

Устойчивость движения автомобиля

И. И. Метелицын

В первой половине настоящей работы рассмотрен вопрос о качении колеса с эластичной шиной.

Этот вопрос начал интенсивно изучаться в двадцатых годах в связи с развитием автомобильного транспорта.

Взаимодействие между колесом и полотном дороги определяет прежде всего сопротивление качению, а с этим связаны тяговые расчеты. Кроме того, эластичность шин влияет и на общую динамику автомобиля — прежде всего на устойчивость движения.

Возникновение сильных колебаний переднего моста автомобиля связывают, в частности, с тем, что шины колес являются упругими элементами конструкции.

Потеря устойчивости движения обнаружена также при взлете и посадке самолетов (шимми); в работах, посвященных изучению шимми носового колеса шасси самолета, также рассмотрена задача о качении колеса с эластичной шиной.

Очевидно, этот вопрос представляет большой практический интерес, но до сих пор не только не установлена единая точка зрения на взаимодействия между шиной и полотном дороги, но и одинаковые предпосылки выражают различными соотношениями.

Это относится, в частности, к кинематическим соотношениям, выражающим условия чистого качения (без скольжения) деформируемого колеса.

Поэтому необходимо пересмотреть весь вопрос о качении колеса с эластичной шиной и выяснить, какие предпосылки можно принять и какие следует отбросить, а также привести в соответствие принятые допущения с их математическим выражением.

Выведенные в первой половине работы уравнения движения колеса использованы затем при исследовании устойчивости автомобиля.

Вначале мы рассматриваем движение трехколесного автомобиля, для которого все исследование значительно упрощается; однако многие выводы остаются справедливыми и для автомобилей обычной конструкции.

1. Координаты тора

Предположим, что беговая поверхность колес представляет поверхность тора, т. е. поверхность, образуемую окружностью, вращающейся около оси, лежащей в ее плоскости.

Пусть система осей $C\xi\eta\zeta$ жестко связана с ободом колеса, который предполагается абсолютно жестким (рис. 1).

Положение точки на поверхности тора определяется координатами β и α по отношению к системе осей $C\xi\eta\zeta$, вращающейся вместе с ободом колеса (рис. 1).

Имеем

$$\vec{r} = \xi\vec{i}' + \eta\vec{j}' + \zeta\vec{k}',$$

где

$$\xi = (R + r \cos \beta) \sin \alpha,$$

$$\eta = r \sin \beta,$$

$$\zeta = (R + r \cos \beta) \cos \alpha. \quad (1,1)$$

Положение тора можно определить координатами x_C, y_C, z_C центра C по отношению к неподвижным осям $O_1x_1y_1z_1$, и тремя углами θ, ψ, φ , которые определяют направления осей $C\xi, C\eta, C\zeta$ по отношению к осям O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 .

Введем еще систему осей $Cxyz$ (рис. 2), выбранных так, что ось Cx параллельна плоскости $O_1x_1y_1$, а плоскость Cxz совпадает с плоскостью симметрии обода колеса.

Угол φ есть угол поворота осей $C\xi\eta\zeta$ по отношению к осям $Cxyz$.

Под влиянием приложенных сил поверхность колеса деформируется, причем вблизи точки прикосновения поверхности колеса с полотном дороги происходит небольшое смятие, вследствие чего соприкосновение происходит не в одной точке, а по некоторой небольшой площадке.

Если даже отвлечься от этого смятия, то все же можно заметить, что поверхность колеса деформирована и не представляет уже поверхности вращения (тора).

Сечения тора плоскостями, проходящими через ось $C\eta$ (ось вращения), оказываются вследствие деформации сдвинутыми в направлении оси $C\eta$, а самые сечения по той же причине уже не являются окружностями.

Мы сможем охарактеризовать деформацию, если зададим смещение u точек поверхности тора, лежавших в плоскости $C\xi\zeta$ в направлении оси $C\eta$; вместе с тем допустим, что для точек поверхности, расположенных вблизи плоскости $C\xi\zeta$, смещение определяется той же

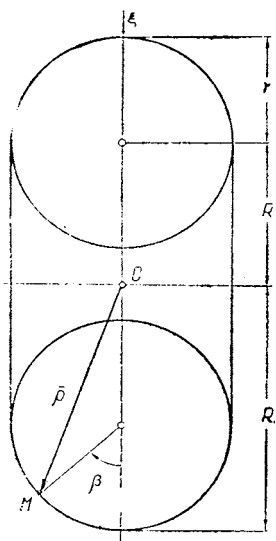


Рис. 1.

величиной. Таким образом будем считать, что боковое смещение зависит от угла α , но не от угла β (рис. 3); $u = u(\alpha)$.

Что касается формы сечения, то мы допустим, что для точек, близких к плоскости $C\xi\xi$, можно принять контур сечения за окружность радиуса r' , причем

$$r' = r'(\alpha).$$

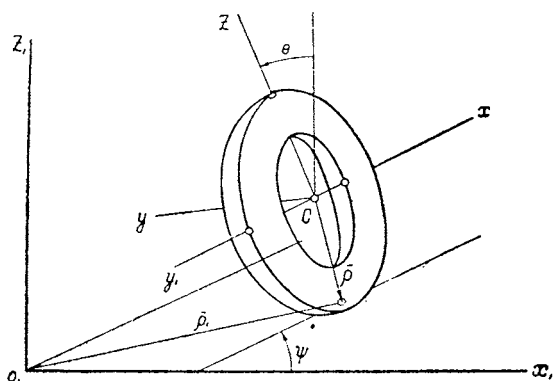


Рис. 2.

В дальнейшем мы будем рассматривать только небольшие боковые смещения $u(\alpha)$, отвлекаясь от изменения радиуса r . Теперь положение точки на поверхности тора (беговой поверхности колеса) можно задать равенствами:

$$\begin{aligned} \xi &= (R + r \cos \beta) \sin \alpha, \\ \eta &= r \sin \beta + u, \\ \zeta &= (R + r \cos \beta) \cos \alpha. \end{aligned} \quad (1,2)$$

При качении колеса положение деформированного сечения все время изменяется, причем деформированные сечения расположены вблизи точки прикосновения с полотном дороги (рис. 3).

Определим положение сечения, в котором лежит точка касания, углом α' по отношению к системе осей $Cxyz$, причем

$$\varphi + \alpha = \pi - \alpha'. \quad (1,3)$$

Если колесо катится по плоскости, то $\alpha' = 0$; в других случаях α' изменяется с течением времени.

Мы можем считать, что смещение u является функцией угла α .

Если форма беговой поверхности колеса не меняется по отношению к осям $Cxyz$, то u зависит только от α , но не зависит явно от времени. В более общем случае смещение u явно зависит и от времени, изменяясь не только с изменением положения сечения, но и для *данного* сечения от момента к моменту.

Если рассматривается некоторое определенное сечение тора, то для этого сечения угол α постоянен. Если приходится рассматривать одно-

временно несколько сечений, то для каждого из них угол α имеет определенное значение.

Если же приходится рассматривать не какое-либо сечение тора, а, например, сечение, в котором лежит точка прикосновения, то угол α надо считать переменным и зависящим от времени или от угла φ , так как положение сечения изменяется.

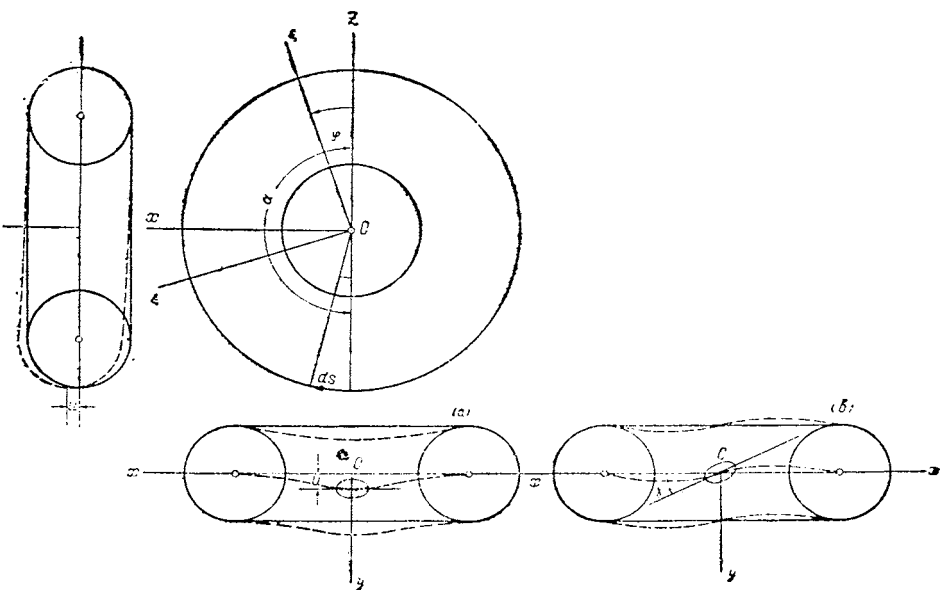


Рис. 3.

В равенстве

$$u = u(\alpha, t) \quad (1,4)$$

угол α , вообще говоря, является функцией времени, если рассматривается перемещение u сечения, в котором лежит точка прикосновения.

2. Условия прикосновения

Если тор опирается на поверхность, то имеет место следующее соотношение между радиусами-векторами (рис. 2):

$$\vec{q}_1 = \vec{e}_c + \vec{e}. \quad (2,1)$$

В точке прикосновения беговая поверхность колеса и поверхность полотна дороги имеют общую нормаль; если \vec{n} — единичный вектор нормали к поверхности полотна дороги, то

$$\vec{n} \frac{\partial \vec{q}}{\partial \alpha} = 0, \quad \vec{n} \frac{\partial \vec{q}}{\partial \beta} = 0. \quad (2,2)$$

В последних формулах можно положить

$$\vec{n} = \frac{\partial \vec{q}_1}{\partial x_1} \times \frac{\partial \vec{q}_1}{\partial y_1},$$

где

$$\vec{q}_1 = x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1 + z_1(x_1, y_1) \vec{k}_1$$

и

$$\frac{\overline{\partial q_1}}{\partial x_1} \times \frac{\overline{\partial q_1}}{\partial y_1} = -\overline{i_1} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} - \overline{j_1} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} + \overline{k_1}.$$

Если колесо катится по плоскости, то

$$z_1 = 0 \text{ и } \overline{n} = \overline{k_1};$$

следовательно,

$$\overline{k_1} \frac{\partial \overline{q}}{\partial \alpha} = 0, \quad \overline{k_1} \frac{\partial \overline{q}}{\partial \beta} = 0.$$

После подстановок мы нашли бы

$$\theta = \beta, \tag{2,3}$$

и потому

$$z_c = R \cos \theta + r. \tag{2,4}$$

Все сказанное выше относится к недеформированной поверхности; если же поверхность деформирована, то

$$\overline{q_1} = \overline{q}_c + \overline{q} + \overline{u},$$

где \overline{u} — относительное смещение точки поверхности вследствие деформации.

Теперь условия прикосновения выразятся несколько иначе:

$$\overline{n} \left(\frac{\partial \overline{q}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \overline{u}}{\partial \alpha} \right) = 0, \quad \overline{n} \left(\frac{\partial \overline{q}}{\partial \beta} + \frac{\partial \overline{u}}{\partial \beta} \right) = 0.$$

Так как \overline{u} не зависит от β , то

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial \beta} = 0;$$

вектор $\frac{\partial \overline{u}}{\partial \alpha}$ лежит в касательной плоскости к поверхности дороги, т. е.

$$\overline{n} \frac{\partial \overline{u}}{\partial \alpha} = 0.$$

Вследствие этого условия прикосновения будут иметь тот же вид, что и для недеформированного тора:

$$\overline{n} \frac{\partial \overline{q}}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{и} \quad \overline{n} \frac{\partial \overline{q}}{\partial \beta} = 0.$$

Отсюда находим

$$\theta = \beta, \quad z_c = R + r \cos \theta,$$

если качение происходит по плоскости.

3. Условия качения

Условие качения тора по поверхности заключается в том, что скорость точки P тора, совпадающей с точкой касания, равна нулю.

Обозначив через $\overline{\omega}$ угловую скорость собственного вращения колеса, а через $\overline{\Omega}$ угловую скорость системы осей $Cxyz$, мы найдем для случая недеформированной поверхности колеса

$$\overline{v}_P = \overline{v}_C + (\overline{\Omega} + \overline{\omega}) \times \overline{q} = 0.$$

Для деформируемого колеса скорость той же точки P выразится несколько иначе, так как добавится еще относительная скорость $\frac{d^* \bar{u}}{dt}$ точки P по отношению к осям $C \xi \eta \zeta$, а радиус-вектор $\bar{\rho}$ должен быть заменен на $(\bar{\rho} + \bar{u})$.

Поэтому

$$\bar{v}_P = \bar{v}_C + (\bar{\Omega} + \bar{\omega})(\bar{\rho} + \bar{u}) + \frac{d^* \bar{u}}{dt}. \quad (3,1)$$

В этой формуле в дальнейшем будем писать просто $\bar{\rho}$ вместо $\bar{\rho} + \bar{u}$, так как

$$\bar{\omega} \times \bar{u} = 0,$$

а произведение $\bar{\Omega} \times \bar{u}$ мало по сравнению с остальными величинами в тех задачах, которые мы предполагаем рассматривать.

Что касается величины $\frac{d^* \bar{u}}{dt}$, то

$$\frac{d^* \bar{u}}{dt} = \frac{d^* u}{dt} \bar{j},$$

где $\frac{d^* u}{dt}$ является полной производной от u по t .

Чтобы получить производную $\frac{d^* u}{dt}$, надо иметь в виду, что u изменяется с течением времени в данном сечении (для определенного в данный момент сечения), а кроме того, и сечение изменяется вследствие поворота колеса, т. е.

$$\frac{d^* u}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{du}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}.$$

Но для движения по плоскости

$$ds = -(R+r) d\varphi$$

и

$$\frac{ds}{dt} = -(R+r) \frac{d\varphi}{dt} \approx -v;$$

поэтому

$$\frac{d^* u}{dt} = \frac{du}{dt} - \frac{du}{ds} v. \quad (3,2)$$

Здесь $\frac{du}{ds}$ есть тангенс угла между касательной к кривой

$$u = u(s)$$

и касательной к окружности, лежащей в плоскости $C \xi \eta$.

При малых деформациях можно положить

$$\frac{du}{ds} = \operatorname{tg} \gamma \approx \gamma. \quad (3,3)$$

Можно сказать также, что γ — угол между плоскостью симметрии колеса (обода) и осью симметрии отпечатка площадки смятия на плоскости $O_1x_1y_1$.

Итак, имеем

$$\bar{v}_c + (\bar{\omega} + \bar{\Omega}) \times \bar{e} + \bar{j} \left(\frac{du}{dt} - v_\gamma \right) = 0 \quad (3,4)$$

или

$$\begin{aligned} v_x &= (\dot{\varphi} - \dot{\psi} \sin \theta) (R + r \cos \beta) + \dot{\psi} \cos \theta r \sin \beta, \\ v_y &= \dot{\theta} (R + r \cos \beta) - \frac{du}{dt} + v_\gamma, \\ v_z &= \dot{\theta} r \sin \beta. \end{aligned} \quad (3,5)$$

Имея в виду, что угол θ всегда мал и, ограничиваясь малыми первого порядка, найдем:

$$\begin{aligned} v_x &\cong (\dot{\varphi} - \dot{\psi} \theta) R_1 + \dot{\psi} \theta r, \\ v_y &\cong \dot{\theta} R_1 - \dot{u} + v_\gamma, \\ v_z &= 0. \end{aligned} \quad (3,6)$$

Если плоскость колеса перпендикулярна к плоскости качения $O_1x_1y_1$, то

$$\theta = 0, \quad \dot{\theta} = 0,$$

и формулы упрощаются:

$$\begin{aligned} v_x &= \omega R_1, \\ v_y &= -\dot{u} + v_\gamma, \\ v_z &= 0. \end{aligned}$$

Первая и третья из этих формул понятны без пояснений: из второй формулы следует, что центр колеса (точка C) имеет скорость v_y в направлении, перпендикулярном к плоскости колеса.

Эта скорость получена за счет изменения бокового смещения u точки прикосновения в данном сечении, а также за счет того, что смещения u изменяются от сечения к сечению, т. е. „путевая кривая“ (геометрическое место точек прикосновения на поверхности колеса) не лежит в плоскости $O\xi\zeta$, а составляет в точке прикосновения угол γ с этой плоскостью (рис. 4). Точки площадки смятия имеют скорости, лежащие в плоскости $O_1x_1y_1$, но если скольжение отсутствует, то все точки этой площадки имеют скорость, равную нулю.

Мы могли бы это выразить, сказав, что проекция абсолютной угловой скорости этой площадки на нормаль и плоскости качения равна нулю, т. е.

$$(\bar{\omega} + \bar{\Omega}) \bar{n} + \frac{d^* \gamma}{dt} = 0, \quad (3,7)$$

где $\frac{d^*\gamma}{dt}$ — относительная угловая скорость площадки по отношению к осям $C\xi\eta$.

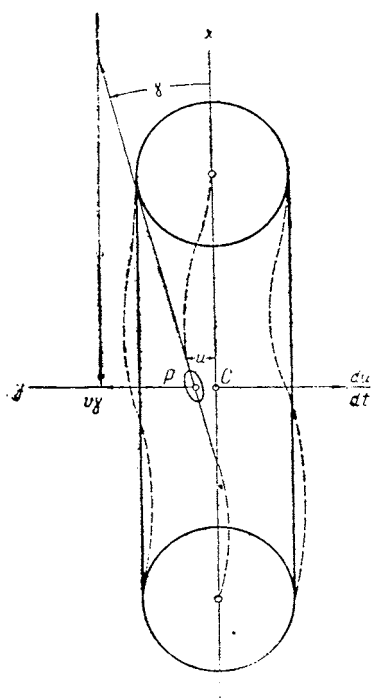


Рис. 4.

После упрощений получим

$$\dot{\psi} - \omega\theta + \frac{d^*\gamma}{dt} = 0, \quad (3,8)$$

где $\frac{d^*\gamma}{dt}$ — полная производная по времени от угла γ , т. е.

$$\frac{d^*\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{dt} - v \frac{d\gamma}{ds}.$$

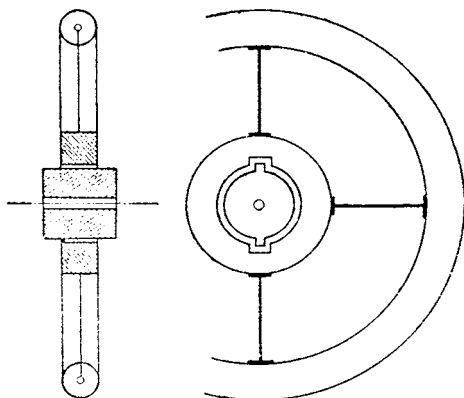


Рис. 5.

Очевидно, $\frac{d\gamma}{ds}$ есть геодезическая кривизна „путевой кривой“ на беговой поверхности колеса.

Чтобы пояснить кинематическую картину качения колеса с эластичной шиной, предположим, что втулка, обод и шина являются абсолютно жесткими, но могут перемещаться друг относительно друга.

На рис. 5 изображено колесо у которого обод может смещаться поступательно относительно втулки, а шина может вращаться относительно обода.

Для такого колеса боковое смещение u не зависит от положения сечения, но изменяется, вообще говоря, с течением времени, т. е.

$$u = u(t).$$

Это простейшая кинематическая модель колеса с эластичной шиной, для которого

$$\frac{du}{ds} = \gamma = 0, \quad \frac{d\gamma}{ds} = 0.$$

Более сложная кинематическая модель изображена на рис. 6. Здесь предположено, что обод колеса перемещается поступательно относительно втулки, а шина вращается по отношению к ободу не только около оси, перпендикулярной к плоскости симметрии, но может поворачиваться и около оси, лежащей в плоскости симметрии.

В этом случае боковое смещение u изменяется вместе с изменением положения сечения и с течением времени, причем

$$\frac{du}{ds} = \gamma = \text{const} \quad \text{и} \quad \frac{dy}{ds} = 0.$$

Угол γ есть угол между плоскостью симметрии обода и плоскостью симметрии шины.

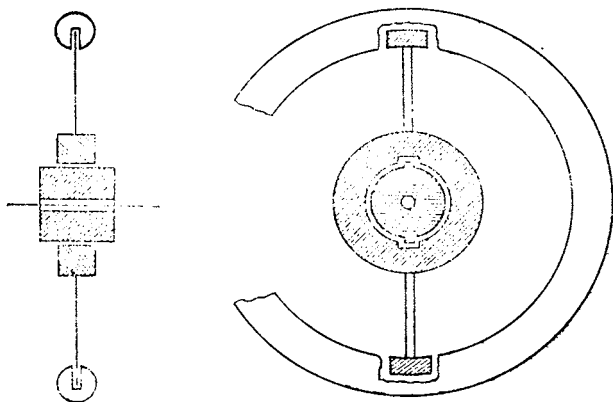


Рис. 6.

Ограничимся этими двумя простейшими случаями, так как в дальнейшем будем предполагать, что $\frac{dy}{ds} = 0$, что, конечно, не всегда возможно.

4. Силы

Предположим, что заданные силы приведены к центру колеса и обозначим через X, Y, Z проекции результирующей силы, а через L_x, L_y, L_z — моменты результирующей пары относительно соответствующих осей.

Силы, действующие по площадке смятия, также можно привести к результирующей силе и результирующей паре. Выберем за центр приведения точку P — точку прикосновения поверхности колеса с поверхностью полотна дороги в том смысле, как это было объяснено выше.

Обозначим проекции результирующей буквами X', Y', Z' , а проекции момента результирующей пары — M_x, M_y, M_z .

При этих обозначениях нормальная реакция N представится формулой:

$$N = Z' \cos \theta - Y' \sin \theta;$$

боковая реакция T при тех же обозначениях может быть представлена так:

$$T = Z' \sin \theta + Y' \cos \theta.$$

Точно так же можно представить момент относительно нормали:

$$M_n = M_z \cos \theta - M_y \sin \theta;$$

момент относительно оси, лежащей в плоскости $O_1x_1y_1$ и перпендикулярной нормали, можно также выразить через M_z и M_y :

$$M_T = M_z \sin \theta + M_y \cos \theta.$$

Очевидно, M_T есть момент пары, которую рассматривают как сопротивление качению, а момент M_n есть момент пары, которая представляет сопротивление верчению (вращение около нормали).

Если колесо скользит, то X' , T и M_n пропорциональны нормальному давлению; если скольжения нет, а поверхность колеса абсолютно твердая, то эта величина определяется из уравнений движения; если же поверхность деформируемая, то реакция T и пара с моментом M_n вызовут деформацию колеса в точке прикосновения.

Предположим, что боковая реакция пропорциональна боковому смещению

$$T = c_1 u,$$

а момент M_n пары трения верчения пропорционален углу γ ,

$$M_n = c_2 \gamma.$$

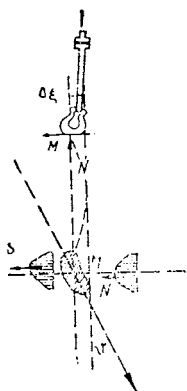


Рис. 7.

Что касается кривизны „путевой кривой“ $\frac{d\gamma}{ds}$, то она зависит от распределения элементарных сил по площадке смятия.

Можно считать, что эта кривизна является функцией T , M_n и X' , но в настоящей работе мы не будем рассматривать этот вопрос более подробно.

Теперь мы должны остановиться на тех работах, в которых вопрос о качении деформируемого колеса рассматривается несколько иначе, чем это изложено выше.

Не претендуя на полноту, остановимся только на трех работах (в хронологическом порядке).

В 1931 г. вышла в свет книга трех авторов под заглавием „Schwingungen in Automobilenkungen“ („Schümmy“), из которой мы заимствуем чертеж (рис. 7), поясняющий распределение сил по площадке смятия¹.

Из чертежа видно, что касательная к „путевой кривой“ не лежит в плоскости симметрии колеса, а составляет некоторый угол ν , вследствие чего появляется „боковой увод“ колеса.

¹ Becker, Fromm, Marhun, Schwingungen in Automobilenkungen, Berlin, 1931.

На стр. 108 той же книги мы находим предпосылки, на основании которых даны зависимости между силами и деформациями и кинематические соотношения.

Прежде всего авторы полагают, что боковое смещение точки прикосновения пропорционально боковой силе:

$$S = C_s \cdot \Delta \xi, \quad \Delta \xi = \frac{S}{C_s},$$

а угол ν также пропорционален S :

$$\nu = \frac{S}{K}.$$

В дальнейшем считается, что K есть постоянная величина. Что касается скорости, которую мы обозначили v_{cy} , то авторы считают, что она складывается из двух скоростей: $\Delta \dot{\xi}$ и νv , т. е. равна сумме

$$\Delta \dot{\xi} + \nu v = \frac{\dot{S}}{C_s} + v \frac{S}{K}.$$

Мы находим, что сделанные предпосылки являются приемлемыми, за исключением той, которая выражается равенством

$$\nu = \frac{S}{K}.$$

Может случиться, что боковые реакции приведутся к паре, т. е. $S = 0$, а угол ν не будет при этом равен нулю, что находится в противоречии с последним равенством. Это равенство заменено у нас другими:

$$M_n = c_2 \gamma$$

и кинематическим соотношением

$$\dot{\psi} - \omega \theta + \frac{d^* \gamma}{dt} = 0.$$

Естественно, что наши уравнения движения колеса отличаются от уравнений, приведенных авторами.

Перейдем теперь к более поздней работе, опубликованной в журнале „Journal of the Aeronautical Sciences“¹ в декабре 1939 г. и посвященной устойчивости носового колеса шасси самолета.

Автор рассматривает не движение самолета в целом, а только движение одного колеса, считая, что самолет движется поступательно, равномерно и прямолинейно.

Траектория точки касания колеса или „путевая кривая“, по мысли автора работы, обладает следующими особенностями:

1. Угол между касательной к путевой кривой и направлением движения самолета равен углу, который составляет плоскость колеса с плоскостью симметрии самолета.

2. Кривизна путевой кривой пропорциональна ординате этой кривой в соответствующей точке.

Эти положения даны без каких-либо обоснований, что затрудняет их критику; они находятся в противоречии с тем, что нами было изложено выше.

¹ Jean Whyllie, Dynamic problems in the tricycle Alighting Year, Journal of the Aeronautical Sciences, December, 1939, vol. 7, N 2.

Мы перейдем к третьей работе, появившейся в 1945 г. и опубликованной в трудах ЦАГИ (№ 564)¹.

Автор этой работы академик Келдыш дает подробный анализ сил, действующих на пневматик и считает, в частности, что угол, который обозначен в нашей работе γ , пропорционален моменту M_n , т. е. в наших обозначениях

$$M_n = c_2 \gamma.$$

Что же касается кинематических уравнений, то по идее они очень близки к идеям Уайли.

Эти кинематические уравнения выражают некоторые свойства „путевой кривой“ или линии качения на неподвижной плоскости.

Академик Келдыш считает, что кривизна путевой кривой является линейной функцией трех величин $\lambda = \theta$, $\varphi = \gamma$, $\lambda = u$, т. е. в наших обозначениях

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\theta}{R} - \beta \gamma - \alpha u.$$

Это соотношение постулируется и является развитием соотношения, данного Уайли.

Правильность допущений проверяется прежде всего на простейших следствиях, которые мы и попытаемся вывести.

Если $\theta = 0$ и $\gamma = 0$, то

$$\frac{1}{\rho} = -\alpha u.$$

Следовательно, если колесо деформировано ($u \neq 0$), то оно обязательно описывает некоторую кривую, ибо кривизна не равна нулю, как это следует из соотношений.

Если $\alpha = 0$ и $\gamma = 0$, но $\theta \neq 0$, то

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\theta}{R}.$$

Отсюда следовало бы, что центр наклонного колеса не может двигаться прямолинейно, а если $\theta = 0$, то „путевая кривая“ обязательно прямая.

Нам кажется, что соотношения, введенные последними двумя авторами, нельзя рассматривать как уравнения кинематических связей.

Уравнения связей по самой идее должны выражать соотношения, которые соблюдаются, какие бы силы ни действовали на колесо (в известных границах).

Что же касается последних соотношений, то они, может быть, и могут быть осуществлены, если подобрать надлежащие внешние силы, но при произвольных силах они не соблюдаются.

Остается также открытым вопрос, имеются ли в рассматриваемой системе те силы, которые способны осуществить связь, выражаемую вышенаписанными кинематическими соотношениями.

Связи, которые накладываются на катящееся колесо, осуществляются силами трения, распределенными по контактной площадке. Если они достаточны, то они в состоянии осуществить только отсутствие

¹ Келдыш, Шимми переднего колеса трехколесного шасси, Труды ЦАГИ № 564, 1945.

скольжения, а кривизна „путевой кривой“ на неподвижной плоскости не может быть определена этими силами.

Все же остальные силы, действующие на колесо, являются, конечно, неизвестными.

Кинематические соотношения в нашей работе, конечно, отличаются от соотношений, приведенных в работах Уайли и академика Келдыша.

Итак, существуют две различные точки зрения на качение колеса с эластичной шиной, причем первая точка зрения получает свое развитие в работах, посвященных движению автомобиля¹, а вторая — в работах, относящихся к явлению „шимми“ носового колеса шасси самолета².

Интересно отметить, что все упомянутые выше авторы исходят из одной и той же гипотезы чистого качения (без скольжения), но не выражают эту мысль кинематическим соотношением.

Принятые ими соотношения выражают в скрытом виде какую-то гипотезу, которая, возможно, окажется плодотворной, если устранить все внутренние противоречия.

Правильность той или иной точки зрения можно подтвердить только опытными данными.

В том случае, когда соотношения (3,6) и (3,8) не выполняются, имеет место скольжение.

Обозначив скорость бокового скольжения через v'_y , а угловую скорость скольжения через Ω'_n , найдем из (3,6) и (3,8):

$$v'_y = v_y - R_x \dot{\theta} + \dot{u} - v\gamma, \quad (3,9)$$

$$\Omega'_n = \dot{\psi} - \omega\theta + \dot{\gamma} - v \frac{d\gamma}{ds}. \quad (3,10)$$

Приведем два простейших примера, иллюстрирующих формулы (3,9) и (3,10).

Предположим, что ось колеса укреплена в тележке (рис. 8), движущейся поступательно, причем скорость поступательного движения v составляет некоторый угол α с плоскостью симметрии обода колеса. Если v постоянно, то можно предполагать в (3,9) и (3,10) $\dot{u} = 0$, $\dot{\gamma} = 0$ и, кроме того, $\theta = 0$ и $\dot{\theta} = 0$, $\dot{\psi} = 0$.

Пусть скольжение отсутствует. Тогда из (3,9) и (3,10) найдем:

$$v_y - v\gamma = 0, \quad -v \frac{d\gamma}{ds} = 0. \quad (3,11)$$

С другой стороны (рис. 8), имеем:

$$v_y = v\alpha.$$

Следовательно, угол α и угол γ равны между собою, т. е. качение без скольжения возможно лишь в том случае, если шина деформирована и „путевая кривая“ в точке касания имеет точку перегиба ($\frac{d\gamma}{ds} = 0$), а касательная к ней составляет с плоскостью симметрии угол α .

¹ Певзнер, „Труды НАТИ“ № 42, 1945; № 43, 1945; № 46, 1947; Б. А. Чудаков, Качение автомобильного колеса, 1947.

² И. И. Эскин, Самолетные шасси с носовым колесом, Оборонгиз, 1947.

Это движение может быть осуществлено, если силы трения приведутся к паре с моментом $M_n = c_2 \gamma = c_2 \alpha$; движение осуществляется и в том случае, если этот момент $M_n = c_2 \alpha$ меньше предельного значения, при котором наступает скольжение. Может, однако, случиться, что $c_2 \alpha$ больше предельного значения M_n . В этом случае $\alpha \neq \gamma$, и скольжение обязательно будет иметь место.

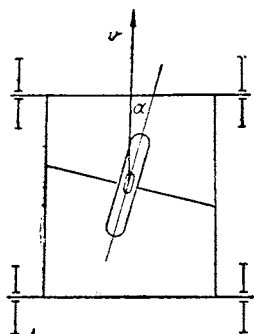


Рис. 8.

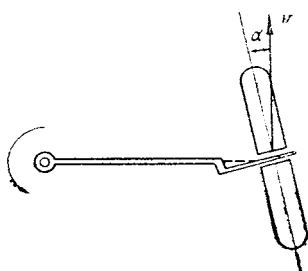


Рис. 9.

Пусть M_n — максимальное значение момента пары сил трения. Теперь угол γ определится из равенства

$$\gamma = \frac{M_n}{c_2},$$

но

$$\alpha = \frac{v_y}{v} > \gamma.$$

Скорость бокового скольжения получим из (3,9):

$$v'_y = v\alpha - \frac{M_n}{c_2} v = \left(\alpha - \frac{M_n}{c_2} \right) v. \quad (3,12)$$

Рассмотрим второй пример качения колеса с эластичной шиной. Пусть ось колеса вращается с постоянной угловой скоростью $\dot{\psi}$ (рис. 9), причем ось колеса и рычаг OA составляют угол α . Если движение установилось, то $\dot{\gamma} = 0$, $\dot{u} = 0$; кроме того, $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0$. Опять находим (рис. 9):

$$\begin{aligned} v_y &= -v\alpha, \\ v_y - v\gamma &= 0, \\ \dot{\psi} - v \frac{d\gamma}{ds} &= 0, \end{aligned}$$

если скольжения нет.

Отсюда

$$\begin{aligned} \gamma &= -\alpha, \\ \frac{d\gamma}{ds} &= \frac{\dot{\psi}}{v}. \end{aligned}$$

Так как

$$\dot{\psi}R = v,$$

то в данном случае

$$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{R},$$

т. е. радиус геодезической кривизны „путевой кривой“ равняется длине водила OA .

Если бы угол α был равен нулю, то имело бы место скольжение. Как и раньше, угол γ определен бы из равенства:

$$\gamma = \frac{M_n}{c_2},$$

где M_n — наибольшее значение момента пары сил трения. Из (3,9) и (3,10) можно найти:

$$v'_y = -v \frac{M_n}{c_2},$$

$$\Omega'_n = \dot{\psi} - v \frac{d\gamma}{ds}.$$

Теперь нет оснований считать $\frac{d\gamma}{ds} = \frac{1}{R}$, так как $\Omega'_n \neq 0$. Во всяком случае, этот вопрос уже нельзя решить чисто кинематическими приемами.

5. Уравнения движения колеса

Для вывода уравнений движения колеса воспользуемся уравнениями количества движения и моментов количеств движения:

$$m \frac{d\bar{v}_C}{dt} = \sum \bar{F}_S, \quad \frac{d\bar{G}}{dt} = \sum \text{mom}_C \bar{F}_S. \quad (5,1)$$

Выбрав оси $Cxyz$ за основные, найдем проекции вектора \bar{G} :

$$G_x = -A\dot{\theta}, \quad G_y = B(\dot{\varphi} - \dot{\psi} \sin \theta), \quad G_z = C\dot{\psi} \cos \theta. \quad (5,2)$$

Угловая скорость этих осей равна геометрической сумме

$$-\bar{i} \dot{\theta} + \dot{\psi} \bar{k}_1,$$

или

$$\Omega_x = -\dot{\theta}, \quad \Omega_y = -\dot{\psi} \sin \theta, \quad \Omega_z = \dot{\psi} \cos \theta.$$

В дальнейшем удобнее уравнения моментов преобразовать к другим осям.

Уравнения движения, как легко убедиться, можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 mw_{cx} &= X + X', \\
 mw_{cy'} &= (Y + Y') \cos \theta + (Z + Z') \sin \theta, \\
 mw_{cn} &= -(Y + Y') \sin \theta + (Z + Z') \cos \theta, \\
 A\ddot{\theta} + B\omega\dot{\psi} \cos \theta + (C - B)\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta &= \\
 &= -Y'R_1 - Z'(u + r \sin \theta) - L_x, \\
 C\ddot{\psi} - B\omega\dot{\theta} \sin \theta + (A - B)\dot{\psi}\dot{\theta} \sin \theta &= \\
 &= M_n + L_n + X'(r \sin \theta - u \cos \theta), \\
 B\frac{d}{dt}(\dot{\varphi} - \dot{\psi} \sin \theta) &= M_y - X'R_1 + L_y, \\
 Y' - c_1 u &= 0, \\
 M_n - c_2 \dot{\gamma}' &= 0.
 \end{aligned} \tag{5,3}$$

Для вычисления w_{cx} , $w_{cy'}$, w_{cn} можно воспользоваться равенством

$$\bar{w}_c = \frac{d\bar{v}_c}{dt} = \frac{d\bar{v}_c}{dt} + \dot{\psi} \bar{k}_1 \times \bar{v}_c.$$

Раскрыв его, получим:

$$\begin{aligned}
 w_{cx} &= \frac{dv_{cx}}{dt} - v_{cy} \dot{\psi}, \\
 w_{cy'} &= \frac{dv_{ey}}{dt} + v_{cx} \dot{\psi}, \\
 w_{cn} &= \frac{dv_{cn}}{dt}.
 \end{aligned} \tag{5,4}$$

Если скольжение отсутствует, то к уравнениям движения можно добавить следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 v_{cx} &= \omega R_1, \\
 v_{cy} &= \dot{\theta} R_1 - \frac{d^* u}{dt}, \\
 v_{cz} &= 0, \\
 \dot{\psi} - \omega \dot{\theta} + \dot{\gamma} - v \frac{d\gamma}{ds} &= 0.
 \end{aligned} \tag{5,5}$$

Эти равенства справедливы, если считать угол θ малым первого порядка и ограничиться при вычислениях этим порядком малости ¹.

(Окончание следует)

¹ И. И. Метелицын, К вопросу о качении колеса с эластичной шиной. Доклады АН СССР, 1948, том LXI, № 3.