\psi}] \sin \alpha - \\ - [C\ddot{\psi} - B\omega\dot{\theta} - M_n] \cos \alpha = 0. \end{aligned} \quad (6,18)$$

В нашем распоряжении теперь имеются два уравнения (6,17) и (6,18), свободные от неизвестных реакций связей. К ним добавим еще кинематическое уравнение, которое можно получить, выразив, что скорость точки прикосновения переднего колеса равна нулю.

Во-первых, мы нашли уже выше:

$$v_{cy} = \dot{\theta} R_1 - \frac{d^* u}{dt}; \quad (6,18)$$



Рис. 12.

во-вторых, скорость той же точки можно представить еще и так (рис. 12):

$$v_{cy} = l\dot{\psi}_1 + e\dot{\vartheta} - v\delta.$$

Из этих двух уравнений находим:

$$\dot{\theta} R_1 - \frac{d^* u}{dt} = e\dot{\vartheta} - v\delta + l\dot{\psi}_1. \quad (6,19)$$

Теперь из уравнений движения исключим ψ , θ и δ , заменив их углом поворота ϑ вилки переднего колеса относительно кузова.

Так как все вычисления ведутся с точностью до малых первого порядка, то соотношение между углами можно установить, исходя из соотношения между угловыми скоростями:

$$\dot{\psi} = \dot{\psi}_1 + \dot{\vartheta} \cos \alpha = \dot{\psi}_1 + \dot{\delta},$$

$$\dot{\theta} = \dot{\vartheta} \sin \alpha.$$

Отсюда и находим нужные нам соотношения:

$$\psi = \psi_1 + \vartheta \cos \alpha,$$

$$\theta = \vartheta \sin \alpha, \quad (6,20)$$

$$\delta = \vartheta \cos \alpha.$$

После несложных преобразований приведем систему уравнений движения и кинематических уравнений к следующему виду:

$$I_1 \ddot{\psi}_1 + m_0 l_0 v \dot{\psi}_1 + I \ddot{\vartheta} \cos \alpha = Y' l - Z l \sin \alpha \vartheta + K_y l_1 + M_{12} + M_n,$$

$$I \cos \alpha \ddot{\psi}_1 + m l v \dot{\psi}_1 + I_2 \ddot{\vartheta} = Y' d - Z' (u + r \sin \alpha \cdot \vartheta) + M_n \cos \alpha + M,$$

$$l \dot{\psi}_1 + d \dot{\vartheta} - v \cos \alpha \vartheta + \frac{du}{dt} - v \gamma = 0,$$

$$\dot{\psi}_1 + \dot{\vartheta} \cos \alpha - \frac{v}{R_1} \sin \alpha \cdot \vartheta + \frac{d\gamma}{dt} - v \frac{d\gamma}{ds} = 0. \quad (6,21)$$

Здесь I_1 — момент инерции автомобиля около оси C_1z , проходящей через середину оси задних колес шасси; I_2 — момент инерции переднего колеса относительно оси вилки.

Кроме того,

$$\begin{aligned} I &= C + ml \frac{C}{\cos \alpha}, \\ m_0 l_0 &= m_1 l_1 + ml, \\ m \lambda &= me + \frac{B \sin \alpha}{r}, \\ d &= e - R_1 \sin \alpha, \\ Y' &= c_1 u, \\ M_1 &= c_2 \gamma. \end{aligned} \tag{6,22}$$

Мы положим в дальнейшем:

$$\frac{d\gamma}{ds} = 0.$$

7. Устойчивость движения автомобиля с жесткими колесами

Вспользуемся предыдущими уравнениями и исследуем сначала устойчивость движения в предположении, что переднее колесо является абсолютно жестким.

Тогда в уравнениях (6,21) надо положить

$$u = 0, \quad \gamma = 0.$$

Теперь Y' — боковая реакция переднего колеса — является неопределенной и должна быть исключена из этих уравнений; четвертое уравнение вообще отпадает.

Заметим заранее, что во всех конструкциях

$$d = e - R_1 \sin \alpha = e - (R + r) \sin \alpha < 0;$$

положим поэтому

$$d' = -d = (R + r) \sin \alpha - e > 0.$$

В таком случае взамен системы уравнений (6,21) получим после преобразований следующие два уравнения:

$$\begin{aligned} (I_1 d' + I l \cos \alpha) \ddot{\psi}_1 + (m_0 l_0 d' + m \lambda l) v \dot{\psi}_1 + (I_2 l + I d' \cos \alpha) \ddot{\vartheta} &= \\ = (K_{\theta} l_1 + M_{1z}) d' - Z' l \sin \alpha d_1' \vartheta + M \cdot l, & \tag{7,1} \\ b \dot{\psi}_1 - d' \vartheta - v \cos \alpha \cdot \vartheta = 0, & \end{aligned}$$

где

$$d_1' = -e + R \sin \alpha.$$

Чтобы несколько упростить коэффициенты, отбросим $I_1 l \cos \alpha$ — малую величину по сравнению с $I_1 d'$; без существенной погрешности можно пренебречь слагаемым $m \lambda l'$ по сравнению с $m_0 l_0 d'$; для коэффициента при ϑ введем обозначение:

$$I_2' l = I_2 l + I d' \cos \alpha.$$

Предположим для упрощения, что $K_{\theta} = 0$, $M_{1z} = 0$, $M = 0$.

В таком случае мы исследуем устойчивость движения при уравновешенных аэродинамических силах с неуправляемым передним колесом; для этого случая уравнения еще более упрощаются:

$$\begin{aligned} I_1 d' \ddot{\psi}_1 + m_0 l_0 l' \dot{\alpha} \dot{\psi}_1 + I_2' \ddot{\vartheta} + Z' l d_1' \sin \alpha \cdot \vartheta = 0, \\ l \dot{\psi}_1 - d' \dot{\vartheta} - v \cos \alpha \vartheta = 0. \end{aligned} \quad (7,2)$$

Положим

$$\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_0 e^{i\mu t}, \quad \vartheta = \vartheta_0 e^{i\mu t}$$

и рассмотрим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} I_1 d' \mu + m_0 l_0 d' v, & I_2 l \mu^2 + Z' d_1' l \sin \alpha \\ l, & -d' \mu - v \cos \alpha \end{vmatrix} = 0 \quad (7,3)$$

или

$$\begin{aligned} (I_1 d'^2 + I_2' l^2) \mu^2 + (m_0 l_0 d'^2 + I_1 d' \cos \alpha) v \mu + \\ + (m_0 l_0 d' v^2 \cos \alpha + Z' l^2 d' \sin \alpha) = 0. \end{aligned}$$

Оба корня этого уравнения имеют отрицательные вещественные части, так как все три коэффициента уравнения положительны.

Если

$$\begin{aligned} \Delta = (m_0 l_0 d'^2 + I_1 d' \cos \alpha)^2 v^2 - \\ - 4(I_1 d'^2 + I_2' l^2)(m_0 l_0 d' v^2 \cos \alpha + Z' l^2 d' \sin \alpha) < 0, \end{aligned} \quad (7,4)$$

то оба корня уравнения комплексные.

Если же

$$\Delta > 0,$$

то оба корня действительные и отрицательные.

Итак, движение асимптотически устойчиво и в первом, и во втором случае.

Однако характер колебаний автомобиля зависит от соотношений между коэффициентами уравнения (7,3). Если положить

$$2h = \frac{(m_0 l_0 d'^2 + I_1 d' \cos \alpha) v}{I_1 d'^2 + I_2' l^2}, \quad k^2 = \frac{m_0 l_0 d' \cos \alpha v^2 + Z' l^2 d' \sin \alpha}{I_1 d'^2 + I_2' l^2},$$

то решение уравнения (7,2) можно записать в следующем виде:

$$\vartheta = A e^{-ht} \sin(k_1 t + \epsilon), \quad k_1^2 = k^2 - h^2.$$

Чем больше скорость автомобиля, тем больше h и тем быстрее, следовательно, затухают колебания.

Частота колебаний

$$N = \frac{k_1}{2\pi}$$

также увеличивается с увеличением скорости, если

$$4m_0 l_0 d' \cos \alpha \cdot I_2' l^2 - (m_0 l_0 d'^2 - I_1 d' \cos \alpha)^2 > 0. \quad (7,5)$$

Если

$$\vartheta|_{t=0} = 0 \quad \text{и} \quad \dot{\vartheta}|_{t=0} = \dot{\vartheta}_0,$$

то

$$\vartheta = \frac{\dot{\vartheta}_0}{k_1} e^{-ht} \sin k_1 t.$$

Начальная угловая скорость $\dot{\vartheta}_0$ может быть получена от случайного толчка; из последнего равенства находим, что колебания тем быстрее затухнут, чем больше скорость автомобиля.

Легко найти также, что наибольшее отклонение ϑ_{\max} зависит от h и k :

$$\vartheta_{\max} = \frac{\dot{\vartheta}_0}{k} e^{-h \operatorname{arctg} \frac{k_1}{k}}.$$

Чем больше k и h , тем меньше ϑ_{\max} , т. е. с повышением скорости прочность движения повышается.

Все это справедливо, если соблюдается неравенство (7,5); последнее может быть использовано конструктором при поверочном расчете автомобиля.

Напомним, что

l — база,

l_0 — расстояние от вертикальной плоскости, проходящей через центры задних колес до центра тяжести автомобиля,

$$d' = R_1 \sin \alpha - e,$$

$$d_1' = R \sin \alpha - e,$$

α — угол наклона вилки переднего колеса.

Интересно отметить, что в случае хвостового колеса труднее удовлетворить условиям устойчивости.

Эти условия можно найти из написанных выше неравенств, если в них считать l и l_0 отрицательными.

Теперь характеристическое уравнение приняло бы следующий вид:

$$(I_1 d'^2 + I_2 l^2) v^2 + (-m_0 l_0 d'^2 + I_1 a' \cos \alpha) v v' + (-m_0 l_0 d' \cos \alpha \cdot r^2 + Z l^2 d' \sin \alpha) = 0. \quad (7,6)$$

Если в уравнении (7,3) коэффициенты оставались положительными при всех условиях, то теперь должны быть выполнены два условия:

$$d' < \frac{I_1 \cos \alpha}{m_0 l_0}, \quad r^2 < \frac{Z l^2 d' \sin \alpha}{m_0 l_0 d' \cos \alpha}.$$

В данном случае существует верхняя граница скорости, а, кроме того, вылет управляемого колеса должен быть выбран надлежащим образом.

Замечено, что самолет с хвостовым колесом обнаруживает при взлете и посадке плохую устойчивость, что совпадает со сделанными выводами.

Возвращаясь опять к шасси с носовым колесом, рассмотрим, какое влияние оказывает демпфирование колебаний вилки (стойки) носового колеса.

В уравнениях (7,1) момент M есть момент внутренних заданных сил, приложенных к вилке; мы можем положить

$$M = -c\dot{\vartheta},$$

считая, что момент пропорционален угловой скорости.

Тогда уравнения движения примут следующий вид (упрощенная форма):

$$\begin{aligned} I_1 d' \ddot{\psi}_1 + m_0 l_0 v \dot{\psi}_1 + I_2' \ddot{\vartheta} + cl \dot{\vartheta} + Z' l \sin \alpha \cdot d' \dot{\vartheta} &= 0, \\ l \ddot{\psi}_1 - d' \dot{\vartheta} - v \cos \alpha \dot{\vartheta} &= 0. \end{aligned} \quad (7,7)$$

Характеристическое уравнение будет мало отличаться от уравнения (7,3):

$$\begin{aligned} (I_1 d'^2 + I_2' l^2) \mu^2 + \left(m_0 l_0 d' + I_1 d' \cos \alpha + \frac{cl^2}{v} \right) v \mu + \\ + (m_0 l_0 d' v^2 \cos \alpha + Z' l^2 d' \sin \alpha) = 0. \end{aligned} \quad (7,8)$$

Отсюда следует, что введением демпфирующего момента можно добиться увеличения декремента затухания, но характер колебаний при этом не изменится.

Иное получится, если учесть кулоново трение, положив

$$M = M(\dot{\vartheta}) \begin{cases} > 0, & \text{если } \dot{\vartheta} < 0 \\ < 0, & \text{если } \dot{\vartheta} > 0. \end{cases}$$

Момент M сохраняет свою величину постоянной для всех значений $\dot{\vartheta}$ и ϑ , изменяя только знак с изменением знака $\dot{\vartheta}$. В том случае, когда $\dot{\vartheta} = 0$, момент кулоновых сил трения может принимать любое значение, но не превосходит M по абсолютной величине. Если окажется, что момент M меньше момента активных сил, то колебания возникнут, а знак момента M легко можно учесть по физическим соображениям. Если же абсолютная величина момента M больше момента активных сил, то колебания не возникнут — активные и пассивные силы уравновесятся.

Чтобы выяснить характер колебаний, введем момент силы кулонова трения в уравнения (7,1):

$$\begin{aligned} I_1 d' \ddot{\psi}_1 + m_0 l_0 d' v \dot{\psi}_1 + I_2' \ddot{\vartheta} - l M(\dot{\vartheta}) + Z' l d' \sin \alpha \cdot \dot{\vartheta} &= 0, \\ l \ddot{\psi}_1 - d' \dot{\vartheta} - v \cos \alpha \dot{\vartheta} &= 0. \end{aligned} \quad (7,9)$$

Исключим функцию ψ_1 из этих уравнений:

$$\begin{aligned} (I_1 d'^2 + I_2' l^2) \ddot{\vartheta} + (I_1 d' \cos \alpha + m_0 l_0 d' v) v \dot{\vartheta} - l^2 M(\dot{\vartheta}) + \\ + (Z' l^2 d' \sin \alpha + m_0 l_0 d' v^2 \cos \alpha) \vartheta = 0 \end{aligned}$$

или короче:

$$\ddot{\vartheta} + 2h \dot{\vartheta} - \mu(\dot{\vartheta}) + k^2 \vartheta = 0. \quad (7,10)$$

Перепишем уравнение в следующем виде:

$$\ddot{\vartheta} + 2h \dot{\vartheta} + k^2 (\vartheta - \bar{\vartheta}) = 0,$$

где

$$\bar{\vartheta} = \frac{\mu}{k^2} = \pm \frac{M l^2}{Z' l^2 d' \sin \alpha + m_0 l_0 d' v^2 \cos \alpha}.$$

Угол $\bar{\vartheta}$ определяет область застоя; если $\dot{\vartheta} = 0$ и $|\vartheta| < |\bar{\vartheta}|$, то колебания вилки прекратятся.

Колебания, описываемые уравнением (7,10), хорошо изучены¹; они прекращаются по истечении конечного промежутка времени, причем

¹ Б. В. Булгаков, Колебания.

конечное значение угла ϑ меньше по абсолютной величине $\bar{\vartheta}$, но не обязательно равно нулю.

Начиная с этого момента

$$\vartheta = \text{const}, \quad \dot{\vartheta} = 0, \quad \dot{\psi}_1 = \frac{v \cos \alpha}{l} \vartheta.$$

Следовательно, автомобиль начнет поворачиваться с постоянной угловой скоростью.

Если он не управляется, то движение потеряет устойчивость.

Иногда (для самолета) существенно знать угол $\bar{\vartheta}$, определяющий область застоя, так как на короткий промежуток времени можно допускать не строго прямолинейное движение по взлетной дорожке.

Мы видели, что

$$\bar{\vartheta} = \frac{Ml^2}{Z'^2 l^2 d_1' \sin \alpha + m_0 l_0 d' v^2 \cos \alpha}. \quad (7.11)$$

Отсюда следует, что угол $\bar{\vartheta}$ уменьшается с увеличением скорости v , а потому уменьшается и кривизна траектории (рис. 13)

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{\bar{\vartheta}}{l} = \frac{Ml}{Z'^2 l^2 d_1' \sin \alpha + m_0 l_0 d' v^2 \cos \alpha}.$$

Эту траекторию описывала бы точка O после прекращения колебаний вилки.

Мы должны признать, что скорость

автомобиля в указанном смысле благоприятно отражается на устойчивости движения.

Из равенства (7.4) находим, кроме того, что очень существенное влияние на кривизну $\left(\frac{1}{\rho}\right)$ имеет вылет d' , а также d_1' .

С увеличением вылета уменьшается угол застоя, что также благоприятно отражается на устойчивости движения в указанном выше смысле.

Чтобы оценить отклонение точки O от заданной прямой $O_1 x_1$ на расстоянии $x = vt$, воспользуемся приближенной формулой

$$y = \frac{x^2}{2\rho} = \frac{Mlx^2}{2(Z'^2 l^2 d_1' \sin \alpha + m_0 l_0 d' v^2 \cos \alpha)}. \quad (7.12)$$

Угол поворота корпуса автомобиля за тот же промежуток времени определится из равенства

$$\psi_1 = \frac{x \cos \alpha}{l} \vartheta. \quad (7.13)$$

Из последних двух равенств находим, что для одного и того же расстояния x отклонение y и угол поворота ψ_1 уменьшаются с увеличением скорости.

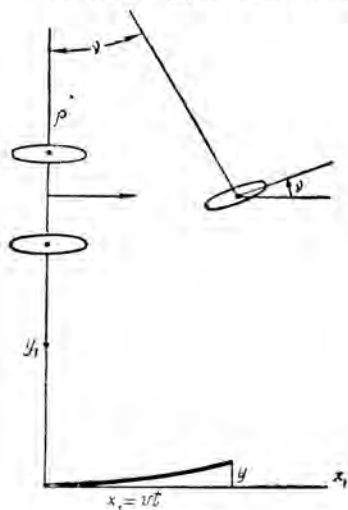


Рис. 13.

8. Устойчивость движения автомобиля с передним эластичным колесом

Рассмотрим теперь более общий случай, предполагая, что колесо деформируемое, но ограничимся только исследованием влияния бокового сдвига пневматика по отношению к ободу и пренебрежем парой трения вращения M_n , т. е. будем считать угол γ равным нулю. Тогда последнее из уравнений (7,1) отпадает, а в остальных уравнениях положим:

$$K_v I_1 + M_{1z} = 0, \quad M_n = 0, \quad \gamma = 0, \quad M = 0;$$

заменим, кроме того, d через $(-d')$, так как обычно $d < 0$,

$$d = e - R_1 \sin \alpha < 0.$$

Введем еще одно упрощение, отбросив в уравнениях движения $I\ddot{\vartheta} \cos \alpha$ и $I\ddot{\psi}_1 \cos \alpha$ по следующим соображениям.

Первое из уравнений есть уравнение колебаний всего самолета около вертикальной оси, причем $(-I\ddot{\vartheta} \cos \alpha)$ — момент сил инерции относительного движения переднего колеса, который мы считаем малым по сравнению, например, с моментом центробежной силы $m_0 l_0 v \dot{\psi}_1$ или моментом $Z'l \sin \alpha \dot{\vartheta}$; второе уравнение есть уравнение колебаний переднего колеса по отношению к корпусу самолета, и мы считаем возможным пренебречь силами инерции переносного движения по сравнению с моментами реакций Y' и Z' . Мы сохраним лишь гироскопический момент

$$\frac{B}{r} v \dot{\psi}_1 \sin \alpha.$$

После всех этих упрощений уравнения (7,21) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\psi}_1 + m_0 l_0 v \dot{\psi}_1 + Z'l \sin \alpha \cdot \dot{\vartheta} - c_1 l u &= 0, \\ \frac{B \sin \alpha}{r} v \dot{\psi}_1 + I_2 \ddot{\vartheta} + Z'r \sin^2 \alpha \dot{\vartheta} + (Z' \sin \alpha + c_1 d') u &= 0, \\ l \dot{\psi}_1 - d' \dot{\vartheta} - v \cos \alpha \cdot \dot{\vartheta} + \dot{u} &= 0. \end{aligned} \quad (8,1)$$

Полагая

$$\dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_1^0 e^{\mu t}, \quad \dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}^0 e^{\mu t}, \quad u = u_0 \cdot e^{\mu t},$$

найдем характеристическое уравнение для определения μ :

$$\begin{vmatrix} I_{11} \mu + m_0 l_0 v, & Z'l \sin \alpha, & -c_1 l \\ \frac{B \sin \alpha}{r} v, & I_2 \mu^2 + Z'r \sin^2 \alpha, & Z' \sin \alpha + c_1 d' \\ l, & -d' \mu - v \cos \alpha, & \mu \end{vmatrix} = 0 \quad (8,2)$$

или в развернутой форме:

$$\begin{aligned} & I_1 I_2 \mu^4 + I_2 m_0 l_0 v \mu^3 + [I_2 l^2 c_1 + I_1 (Z' d'_2 \sin \alpha + c_1 d'^2)] \mu^2 + \\ & + \left[(Z' \sin \alpha + c_1 d') \left(I_1 \cos \alpha + \frac{B \sin \alpha}{r} l \right) + m_0 l_0 (Z' d'_2 \sin \alpha + c_1 d'^2) \right] v \mu + \\ & + \left[(Z' \sin \alpha + c_1 d') m_0 l_0 v^2 \cos \alpha + \frac{B \sin \alpha}{r} l c_1 v^2 \cos \alpha + Z'l (Z'l \sin \alpha + c_1 d'_1) \sin \alpha \right], \end{aligned}$$

привем

$$d_1' = R \sin \alpha - e, \quad d_2' = (R + 2r) \sin \alpha - e.$$

Предположим, что все коэффициенты этого уравнения a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 положительны, и запишем последнее условие, при котором корни этого уравнения имеют отрицательные действительные части:

$$(a_1 a_2 - a_3 a_0) a_3 - a_1^2 a_4 > 0.$$

После подстановки и преобразований получим

$$\left[I_2^2 m_0 l_0 v c_1 l^2 - I_1^2 I_2 (Z' \sin \alpha + c_1 d') v \cos \alpha - \right. \\ \left. - I_1 I_2 (Z' \sin \alpha + c_1 d') \frac{B \sin \alpha}{r} l v \right] a_3 - a_1^2 a_4 > 0.$$

Левая часть этого неравенства может быть сделана положительной, если $c_1 l$ во много раз больше, чем $Z' \sin \alpha$, так как в этом случае мы переходим к почти жесткому колесу, т. е. к ранее исследованному случаю.

Предполагая, что последнее условие не выполняется (движение не устойчиво), перейдем к рассмотрению влияния демфера, предназначенного гасить колебания переднего колеса.

Мы увидим, что достаточно интенсивное гашение колебаний делает неустойчивое движение устойчивым.

Сохраняя те же предпосылки, положим в уравнениях (7,2)

$$z = 0, \quad M_n = 0, \quad K_y l_1 + M_{1z} = 0$$

и

$$M = -k\dot{\vartheta}.$$

Новые уравнения движения будут иметь следующий вид:

$$I_1 \ddot{\psi}_1 + m_0 l_0 v \dot{\psi}_1 - Z' l \sin \alpha \cdot \dot{\vartheta} - c_1 l u, \quad (8,3) \\ \frac{B \sin \alpha}{r} v \dot{\psi}_1 + I_2 \ddot{\vartheta} + k \dot{\vartheta} + Z' r \sin^2 \alpha \dot{\vartheta} + (Z' \sin \alpha + c_1 d') u = 0, \\ l \dot{\psi}_1 - d' \dot{\vartheta} - r \cos \alpha \dot{\vartheta} + \dot{u} = 0.$$

Новое характеристическое уравнение будет отличаться от уравнения (7,3) только тем, что в левой части уравнения добавится еще одно слагаемое, —

$$I_1 k u^3 + m_0 l_0 v k \mu^2 + c_1 l^2 k \mu.$$

Если сохранить обозначения a_0, a_1, \dots, a_4 для коэффициентов характеристического уравнения (7,3), то новое характеристическое уравнение можно записать так:

$$a_0 \mu^4 + (a_1 + I_1 k) \mu^3 + (a_2 + m_0 l_0 v k) \mu^2 + (a_3 + c_1 k l^2) \mu + a_4 = 0. \quad (8,4)$$

Считая, что коэффициенты этого уравнения положительны, напишем последнее условие:

$$[(a_1 + I_1 k) (a_2 + m_0 l_0 v k) - a_0 (a_3 + c_1 k l^2)] \cdot (a_3 + c_1 k l^2) - \\ - (a_1 + I_1 k)^2 a_4 > 0. \quad (8,5)$$

Левая часть этого неравенства есть многочлен третьей степени от k , причем коэффициент при наивысшей степени положителен, а свободный член

$$(a_1 a_2 - a_0 a_3) a_3 - a_1 a_4$$

отрицателен (если носовое колесо шасси не имеет демпфера, движение неустойчиво).

График многочлена

$$y = f(k)$$

есть кубическая парабола (рис. 14), и при достаточно большом k многочлен будет положительным, т. е. неравенство (8,5) будет удовлетворено.

Значение k , при котором движение будет устойчивым, существенным образом зависит от конструктивных параметров и от скорости.

Остановимся еще на частном случае, когда угол наклона передней стойки (вилки) равен нулю

$$\alpha = 0.$$

Тогда

$$d' = d_1' = d_2' = -e > 0.$$

Следовательно, e должно быть отрицательным.

Коэффициенты уравнения (8,4) все положительны, а условие (8,5) в развернутом виде можно представить в виде следующего неравенства:

$$\begin{aligned} & [I_1 k (I_1 c_1 d'^2 + I_2 c_1 l^2 + m_0 l_0 v k) + I_2 m_0 l_0 v (I_2 c_1 l^2 + m_0 l_0 v k) - \\ & - I_1 I_2 (I_1 c_1 d' v + c_1 k l^2)] [I_1 c_1 d' v + m_0 l_0 v c_1 d'^2 + c_1 k l^2] - \\ & - (I_1 k + I_2 m_0 l_0 v)^2 m_0 l_0 c_1 d' v^2 < 0. \end{aligned} \quad (8,6)$$

Левая часть неравенства есть многочлен четвертой степени по отношению к v ; коэффициент при v^4 отрицателен, а свободный член положителен. График многочлена может иметь вид, представленный на рис. 15.

Прежде всего замечаем, что во всех случаях существует такое действительное значение $v_1 > 0$, при котором многочлен равен нулю

$$f(v_1) = 0.$$

Если $v > v_1$, то $f(v) < 0$, а отсюда следует, что движение со скоростью, большей v_1 , не будет устойчивым, а движение со скоростью, меньшей v_1 , может быть и устойчивым и неустойчивым.

Как видно из чертежа (рис. 15), могут существовать еще два действительных положительных корня v_2 и v_3 ($v_2 > v_3$); если этот случай имеет место, то движение устойчиво пока $0 < v < v_3$.

Движение со скоростью, большей v_3 , но меньшей v_2 , уже не будет устойчивым ($v_3 < v < v_2$), а затем, когда скорость сделается больше v_2 , но меньше v_1 , движение опять будет устойчивым.

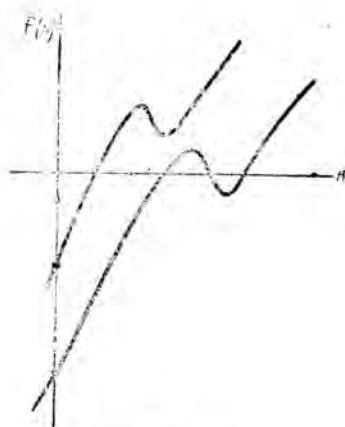


Рис. 14.

Значение корней v_1, v_2, v_3 зависит от конструктивных параметров автомобиля, в частности от того, насколько интенсивно происходит погашение колебаний.

Таким же путем можно исследовать и случай, когда $\gamma \neq 0$, т. е. при более общих предположениях.

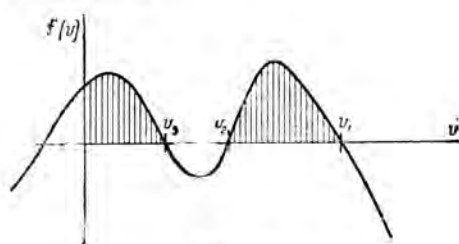


Рис. 15.

Мы ограничимся тем, что выпишем уравнения движения и характеристическое уравнение для этого случая.

Положив в уравнениях (6,21)

$$\begin{aligned} Y' &= c_1 u, & M_n &= c_2 \gamma, & M &= 0, \\ K_{1x} &= 0, & M_{1z} &= 0, & I \cos \alpha &\approx 0, \\ m\lambda &= \frac{B \sin \alpha}{r}, & d &= -d'. \end{aligned}$$

найдем:

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\psi}_1 + m_0 l_0 v \dot{\psi}_1 + Z' l \sin \alpha \vartheta - c_1 l u - c_2 \gamma &= 0, \\ \frac{B \sin \alpha}{r} v \dot{\psi}_1 + I_2 \ddot{\vartheta} + Z' r \sin \alpha \vartheta + (c_1 d' + Z') u - c_2 \cos \alpha \cdot \gamma &= 0, \\ l \dot{\psi}_1 - d' \dot{\vartheta} - n \cos \alpha \vartheta + \dot{u} - v \gamma &= 0, \\ \dot{\psi}_1 + \dot{\vartheta} \cos \alpha - \frac{n \sin \alpha}{R} \vartheta + \dot{\gamma} &= 0. \end{aligned} \quad (8,6)$$

Характеристическое уравнение, из которого определяются частоты колебаний, имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} I_1 \mu + m_0 l_0 v, & Z' l \sin \alpha, & -c_1 l, & -c_2 \\ \frac{B \sin \alpha}{r} v, & I_2 \mu^2 + Z' r \sin \alpha, & Z' + c_1 d', & -c_2 \cos \alpha \\ l, & -d' \mu - v \cos \alpha, & \mu, & -v \\ 1, & \mu \cos \alpha - \frac{n \sin \alpha}{R}, & 0, & \mu \end{vmatrix} = 0. \quad (8,7)$$

Исследование корней μ этого уравнения в общем виде выходит за рамки настоящей работы.

Получена

в августе 1950 г.

Москва.