О прямых разложениях групп

Л. Я. Куликов

(Окончание)[1]

§ 8

В настоящем параграфе рассматривается вопрос об условиях, при которых два данных прямых разложения группы обладают центрально изоморфными продолжениями. Основным результатом является теорема (8,2). Из этой теоремы следует, что два данных прямых разложения (D) и (A) группы G обладают центрально изоморфными продолжениями, если разложение (D) согласовано с разложением (A) и выполняется хотя бы одно из следующих условий: а) группа G является счетной; б) число прямых слагаемых в разложении (D) является конечным; в) каждое прямое слагаемое в разложении (A) имеет не более чем счетную мощность; г) частично упорядоченное множество $L(\mathrm{D}, \Omega_{\mathrm{A}})$ удовлетворяет условию минимальности. Из теоремы (8,2) также следует (см. теоремы (8,3) и (8,4)), что прямое разложение (D) группы G и *любое другое* прямое разложение этой группы обладают центрально изоморфными продолжениями, если разложение (D) является частично упорядоченным относительно множества Ω всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы G, и выполняется хотя бы одно из следующих двух условий: 1) группа G является счетной; 2) частично упорядоченное множество $L(\mathrm{D}, \Omega)$ удовлетворяет условию минимальности.

Автоморфизм φ группы G называется центральным, если для всякого $x \in G$ разность $\varphi x - x$ принадлежит центру группы G. Автоморфизм группы тогда и только тогда является центральным, когда он является нормальным автоморфизмом.

Две подгруппы группы G называются центрально изоморфными, если существует центральный автоморфизм группы G, отображающий одну из этих подгрупп на другую. Ниже будет использовано следующее предложение:

Если имеют место прямые разложения

$$G = A + C = B + C,$$

то подгруппы A и B центрально изоморфны[2].

[1] Начало см. в т. IV, № 3 (Украинский математический журнал).

[2] См. А. Г. Курош [5].

Два прямых разложения группы называются *центрально изоморфными,* если существует центральный автоморфизм этой группы, переводящий одно из этих разложений в другое. Не трудно видеть, что два прямых разложения группы центрально изоморфны, если между прямыми слагаемыми этих разложений можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие слагаемые центрально изоморфны.

(8,1). *Пусть*

$$G = \sum_{\lambda \in L} E_\lambda \tag{E}$$

прямое разложение группы G, вполне согласованное с разложением

$$G = \sum_{\nu \in N} A_\nu, \tag{A}$$

каждое прямое слагаемое A_ν которого удовлетворяет по крайней мере одному из следующих двух условий:

1°. *группа A_ν является конечной или счетной,*

2°. *подмножество $S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})$ частично упорядоченного множества $L(\mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})$ удовлетворяет условию минимальности.*

Тогда разложение (A) *может быть продолжено до разложения, центрально изоморфного разложению* (E).

Доказательство. Обозначим через C_λ, $\lambda \in L$ компоненту группы E_λ в прямом слагаемом $A_{\varrho(\lambda)}$ разложения (A). По условию разложение (E) вполне согласовано с разложением (A) и каждое прямое слагаемое разложения A_ν удовлетворяет хотя бы одному из условий 1°, 2°. Поэтому на основании (6,6) и (7,4) заключаем, что имеют место прямые разложения

$$A_\nu = \sum_{\lambda \in S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})} C_\lambda \quad (\nu \in N). \tag{1}$$

В силу (5,5) имеет место соотношение

$$L = \bigcup_{\nu \in N} S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}}). \tag{2}$$

Заменяя в разложении (A) каждое прямое слагаемое A_ν по формуле (1) и принимая во внимание (2), получим прямое разложение:

$$G = \sum_{\lambda \in L} C_\lambda, \tag{C}$$

которое, очевидно, является продолжением разложения (A).

В силу (5,11j) имеет место соотношение

$$C_\lambda + \check{E}_\lambda = E_\lambda + \check{E}_\lambda \qquad (\lambda \in L,\ \check{E}_\lambda = U(E_\lambda, \mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})). \tag{3}$$

На основании (3) и разложения (E) мы можем утверждать, что имеют место следующие прямые разложения:

$$G = C_\lambda + \sum_{i \in L \setminus \{\lambda\}} E_i = E_\lambda + \sum_{i \in L \setminus \{\lambda\}} E_i \qquad (\lambda \in L), \tag{4}$$

которые показывают, что при всяком $\lambda \in L$ группы C_λ и E_λ центрально изоморфны. Отсюда следует, что разложения (E) и (C) центрально изоморфны. Таким образом, разложение (C) является искомым продолжением разложения (A), центрально изоморфным разложению (E).

(8,2). Теорема. *Пусть*

$$G=\sum_{\alpha\in M} D_\alpha \tag{D}$$

прямое разложение группы G, *согласованное с разложением*

$$G=\sum_{\nu\in N} A_\nu, \tag{A}$$

каждое прямое слагаемое A_ν *которого удовлетворяет хотя бы одному из двух условий:*

1°. *группа* A_ν *является конечной или счетной,*

2°. *подмножество* $S(A_\nu, \mathrm{D}, \Omega_{\mathrm{A}})$ *частично упорядоченного множества* $L(\mathrm{D}, \Omega_{\mathrm{A}})$ *удовлетворяет условию минимальности.*

Тогда разложения (D) *и* (A) *обладают центрально изоморфными продолжениями.*

Доказательство. Обозначим через L множество всех упорядоченных пар (α, ν), $\alpha\in M$, $\nu\in N$, для которых компонента $E_{(\alpha,\nu)}$ группы $A_\nu\cap\overline{D}_\alpha$ в прямом слагаемом D_α разложения (D) не является нулевой группой. По условию разложение (D) согласовано с разложением (A). Поэтому в силу теоремы (5,10) имеет место прямое разложение

$$G=\sum_{\lambda\in L} E_\lambda, \tag{E}$$

причем это разложение является продолжением разложения (D) и вполне согласовано с разложением (A).

Если подмножество $S(A_\nu, \mathrm{D}, \Omega_{\mathrm{A}})$ частично упорядоченного множества $L(\mathrm{D}, \Omega_{\mathrm{A}})$ удовлетворяет условию минимальности, то в силу (5,12) подмножество $S(A_\nu, \mathrm{E}, \Omega_{\mathrm{A}})$ также удовлетворяет этому условию. Но по условию каждое прямое слагаемое A_ν разложения (A) удовлетворяет хотя бы одному из условий 1°, 2°. Следовательно, каждое прямое слагаемое A_ν разложения (A) удовлетворяет по крайней мере одному из условий 1°, 2° теоремы (8,1). Поэтому на основании теоремы (8,1) заключаем, что существует прямое разложение

$$G=\sum_{\lambda\in L} C_\lambda, \tag{C}$$

которое является продолжением разложения (A) и центрально изоморфно разложению (E). Таким образом, разложения (E) и (C) являются искомыми центрально изоморфными продолжениями разложений (D) и (A). Теорема доказана.

(8,3). Теорема. *Прямое разложение счетной группы, частично упорядоченное относительно множества всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы, и любое другое прямое разложение этой группы обладают центрально изоморфными продолжениями.*

Доказательство. Пусть G — счетная группа и

$$G=\sum_{\alpha\in M} D_\alpha \tag{D}$$

ее прямое разложение, частично упорядоченное относительно множества Ω всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы G. Пусть, далее,

$$G = \sum_{\nu \in N} A_\nu \tag{A}$$

любое другое прямое разложение группы G. Множество Ω_A нормальных идемпотентных эндоморфизмов, соответствующих прямому разложению (A), является подмножеством множества Ω. Так как разложение (D) является частично упорядоченным относительно множества эндоморфизмов Ω и $\Omega_A \subset \Omega$, то оно является частично упорядоченным также и относительно множества эндоморфизмов Ω_A. Следовательно, разложение (D) согласовано с разложением (A). Поэтому на основании теоремы (8,2) заключаем, что разложения (D) и (A) обладают центрально изоморфными продолжениями.

(8,4). Теорема. *Если прямое разложение*

$$G = \sum_{\alpha \in M} D_\alpha \tag{D}$$

группы G является частично упорядоченным относительно множества Ω всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов этой группы и частично упорядоченное множество L(D, Ω) удовлетворяет условию минимальности, то разложение (D) *и любое другое прямое разложение группы G обладают центрально изоморфными продолжениями.*

Доказательство. Пусть

$$G = \sum_{\nu \in N} A_\nu \tag{A}$$

произвольное прямое разложение группы G и Ω_A — множество нормальных идемпотентных эндоморфизмов, соответствующих прямому разложению (A). Так как $\Omega_A \subset \Omega$ и по условию разложение (D) является частично упорядоченным относительно Ω, то разложение (D) является частично упорядоченным также относительно множества эндоморфизмов Ω_A. Следовательно, разложение (D) согласовано с разложением (A). Далее, так как $\Omega_A \subset \Omega$ и по условию частично упорядоченное множество L(D, Ω) удовлетворяет условию минимальности, то в силу (5,12) этому условию удовлетворяет также частично упорядоченное множество L(D, Ω_A). Таким образом, каждое прямое слагаемое A_ν разложения (A) удовлетворяет условию 2° теоремы (8,2). Поэтому в силу теоремы (8,2) разложения (D) и (A) обладают центрально изоморфными продолжениями. Теорема доказана.

§ 9

В этом параграфе даны необходимые и достаточные условия, при которых данное прямое разложение группы является частично упорядоченным относительно множества *всех* нормальных эндоморфизмов этой группы (теорема (9,5)). В связи с этим получены новые условия, при которых данное прямое разложение группы и любое другое прямое разложение этой группы обладают центрально изоморфными продолжениями (теоремы (9,6) и (9,7)).

Гомоморфизм группы H в группу B будем называть *нетривиальным*, если образ группы H при этом гомоморфизме не является нулевой группой.

В этом параграфе будет использована следующая теорема, принадлежащая Фиттингу[1]:

(9,1). *Если $G = B + H$, то подгруппа H тогда и только тогда допустима относительно множества всех нормальных эндоморфизмов группы G, когда не существует нетривиального гомоморфизма группы H в центр группы B.*

Докажем следующее предложение, обобщающее теорему (9,1).

(9,2). *Если $G = \sum_{\alpha \in M} D_\alpha$ и Γ — подмножество множества индексов M, то подгруппа $H = \sum_{\beta \in \Gamma} D_\beta$ тогда и только тогда допустима относительно множества всех нормальных эндоморфизмов группы G, когда при $i \in \Gamma$ и $k \in M \setminus \Gamma$ не существует нетривиального гомоморфизма группы D_i в центр группы D_k.*

Доказательство. Обозначим через φ_α, $\alpha \in M$ идемпотентный эндоморфизм, соответствующий прямому слагаемому D_α разложения

$$G = \sum_{\alpha \in M} D_\alpha. \tag{D}$$

Положим

$$B = \sum_{\gamma \in M \setminus \Gamma} D_\gamma. \tag{1}$$

Тогда, очевидно,

$$G = B + H. \tag{2}$$

1°. Докажем достаточность условия. Предположим, что не существует нетривиального гомоморфизма группы D_i в центр группы D_k, если $i \in \Gamma$ и $k \in M \setminus \Gamma$. Докажем, что тогда группа H допустима относительно множества всех нормальных эндоморфизмов группы G. В силу (9,1) для этого достаточно доказать, что не существует нетривиального гомоморфизма группы H в центр группы B.

Допустим, что существует нетривиальный гомоморфизм ψ группы H в центр группы B. Если мы предположим, что $\psi D_\beta = \{0\}$ для каждого $\beta \in \Gamma$, то тогда, поскольку $H = \sum_{\beta \in \Gamma} D_\beta$, будет $\psi H = \{0\}$, что невозможно, так как ψ — нетривиальный гомоморфизм. Поэтому существует индекс $i \in \Gamma$ такой, что

$$\psi D_i \neq \{0\}. \tag{3}$$

Отсюда, принимая во внимание (1), заключаем, что существует по крайней мере один индекс $k \in M \setminus \Gamma$ такой, что компонента группы ψD_i в прямом слагаемом D_k разложения (D) отлична от нуля, т. е.

$$\varphi_k \psi D_i \neq \{0\}. \tag{4}$$

Легко видеть, что гомоморфизм $\varphi_k \psi$ отображает D_i в центр группы D_k.

---

[1] См. Fitting [8].

Это следует из того, что ψH принадлежит центру группы B и $D_i \subset H$. Поэтому, принимая во внимание (4), мы заключаем, что гомоморфизм $\varphi_k \psi$ индуцирует нетривиальный гомоморфизм группы D_i в центр группы D_k, причем $i \in \Gamma$ и $k \in M \setminus \Gamma$. Но по условию это невозможно. Поэтому предположение о существовании нетривиального гомоморфизма группы H в центр группы B должно быть отвергнуто. Следовательно, в силу (9,1) подгруппа H допустима относительно множества всех нормальных эндоморфизмов группы G.

2°. Докажем необходимость условия. Предположим, что группа H допустима относительно множества всех нормальных эндоморфизмов группы G. Тогда не существует нетривиального гомоморфизма группы D_i в центр группы D_k, если только $i \in \Gamma$, $k \in M \setminus \Gamma$. Действительно, если бы существовал нетривиальный гомоморфизм η группы D_i в центр группы D_k, то гомоморфизм $\eta\varphi_i$ индуцировал бы нетривиальный гомоморфизм группы H в центр группы B, что невозможно в силу (9,1).

(9,3). *Пусть*

$$G = \sum_{\alpha \in M} D_\alpha \tag{D}$$

прямое разложение группы G, частично упорядоченное относительно множества Ω всех нормальных эндоморфизмов группы G. Тогда не существует нетривиального гомоморфизма группы D_i в центр группы D_k, $i, k \in M$, всякий раз, когда индексы i и k, рассматриваемые как элементы частично упорядоченного множества $L(\mathrm{D}, \Omega)$, удовлетворяют условию: $i < k$ или i не сравнимо с k.

Доказательство. Пусть D_i и D_k — два различных прямых слагаемых разложения (D), причем $i < k$ или i не сравнимо с k, если i и k рассматривать как элементы частично упорядоченного множества $L(\mathrm{D}, \Omega)$. Обозначим через V_i комбинаторное замыкание элемента i в частично упорядоченном множестве $L(\mathrm{D}, \Omega)$. Тогда, очевидно,

$$i \in V_i, \tag{1}$$

$$k \overline{\in} V_i. \tag{2}$$

В силу (2,9)

$$\overline{D}_i = \sum_{\alpha \in V_i} D_\alpha, \tag{3}$$

где $\overline{D_i} = V(D_i, \mathrm{D}, \Omega)$. Из определения $\overline{D}_i$ следует, что $\overline{D}_i$ является Ω-подгруппой группы G. Отсюда, принимая во внимание (1), (2), (3), мы на основании (9,2) заключаем, что не существует нетривиального гомоморфизма группы D_i в центр группы D_k.

(9,4). *Если прямое разложение*

$$G = \sum_{\alpha \in M} D_\alpha \tag{D}$$

группы G не содержит нулевых прямых слагаемых и множество индексов M можно так частично упорядочить, что всякий раз, когда $i < k$, $i, k \in M$, не существует нетривиального гомоморфизма группы D_i в центр группы D_k, то разложение (D) является частично упорядоченным относительно множества всех нормальных эндоморфизмов группы G.

Доказательство. Обозначим через Ω множество всех нормальных эндоморфизмов группы G. Предположим, что в множестве индексов M введено отношение порядка, которое превращает его в частично упорядоченное множество θ, удовлетворяющее условию:

(a) если $i < k$ или i не сравнимо с k, $i, k \in \theta$, то не существует нетривиального гомоморфизма группы D_i в центр группы D_k.

Пусть D_α и D_β — два различных прямых слагаемых разложения (D). Докажем, что среди групп, принадлежащих множеству $\Delta(\mathrm{D}, \Omega)$, существует группа, содержащая одно из прямых слагаемых D_α, D_β и не содержащая другого. Этим, в силу (1,4b), будет доказано, что разложение (D) является частично упорядоченным относительно множества эндоморфизмов Ω. Легко видеть, что имеет место по крайней мере одно из соотношений: $\alpha \overline{\in} V_\beta$, $\beta \overline{\in} V_\alpha$, где V_α и V_β — комбинаторные замыкания соответственно α и β в частично упорядоченном множестве θ. Предположим, например, что имеет место соотношение

$$\alpha \overline{\in} V_\beta.$$

Если $i \in V_\beta$ и $k \in \theta \setminus V_\beta$, то, очевидно, $i < k$ или i не сравнимо с k. Отсюда, поскольку θ удовлетворяет условию (a), следует, что не существует нетривиального гомоморфизма D_i в центр группы D_k. Поэтому на основании (9,2) заключаем, что группа

$$H_\beta = \sum_{i \in V_\beta} D_i$$

является Ω-подгруппой группы G. Следовательно,

$$H_\beta \in \Delta(\mathrm{D}, \Omega).$$

Далее, так как по условию разложение (D) не содержит нулевых прямых слагаемых, мы на основании (1), (2) и очевидного соотношения $\beta \in V_\beta$ заключаем, что H_β содержит прямое слагаемое D_β и не содержит D_α. Этим доказано, что разложение (D) является частично упорядоченным относительно множества Ω всех нормальных эндоморфизмов группы G.

(9,5). Теорема. *Для того чтобы прямое разложение*

$$G = \sum_{\alpha \in M} D_\alpha \tag{D}$$

группы G было частично упорядоченным относительно множества всех нормальных эндоморфизмов группы G, необходимо и достаточно, чтобы разложение (D) *не содержало нулевых прямых слагаемых и множество M можно было так частично упорядочить, что всякий раз, когда $i < k$ или i не сравнимо с k, $i, k \in M$, не существует нетривиального гомоморфизма прямого слагаемого D_i в центр прямого слагаемого D_k.*

Эта теорема непосредственно следует из предложений (9,3) и (9,4).

(9,6). Теорема. *Пусть*

$$G = \sum_{\alpha \in M} D_\alpha \tag{D}$$

прямое разложение счетной группы G. Если множество индексов M можно так частично упорядочить, что не существует нетривиального *гомоморфизма прямого слагаемого D_i в центр прямого слагаемого D_k, $i, k \in M$, всякий раз, когда $i < k$ или i не сравнимо с k, то разложение* (D) *и любое другое прямое разложение группы G обладают централъно изоморфными продолжениями.*

Доказательство. Предположим, что условия теоремы выполнены. Тогда в силу (9,5) разложение (D) является частично упорядоченным относительно множества всех нормальных эндоморфизмов группы G. Следовательно, в силу (4,3) разложение (D) будет частично упорядоченным также относительно множества всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы G. Отсюда, поскольку G — счетная группа, в силу (8,3) следует, что разложение (D) и любое другое прямое разложение группы G обладают централъно изоморфными продолжениями.

(9,7). Теорема. *Пусть*

$$G = \sum_{\alpha \in M} D_\alpha \tag{D}$$

прямое разложение группы G. Если множество индексов можно так частично упорядочить, что, во-первых, не существует нетривиального гомоморфизма прямого слагаемого D_i в центр прямого слагаемого D_k, $i, k \in M$, всякий раз, когда $i < k$ или i не сравнимо с k, и, во-вторых, частично упорядоченное множество, в которое превращается M, удовлетворяет условию минимальности, то разложение (D) *и любое другое прямое разложение группы G обладают централъно изоморфными продолжениями.*

Доказательство. Предположим, что в множестве индексов M введено отношение порядка, которое превращает его в частично упорядоченное множество θ, удовлетворяющее следующим двум условиям:

(a) если $i < k$ или i не сравнимо с k, $i, k \in M$, то не существует нетривиального гомоморфизма группы D_i в центр группы D_k,

(b) частично упорядоченное множество θ удовлетворяет условию минимальности.

В силу (9,4) разложение (D) будет частично упорядоченным относительно множества всех нормальных эндоморфизмов группы G. Следовательно, в силу (4,3) разложение (D) является частично упорядоченным относительно множества Ω всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы G. Докажем, что θ удовлетворяет следующему условию:

(c) если β — произвольный элемент из θ, то комбинаторное замыкание V^*_β элемента β в частично упорядоченном множестве $L(\mathrm{D}, \Omega)$ является подмножеством комбинаторного замыкания V_β элемента β в частично упорядоченном множестве θ.

Положим

$$H_\beta = \sum_{i \in V_\beta} D_i \qquad (\beta \in \theta).$$

Так как θ удовлетворяет условию (a), то совершенно так же, как и в доказательстве предложения (9,4), мы убеждаемся в том, что подгруппа H_β допустима относительно множества всех нормальных эндоморфизмов группы G. Следовательно, группа $\sum_{i \in V_\beta} D_i$ является допустимой относительно Ω и поэтому в силу (2,5) множество V_β является замкнутым в $L(\mathrm{D}, \Omega)$. Отсюда следует, что $V_\beta^* \subset V_\beta$, так как $\beta \in V_\beta$ и V_β^* является наименьшим замкнутым подмножеством $L(\mathrm{D}, \Omega)$, содержащим β. Таким образом, θ удовлетворяет условию (c).

Так как частично упорядоченное множество θ удовлетворяет условиям (b) и (c), то не трудно видеть, что частично упорядоченное множество $L(\mathrm{D}, \Omega)$ удовлетворяет условию минимальности. Таким образом, прямое разложение (D) удовлетворяет условиям теоремы (8,4), и поэтому разложение (D) и любое другое прямое разложение группы G обладают центрально изоморфными продолжениями. Теорема доказана.

Легко видеть, что частными случаями теоремы (9,7) являются:

(a) теорема Головина [1].

Два прямых разложения произвольной группы, при каждом из которых центр группы остается целиком в одном из прямых слагаемых, всегда обладают центрально изоморфными продолжениями;

(b) следующее обобщение теоремы Головина, данное Курошем [4]:

Если даны два таких прямых разложения произвольной группы, что хотя бы при одном из них центр группы остается целиком в одном из прямых слагаемых, то эти два разложения обладают центрально изоморфными продолжениями.

§ 10

В настоящем параграфе рассматривается вопрос об условиях, при которых любые два прямых разложения группы обладают центрально изоморфными продолжениями. Основным результатом является теорема (10,3).

(10,1). *Если любые два прямых разложения группы C обладают центрально изоморфными продолжениями, H-подгруппа группы C, допустимая относительно множества всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы C, и*

$$C = A + H, \tag{1}$$

то любые два прямых разложения группы H или группы A обладают центрально изоморфными продолжениями.

Доказательство. Предположим, что любые два прямых разложения группы C обладают центрально изоморфными продолжениями. Предположим, далее, что подгруппа H допустима относительно множества всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы C, и имеет место прямое разложение (1). Пусть

$$A = \sum_{\alpha \in N} B_\alpha, \tag{B}$$

$$A = \sum_{\beta \in M} F_\beta \tag{F}$$

два прямых разложения группы A, и

$$H = \sum_{l \in Q} H_l, \tag{H}$$

$$H = \sum_{k \in R} E_k \tag{E}$$

два прямых разложения группы H. Докажем, что как разложения (B), (F), так и разложение (H), (E) обладают центрально изоморфными продолжениями.

На основании разложений (1), (B), (F), (H), (E) заключаем, что имеют место следующие прямые разложения группы C:

$$C = \sum_{\alpha \in N} B_\alpha + \sum_{l \in Q} H_l, \tag{2}$$

$$C = \sum_{\beta \in M} F_\beta + \sum_{k \in R} E_k. \tag{3}$$

По предположению, любые два прямых разложения группы C обладают центрально изоморфными продолжениями, следовательно, такими продолжениями обладают разложения (2) и (3).

Пусть

$$C = \sum_{i \in T} C_i, \tag{C}$$

$$C = \sum_{i \in T} Z_i \tag{Z}$$

центрально изоморфные продолжения соответственно разложений (2) и (3). Тогда существует нормальный автоморфизм φ группы C, переводящий разложение (C) в разложение (Z), причем мы можем предполагать, что автоморфизм φ отображает прямое слагаемое C_i на прямое слагаемое Z_i,

$$\varphi C_i = Z_i \qquad (i \in T). \tag{4}$$

Разложение (C) является продолжением разложения (1), так как разложение (C) есть продолжение разложения (2) и разложение (2) является продолжением разложения (1). Поэтому существует подмножество Γ множества T такое, что

$$H = \sum_{i \in \Gamma} C_i \tag{5}$$

и

$$A = \sum_{i \in T \setminus \Gamma} C_i. \tag{6}$$

Теперь, поскольку разложение (C) есть продолжение разложения (2), не трудно видеть, что разложения (5) и (6) являются продолжениями соответственно разложений (H) и (B).

По предположению, подгруппа H допустима относительно множества всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы C. Отсюда в силу (4,3) следует, что подгруппа H допустима относительно множества всех нормальных автоморфизмов группы C. Следовательно,

$$\varphi H = H. \tag{7}$$

На основании (4), (5), (7) заключаем, что

$$H=\sum_{i\in\Gamma} \varphi C_i=\sum_{i\in\Gamma} Z_i,$$

т. е.

$$H=\sum_{i\in\Gamma} Z_i. \tag{8}$$

Разложение (Z) является продолжением разложения (1), так как разложение (Z) есть продолжение разложения (3) и разложение (3) является продолжением разложения (1). Отсюда, если принять во внимание (8), следует, что

$$A=\sum_{i\in T\setminus\Gamma} Z_i. \tag{9}$$

Так как разложение (Z) является продолжением разложения (3), то не трудно видеть, что разложения (8) и (9) являются продолжениями соответственно разложений (E) и (F).

Выше было показано, что разложения (5) и (8) суть продолжения соответственно разложений (H) и (E), а разложения (6) и (9) — продолжения соответственно разложений (B) и (F). Далее, поскольку φ — нормальный автоморфизм группы C, отображающий C_i на Z_i, $i\in T$, группы C_i и Z_i центрально изоморфны. Поэтому разложения (5) и (8) являются искомыми центрально изоморфными продолжениями разложений (H) и (E), а разложения (6) и (9) — центрально изоморфными продолжениями разложений (B) и (F).

(10,2). *Пусть*

$$G=\sum_{\alpha\in M} D_\alpha \tag{D}$$

прямое разложение группы G, частично упорядоченное относительно множества Ω всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы G. Для того чтобы любые два прямых разложения группы G обладали центрально изоморфными продолжениями, необходимо, чтобы для всякого $\alpha\in M$ любые два прямых разложения группы D_α обладали центрально изоморфными продолжениями.

Доказательство. Предположим, что любые два прямых разложения группы G обладают центрально изоморфными продолжениями. Докажем, что тогда для всякого $\alpha\in M$ любые два прямых разложения группы D_α обладают центрально изоморфными продолжениями. Обозначим через V_α комбинаторное замыкание элемента α в частично упорядоченном множестве $L(\mathrm{D}, \Omega)$ и положим

$$\overline{D}_\alpha=\sum_{i\in V_\alpha} D_i,$$

$$\check{D}_\alpha=\sum_{i\in V_\alpha\setminus\{\alpha\}} D_i.$$

Тогда

$$\overline{D}_\alpha=D_\alpha+\check{D}_\alpha \qquad (\alpha\in M). \tag{1}$$

Поскольку V_α и $V_\alpha\setminus\{\alpha\}$ суть замкнутые подмножества частично упорядоченного множества $L(\mathrm{D}, \Omega)$, то в силу (2,5) $\overline{D}_\alpha$ и $\check{D}_\alpha$ являются Ω-подгруппами группы G.

По предположению, любые два прямых разложения группы G обладают центрально изоморфными продолжениями. Кроме того, подгруппа $\overline{D}_\alpha$ является прямым слагаемым группы G и допустима относительно множества Ω всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы G. Поэтому на основании (10,1) заключаем, что любые два прямых разложения группы $\overline{D}_\alpha$ обладают центрально изоморфными продолжениями. Далее, подгруппа $\check{D}_\alpha$ группы $\overline{D}_\alpha$ допустима относительно множества всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы $\overline{D}_\alpha$. Это следует из (4,2), поскольку подгруппа $\check{D}_\alpha$ допустима относительно множества Ω всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы G и $\overline{D}_\alpha$ является прямым слагаемым группы G. Кроме того, $\overline{D}_\alpha = D_\alpha + \check{D}_\alpha$ и любые два прямых разложения группы $\overline{D}_\alpha$ обладают центрально изоморфными продолжениями. Поэтому на основании (10,1) заключаем, что любые два прямых разложения группы D_α, $\alpha \in M$, обладают центрально изоморфными продолжениями.

(10,3). Теорема. *Пусть*

$$G = \sum_{\alpha \in M} D_\alpha \tag{D}$$

прямое разложение группы G, частично упорядоченное относительно множества Ω всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы G. Предположим, что выполняется хотя бы одно из следующих двух условий:

1°. *группа G является конечной или счетной,*

2°. *частично упорядоченное множество $L(\mathrm{D}, \Omega)$ удовлетворяет условию минимальности.*

Для того чтобы любые два прямых разложения группы G обладали центрально изоморфными продолжениями, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\alpha \in M$ центрально изоморфными продолжениями обладали любые два прямых разложения группы D_α.

Доказательство. В силу (10,2) условия теоремы являются необходимыми.

Докажем достаточность условий. Предположим, что для всякого $\alpha \in M$ любые два прямых разложения группы D_α обладают центрально изоморфными продолжениями. Пусть

$$G = \sum_{\nu \in N} A_\nu, \tag{A}$$

$$G = \sum_{k \in \Gamma} B_k \tag{B}$$

два прямых разложения группы G. Докажем, что разложения (A) и (B) обладают центрально изоморфными продолжениями. По условию разложение (D) является частично упорядоченным относительно Ω и выполняется хотя бы одно из условий 1°, 2°. Поэтому на основании теорем

(8,3) и (8,4) заключаем, что разложения (D), (A) и разложения (D), (B) обладают центрально изоморфными продолжениями. Пусть

$$G=\sum_{\lambda\in L} E_\lambda \tag{E}$$

и

$$G=\sum_{\lambda\in L} C_\lambda \tag{C}$$

центрально изоморфные продолжения соответственно разложений (D) и (A), и φ — нормальный автоморфизм группы G, переводящий разложение (E) в разложение (C). Пусть, далее,

$$G=\sum_{n\in P} F_n \tag{F}$$

и

$$G=\sum_{n\in P} Z_n \tag{Z}$$

центрально изоморфные продолжения соответственно разложений (D) и (B), и ψ — нормальный автоморфизм группы G, переводящий разложение (F) в разложение (Z).

Так как разложения (E) и (F) являются продолжениями разложения (D), то существуют подмножества L_α и P_α соответственно множеств L и P, для которых имеют место равенства:

$$D_\alpha=\sum_{\lambda\in L_\alpha} E_\lambda \qquad (\alpha\in M), \tag{E_α}$$

$$D_\alpha=\sum_{n\in P_\alpha} F_n \qquad (\alpha\in M). \tag{F_α}$$

По предположению, для всякого $\alpha\in M$ любые два прямых разложения группы D_α обладают центрально изоморфными продолжениями, следовательно, такими продолжениями обладают разложения (E_α) и (F_α). Пусть

$$D_\alpha=\sum_{i\in T_\alpha} H_i \qquad (\alpha\in M) \tag{H_α}$$

и

$$D_\alpha=\sum_{i\in T_\alpha} R_i \qquad (\alpha\in M) \tag{R_α}$$

центрально изоморфные продолжения соответственно разложений (E_α) и (F_α), $\alpha\in M$. Заменяя каждое прямое слагаемое D_α в разложении (D) на основании разложений (H_α) и (R_α) и полагая $T=\bigcup_{\alpha\in M} T_\alpha$, получим прямые разложения:

$$G=\sum_{i\in T} H_i, \tag{H}$$

$$G=\sum_{i\in T} R_i, \tag{R}$$

которые, как не трудно видеть, являются продолжениями соответственно разложений (E) и (F). Так как для всякого $\alpha\in M$ разложения (H_α) и (R_α) центрально изоморфны, то разложения (H) и (R) также являются центрально изоморфными. Поэтому существует нормальный автоморфизм η группы G, переводящий разложение (H) в разложение (R).

Положим

$$X_i = \varphi^{-1} H_i \qquad (i \in T), \tag{1}$$

$$Y_i = \psi R_i \qquad (i \in T). \tag{2}$$

Легко видеть, что автоморфизмы φ^{-1} и ψ группы G переводят разложения (H), (R) соответственно в разложения:

$$G = \sum_{i \in T} X_i, \tag{X}$$

$$G = \sum_{i \in T} Y_i. \tag{Y}$$

Так как разложение (H) является продолжением разложения (E) и автоморфизм φ^{-1} переводит разложения (E) и (H) соответственно в разложения (C) и (X), то разложение (X) является продолжением разложения (C). Аналогично разложение (Y) является продолжением разложения (Z), так как (R) является продолжением (F) и автоморфизм ψ переводит разложения (F) и (R) соответственно в разложения (Z) и (Y). Легко видеть, что автоморфизм θ,

$$\theta = \psi\eta\varphi,$$

переводит разложение (X) в разложение (Y). Кроме того, автоморфизм θ, будучи произведением нормальных автоморфизмов ψ, η, φ группы G, является нормальным автоморфизмом группы G. Наконец, разложения (X), (Y) являются продолжениями соответственно разложений (A) и (B), так как (C) и (Z) — продолжения соответственно разложений (A) и (B), а (X) и (Y) — продолжения соответственно разложений (C) и (Z). Таким образом, разложения (X) и (Y) являются искомыми центрально изоморфными продолжениями разложений (A) и (B), причем нормальный автоморфизм θ переводит разложение (X) в разложение (Y). Теорема доказана.

(10,4). Теорема. *Предположим, что группа G обладает прямым разложением*

$$G = H + F, \tag{1}$$

в котором прямое слагаемое H не содержит ненулевых элементов конечного порядка, а каждый элемент группы F имеет конечный порядок. Для того чтобы любые два прямых разложения группы G обладали центрально изоморфными продолжениями, необходимо и достаточно, чтобы любые два прямых разложения как группы F, так и группы H обладали центрально изоморфными продолжениями.

Доказательство. Легко видеть, что подгруппа F допустима относительно множества всех нормальных эндоморфизмов группы G, в частности она допустима относительно множества всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы G. Следовательно, в силу (4,3), прямое разложение (1) является частично упорядоченным относительно множества всех нормальных идемпотентных эндоморфизмов группы G. Поэтому теорема (10,4) является частным случаем теоремы (10,3).

§ 11

Целью этого параграфа является доказательство принадлежащей Бэру[1] теоремы (11,2), необходимой для следующего параграфа. Приведенное ниже доказательство этой теоремы отлично от доказательства Бэра.

В доказательстве предложения (11,1) будет использовано понятие высоты элемента, определяемое следующим образом. Пусть B — абелева группа без кручения и x — элемент из B. *Высотой* элемента x в группе B будем называть множество всех целых рациональных чисел, удовлетворяющих условию $x \in nB$. Высоту элемента x в группе B будем обозначать символом $h(x, B)$. Соотношение $h(x, B) \geqslant h(y, B)$ будет означать, что $h(y, B)$ является подмножеством множества $h(x, B)$. Соотношение $h(x, B) > h(y, B)$ будет означать, что $h(y, B)$ является подмножеством множества $h(x, B)$, но не совпадает с ним. Далее, будем говорить, что высота $h(x, B)$ элемента x не сравнима с высотой $h(y, B)$ элемента y, если ни одно из множеств $h(x, B)$, $h(y, B)$ не содержится в другом.

Легко убедиться в том, что для всякого целого числа r и любого элемента $x \in B$ имеет место равенство: $h(rx, B) = rh(x, B)$.

(11,1). *Пусть B — абелева группа без кручения, ψ — гомоморфизм этой группы на группу без кручения первого ранга T и A — ядро этого гомоморфизма. Пусть, далее, любая сервантная подгруппа первого ранга группы B, не содержащаяся в A, изоморфна T. Тогда подгруппа A является прямым слагаемым группы B.*

Доказательство. 1°. Пусть b — элемент группы B, не содержащийся в A. Докажем, что в классе смежности $b + A$ существует элемент c максимальной высоты, т. е. такой элемент, что для всякого элемента $x \in b + A$ либо $h(c, B) \geqslant h(x, B)$, либо $h(c, B)$ не сравнимо с $h(x, B)$. Предположим, что такого максимального элемента не существует. Тогда в классе смежности $b + A$ существует бесконечная последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ такая, что

$$h(x_1, B) < h(x_2, B) < \ldots < h(x_n, B) < \ldots \tag{1}$$

Обозначим через B_i сервантную подгруппу первого ранга группы B, содержащую элемент x_i, и положим $T_i = \psi B_i$, $i = 1, 2, \ldots$ Тогда, поскольку $h(x_i, B) < h(x_k, B)$ при $i < k$, элементы x_i, x_k принадлежат одному и тому же классу смежности $b + A$ и A — ядро гомоморфизма ψ, не трудно видеть, что имеют место соотношения:

$$T_i \subset T_k, \quad T_i \neq T_k \qquad (i < k, \quad i, k = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

По условию любая сервантная подгруппа первого ранга группы B, не содержащаяся в A, изоморфна T, следовательно,

$$B_i \cong T \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Так как $x_i \overline{\in} A$ и B_i — сервантная подгруппа группы B, содержащая x_i, то $B_i \cap A = \{0\}$. Отсюда, поскольку A ядро гомоморфизма ψ, следует, что $\psi B_i \cong B_i$, откуда в силу (3), получим

$$T_i \cong T \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

[1] См. R. Baer, [6].

Соотношения (2) и (4) показывают, что существует *бесконечная возрастающая* последовательность подгрупп группы T, изоморфных всей группе T. Но это невозможно, так как T — группа первого ранга. Этим доказано, что в любом классе смежности $b+A$, где $b \in B$, $b \bar{\in} A$, существует хотя бы один элемент максимальной высоты.

2°. Пусть b — элемент группы B, не принадлежащий A, и c — элемент класса смежности $b+A$, имеющий среди элементов этого класса максимальную высоту в B. Докажем, что

$$h(c, B) \geqslant h(z, B) \tag{5}$$

для всякого $z \in b+A$. Обозначим через C и Z сервантные подгруппы первого ранга группы B, содержащие соответственно элементы c и z. По условию группы C и Z изоморфны. Пусть φ изоморфное отображение группы C на Z. Тогда, так как Z — группа первого ранга, существуют целые числа r и s такие, что

$$z = \frac{r}{s} \varphi c, \tag{6}$$

причем мы можем считать, что числа r и s взаимно простые и $r > 0$. Из (6), очевидно, следует равенство

$$\varphi(rc) = sz. \tag{7}$$

Так как C и Z — сервантные подгруппы группы B и φ — изоморфное отображение C на Z, то на основании (7) мы заключаем, что

$$h(rc, B) = h(sz, B). \tag{8}$$

Поскольку числа r и s взаимно простые, существуют целые числа l и k такие, что

$$lr + ks = 1. \tag{9}$$

Положим

$$g = lrc + ksz. \tag{10}$$

Пусть $\bar{g} = g + A$. Так как $c, z \in \bar{b} = b + A$, то в силу (10)

$$\bar{g} = lr\bar{b} + ks\bar{b} = (lr + ks)\bar{b},$$

откуда в силу (9) $\bar{g} = \bar{b}$ и, следовательно,

$$g \in \bar{b} = b + A. \tag{11}$$

На основании (8) и (10) заключаем, что

$$h(g, B) \geqslant h(rc, B),$$

откуда

$$h(g, B) \geqslant rh(c, B). \tag{12}$$

С другой стороны, так как согласно (11) $g \in b + A$ и элемент c среди элементов класса смежности имеет максимальную высоту в B, то

$$h(g, B) \leqslant h(c, B). \tag{13}$$

Из (12) и (13), поскольку r — отличное от нуля целое положительное число, следует, что $r = 1$. Поэтому в силу (8) имеет место соотношение (5).

3°. Пусть b — элемент группы B, не принадлежащий A, c — элемент класса смежности $b + A$, имеющий среди элементов этого класса максимальную высоту в B, и C — сервантная подгруппа первого ранга группы B, содержащая элемент c. Докажем, что

$$B = A + C. \tag{14}$$

Так как C — сервантная подгруппа группы B, то имеет место равенство

$$h(c, C) = h(c, B). \tag{15}$$

Обозначим через $\bar{B}$ факторгруппу $B - A$,

$$\bar{B} = B - A, \tag{16}$$

и через $\bar{C}$ — образ группы C при естественном гомоморфизме группы B на факторгруппу $\bar{B}$. Положим $\bar{c} = c + A = b + A$. Так как $\bar{c}$ — образ элемента c при естественном гомоморфизме группы B на $\bar{B}$, то легко видеть, что

$$h(\bar{c}, \bar{C}) \geqslant h(c, C). \tag{17}$$

На основании (5) заключаем, что

$$h(c, B) \geqslant h(\bar{c}, \bar{B}). \tag{18}$$

Теперь, сопоставляя (15), (17), (18), получим

$$h(\bar{c}, \bar{C}) \geqslant h(\bar{c}, \bar{B}),$$

откуда, поскольку $\bar{C}$ — подгруппа группы B, следует равенство

$$h(\bar{c}, \bar{C}) = h(\bar{c}, \bar{B}). \tag{19}$$

По условию $\bar{B}$ является группой первого ранга ($\bar{B} \cong T$). Кроме того, $\bar{C}$ является подгруппой группы $\bar{B}$ и, как показывает (19), элемент $\bar{c}$ имеет одну и ту же высоту в группах $\bar{C}$ и $\bar{B}$. Отсюда, поскольку $\bar{c}$ ненулевой элемент группы C, следует, что подгруппа C совпадает с группой B,

$$\bar{C} = \bar{B}. \tag{20}$$

Поскольку полным прообразом группы $\bar{C}$ при естественном гомоморфизме B на $\bar{B}$ является группа $[A, C]$, то из равенства (20) следует равенство

$$B = [A, C]. \tag{21}$$

В силу (16) ядром естественного гомоморфизма группы B на $\bar{B}$ является подгруппа A. Далее, образ $\bar{C}$ подгруппы C при этом гомоморфизме не содержит ненулевых элементов конечного порядка и не является нулевой группой, так как $\bar{C} = \bar{B} \cong T$. Поэтому мы можем утверждать, что имеет место равенство

$$A \cap C = \{0\}. \tag{22}$$

Теперь на основании (21), (22), заключаем, что имеет место прямое разложение (14) и, таким образом, подгруппа A является прямым слагаемым группы B.

(11,2). Теорема. *Если абелева группа без кручения разлагается в прямую сумму подгрупп, изоморфных одной и той же группе первого ранга T, то любое прямое слагаемое этой группы также разлагается в прямую сумму подгрупп, изоморфных группе T.*

Доказательство. Пусть G — абелева группа без кручения, и

$$G = \sum_{0 \leqslant \alpha < \gamma} G_\alpha \tag{1}$$

ее разложение в прямую сумму подгрупп, изоморфных группе первого ранга T, причем мы будем предполагать, что индекс α в разложении (1) пробегает множество всех порядковых чисел, меньших чем γ. Пусть C — ненулевая группа, являющаяся прямым слагаемым группы G. Докажем, что C разлагается в прямую сумму подгрупп, изоморфных T. Обозначим через C_0 нулевую подгруппу группы C и положим

$$C_i = C \cap \sum_{0 \leqslant \alpha < i} G_\alpha \qquad (0 < i \leqslant \gamma). \tag{2}$$

Легко видеть, что имеет место равенство

$$C = \bigcup_{0 \leqslant i < \gamma} C_i. \tag{3}$$

Не трудно убедиться в том, что пересечение любых двух сервантных подгрупп абелевой группы без кручения является также сервантной подгруппой этой группы. Но прямые слагаемые группы являются ее сервантными подгруппами. Отсюда, принимая во внимание (2), заключаем, что C_i, $i \leqslant \gamma$, является сервантной подгруппой группы G.

Докажем, что факторгруппа $C_{i+1} - C_i$ изоморфна группе T всякий раз, когда $C_{i+1} \neq C_i$.

$$C_{i+1} - C_i \cong T \qquad (0 \leqslant i < \gamma,\ C_{i+1} \neq C_i). \tag{4}$$

Обозначим через φ_i гомоморфизм группы C_{i+1} в группу G_i, ставящий в соответствие каждому элементу $c \in C_{i+1}$ его компоненту в прямом слагаемом G_i разложения (1). Ядром гомоморфизма φ_i будет, очевидно, подгруппа C_i, а образом группы C_{i+1} при этом гомоморфизме будет компонента S_i группы C_{i+1} в прямом слагаемом G_i разложения (1). Поэтому

$$C_{i+1} - C_i \cong S_i \qquad (0 \leqslant i < \gamma). \tag{5}$$

Предположим, что $C_{i+1} \neq C_i$. Тогда существует элемент $c \in C_{i+1}$, имеющий ненулевую компоненту в прямом слагаемом G_i разложения (1). Обозначим через Z сервантную подгруппу первого ранга группы G, содержащую элемент c. Так как G — группа без кручения, $c \in C_{i+1}$ и C_{i+1} — сервантная подгруппа группы G, то $Z \subset C_{i+1}$. Компонента Z^* группы Z в прямом слагаемом G_i разложения (1) изоморфна Z, так как G_i — группа без кручения, Z — группа первого ранга и Z^* — ненулевая группа. По условию группа G является прямой суммой групп, изоморфных T. Поэтому любая сервантная подгруппа первого ранга группы G изоморфна T. Следовательно, $Z \cong T$. Отсюда, поскольку $Z^* \cong Z$, следует, что

$$Z^* \cong T. \tag{6}$$

Далее, поскольку $Z \subset C_{i+1}$,

$$Z^* \subset S_i \subset G_i. \tag{7}$$

Кроме того, по условию,

$$G_i \cong T. \tag{8}$$

Так как T — группа первого ранга, то на основании соотношений (6), (7), (8) заключаем, что группа S_i изоморфна группе T и, таким образом, в силу (5) имеют место соотношения (4).

Выше было отмечено, что любая сервантная подгруппа первого ранга группы G изоморфна T. Так как C_{i+1} — сервантная подгруппа группы G, то любая ее сервантная подгруппа будет сервантной также в G. Следовательно, любая сервантная подгруппа первого ранга группы C_{i+1} изоморфна группе T. Кроме того, в силу (4) существует гомоморфизм группы C_{i+1} на группу T с ядром C_i. Отсюда в силу (11,1) следует, что C_i является прямым слагаемым группы C_{i+1}, т. е. существует подгруппа T_i группы C_{i+1} такая, что

$$C_{i+1} = C_i + T_i \qquad (0 \leqslant i < \gamma,\ C_{i+1} \neq C_i). \tag{9}$$

Соотношения (4) и (9) показывают, что группы T_i и T изоморфны,

$$T_i \cong T \qquad (0 \leqslant i < \gamma,\ C_{i+1} \neq C_i). \tag{10}$$

Теперь, на основании соотношений (3), (9), (10) заключаем, что группа C разлагается в прямую сумму подгрупп T_i, изоморфных группе T, т. е. $C = \sum\limits_{\substack{0 \leqslant i < \gamma \\ C_{i+1} \neq C_i}} T_i$. Теорема доказана.

§ 12

(12,1). Определение. Группа называется *вполне разложимой*, если она является прямой суммой подгрупп первого ранга [1].

Этот параграф посвящен решению следующих двух вопросов:

Обладают ли изоморфными продолжениями любые два прямых разложения вполне разложимой группы?

Является ли каждое прямое слагаемое вполне разложимой группы также вполне разложимой группой?

Эти вопросы тесно связаны друг с другом и легко убедиться в том, что решение одного из них сразу приводит к решению другого.

В настоящем параграфе изложено решение поставленных выше вопросов для счетных групп, для периодических групп и для одного класса несчетных смешанных групп.

(12,2). *Пусть H — смешанная абелева группа, максимальная периодическая подгруппа F которой является ее прямым слагаемым. Для того чтобы любые два прямых разложения группы H обладали изоморфными продолжениями, необходимо и достаточно, чтобы этим свойством обладали группа F и факторгруппа $H - F$.*

---

[1] Отметим, что группой первого ранга называется группа, любое конечное множество элементов которой порождает циклическую подгруппу.

Это предложение непосредственно следует из теоремы (10,4).

(12,3). Теорема. *Любые два прямых разложения вполне разложимой периодической группы обладают изоморфными продолжениями.*

Доказательство. Пусть G — периодическая вполне разложимая группа. Тогда она обладает разложением в прямую сумму неразложимых подгрупп первого ранга.

Пусть

$$G = \sum_{i \in N} C_i \tag{C}$$

разложение группы G в прямую сумму неразложимых подгрупп первого ранга. Как известно[1], неразложимая периодическая группа первого ранга является либо циклической примарной группой, либо квазициклической примарной группой (группой типа p^∞). Пусть $\{C_i\}_{i \in N_1}$ — множество всех циклических прямых слагаемых разложения (C) и $\{C_i\}_{i \in N_2}$ — множество всех квазициклических прямых слагаемых разложения (C). Положим

$$Z = \sum_{i \in N_1} C_i$$

и

$$P = \sum_{i \in N_2} C_i.$$

Тогда, очевидно,

$$G = Z + P, \tag{1}$$

причем P является максимальной полной подгруппой группы G, а Z разлагается в прямую сумму циклических подгрупп. Группа P является вполне характеристической подгруппой группы G поскольку она является максимальной полной ее подгруппой. Поэтому разложение (1) является частично упорядоченным относительно множества всех идемпотентных эндоморфизмов группы G. Известно, что любые два прямых разложения полной группы можно продолжить до разложения в прямую сумму квазициклических подгрупп и любые два разложения полной периодической группы в прямую сумму квазициклических подгрупп изоморфны. Кроме того, любые два прямых разложения группы, являющейся прямой суммой циклических подгрупп, обладают изоморфными продолжениями[2]. Таким образом, любые два разложения как прямого слагаемого Z, так и прямого слагаемого P разложения (1) обладают изоморфными продолжениями. Поэтому на основании (10,3) заключаем, что любые два прямых разложения группы G обладают изоморфными продолжениями.

(12,4). Определение. Прямое разложение абелевой группы G,

$$G = \sum_{\alpha \in M} D_\alpha \tag{D}$$

[1] См. H. Prüfer [7].

[2] См. Л. Я. Куликов [2].

называется ее *каноническим разложением*, если выполняются следующие два условия:

(a) любые две ненулевые сервантные подгруппы первого ранга группы G, принадлежащие одному и тому же прямому слагаемому разложения (D), изоморфны,

(b) любые две ненулевые сервантные подгруппы первого ранга группы G, принадлежащие различным прямым слагаемым разложения (D), не изоморфны.

Конечно, не всякая абелева группа обладает каноническим разложением, но, например, вполне разложимые группы каноническими разложениями обладают.

Легко видеть, что каждому разложению вполне разложимой группы в прямую сумму неразложимых подгрупп первого ранга естественным образом соответствует каноническое разложение этой группы. Действительно, пусть G — вполне разложимая группа и

$$G = \sum_{i \in N} C_i \tag{C}$$

ее разложение в прямую сумму *неразложимых* подгрупп первого ранга. Разложению (C) поставим в соответствие прямое разложение

$$G = \sum_{\alpha \in M} D_\alpha, \tag{D}$$

которое получается из разложения (C) путем объединения в одно прямое слагаемое всех изоморфных между собой прямых слагаемых разложения (C). Не трудно видеть, что разложение (D) удовлетворяет условиям (a), (b) определения (12,4) и поэтому является каноническим разложением группы G. При этом, очевидно, разложение (C) является продолжением разложения (D). Разложение (D) будем называть *каноническим разложением* группы G, *соответствующим* прямому разложению (C).

(12,5). *Любое каноническое разложение абелевой группы без кручения является частично упорядоченным относительно множества всех эндоморфизмов этой группы.*

Доказательство. Пусть G — абелева группа без кручения и

$$G = \sum_{\alpha \in M} D_\alpha \tag{D}$$

ее каноническое разложение. Докажем, что разложение (D) является частично упорядоченным относительно множества всех эндоморфизмов группы G.

Каждому прямому слагаемому D_α разложения (D) поставим в соответствие абелеву группу без кручения первого ранга R_α, обладающую тем свойством, что любая ненулевая сервантная подгруппа первого ранга группы D_α изоморфна группе R_α. Такая группа R_α существует и, с точностью до изоморфизма, только одна, так как разложение (D), будучи каноническим, удовлетворяет условию (a) определения (12,4).

В множестве индексов M мы следующим образом введем отношение порядка: если i и k — два различных элемента множества M, то полагаем $i < k$ тогда и только тогда, когда существует изоморфное отображение группы R_k в группу R_i, но не существует изоморфного отображения группы R_i в R_k. Так как для всякого $\alpha \in M$ R_α является группой первого ранга без кручения, то легко видеть, что введенное таким образом отношение порядка превращает множество M в частично упорядоченное. Отметим при этом, что элементы i и k полученного таким образом частично упорядоченного множества будут несравнимыми тогда и только тогда, когда ни одна из групп R_i, R_k не может быть изоморфно отображена в другую.

Пусть D_i, D_k — два прямых слагаемых разложения (D), индексы которых удовлетворяют условию: $i < k$. Докажем, что не существует нетривиального гомоморфизма группы D_i в D_k. Допустим, что существует нетривиальный гомоморфизм ψ группы D_i в группу D_k. Тогда существует элемент x такой, что $\psi x \neq 0$. Обозначим через C сервантную подгруппу первого ранга группы D_i, содержащую элемент x, и через Z — сервантную подгруппу первого ранга группы D_k, содержащую элемент ψx. Тогда

$$C \cong R_i, \tag{1}$$

$$Z \cong R_k, \tag{2}$$

ибо подгруппы C и Z сервантны в G, поскольку D_i, D_k — прямые слагаемые группы G, и, кроме того, C и Z — ненулевые подгруппы, так как x и ψx ненулевые элементы соответственно групп C и Z. Поскольку C — группа без кручения первого ранга и x — отличный от нуля элемент этой группы, то любой элемент группы C можно представить в виде $\frac{r}{s}x$, где r и s — целые рациональные числа. Так как ψ — гомоморфизм группы D_i в D_k и D_i, D_k — абелевы группы без кручения, то имеет место равенство

$$\psi\left(\frac{r}{s}x\right) = \frac{r}{s}\psi x \qquad \left(\frac{r}{s}x \in C\right). \tag{3}$$

Кроме того,

$$\frac{r}{s}\psi x \in Z \qquad \left(\frac{r}{s}x \in C\right), \tag{4}$$

поскольку $\psi x \in Z$ и Z — сервантная подгруппа абелевой группы без кручения D_k. На основании (3) и (4) заключаем, что гомоморфизм ψ индуцирует изоморфное отображение группы C в группу Z. Отсюда, принимая во внимание (1), (2), заключаем, что существует изоморфное отображение группы R_i в группу R_k. Но это невозможно, так как $i < k$. Этим доказано, что не существует нетривиального гомоморфизма группы D_i в группу D_k, если $i < k$, $i, k \in M$. Поэтому на основании (9,4) заключаем, что разложение (D) является частично упорядоченным относительно множества всех эндоморфизмов группы G.

(12,6). Теорема. *Предположим, что абелева группа без кручения G обладает каноническим разложением*

$$G = \sum_{\alpha \in M} D_\alpha, \tag{D}$$

причем выполняется хотя бы одно из следующих двух условий:

1°. *группа G является счетной.*

2°. *частично упорядоченное множество $L(\mathrm{D}, \Omega)$, где Ω — множество всех идемпотентных эндоморфизмов группы G, удовлетворяет условию минимальности.*

Для того чтобы любые два прямых разложения группы G обладали изоморфными продолжениями, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\alpha \in M$ изоморфными продолжениями обладали любые два прямых разложения группы D_α.

Доказательство. В силу (12,5) разложение (D) является частично упорядоченным относительно множества всех эндоморфизмов группы G, так как по условию оно является каноническим. Следовательно, разложение (D) является частично упорядоченным относительно множества всех идемпотентных эндоморфизмов группы G. Поэтому теорема (12,6) следует из теоремы (10,3).

(12,7). *Если абелева группа без кручения разлагается в прямую сумму изоморфных между собой подгрупп первого ранга, то любые два прямых разложения этой группы обладают изоморфными продолжениями.*

Доказательство. Пусть G — абелева группа, разложимая в прямую сумму подгрупп, изоморфных одной и той же группе без кручения первого ранга T. В силу (11,2) каждое прямое слагаемое группы G разлагается в прямую сумму подгрупп, изоморфных группе T. Поэтому любые два разложения группы G можно продолжить до разложений группы G в прямую сумму подгрупп, изоморфных T. Но число прямых слагаемых в любом разложении абелевой группы без кручения в прямую сумму подгрупп первого ранга равно рангу этой группы. Поэтому любые два прямых разложения группы G в прямую сумму подгрупп, изоморфных группе T, содержат одинаковое число прямых слагаемых. Следовательно, любые два прямых разложения группы G можно продолжить до разложения в прямую сумму подгрупп, изоморфных группе T, и полученные таким образом продолжения изоморфны.

(12,8). *Любые два прямых разложения вполне разложимой счетной абелевой группы без кручения обладают изоморфными продолжениями.*

Доказательство. Пусть G — счетная вполне разложимая абелева группа без кручения и

$$G = \sum_{\alpha \in M} D_\alpha \tag{D}$$

ее каноническое разложение, соответствующее какому-либо разложению группы G в прямую сумму подгрупп первого ранга. (Отметим, что любая группа без кручения первого ранга является неразложимой.) В силу (12,5) каноническое разложение (D) является частично упорядоченным относительно множества всех эндоморфизмов группы G и, следовательно, относительно множества всех идемпотентных эндоморфизмов группы G. Каждое прямое слагаемое D_α разложения (D) является прямой суммой изоморфных между собой подгрупп первого ранга без кручения, следовательно, в силу (12,7) любые два прямых разложения группы D_α, $\alpha \in M$, обладают изоморфными продолжениями. Поэтому на основании теоремы (12,6) заключаем, что любые два прямых разложения группы G обладают изоморфными продолжениями.

(12,9). Теорема. *Любые два прямых разложения вполне разложимой счетной группы обладают изоморфными продолжениями.*

Эта теорема непосредственно следует из теорем (12,2) и (12,8).

(12,10). Теорема. *Любое прямое слагаемое вполне разложимой счетной группы является также вполне разложимой группой.*

(12,11). Теорема. *Каждое прямое разложение вполне разложимой счетной группы можно продолжить до разложения в прямую сумму неразложимых подгрупп первого ранга, причем любые два таких разложения будут изоморфны.*

Теоремы (12,10) и (12,11) непосредственно следуют из теоремы (12,9).

(12,12). *Предположим, что вполне разложимая абелева группа без кручения G удовлетворяет следующему условию:*

(а) *существует хотя бы одно каноническое разложение*

$$G=\sum_{\alpha\in M} D_\alpha, \tag{D}$$

соответствующее какому-либо разложению группы G в прямую сумму подгрупп первого ранга, такое, что частично упорядоченное множество $L(\mathrm{D}, \Omega)$, где Ω — множество всех идемпотентных эндоморфизмов группы G, удовлетворяет условию минимальности.
Тогда любые два прямых разложения группы G обладают изоморфными продолжениями.

Доказательство. В каноническом разложении (D), поскольку оно соответствует некоторому разложению группы G в прямую сумму подгрупп первого ранга, каждое прямое слагаемое D_α является прямой суммой изоморфных между собой подгрупп первого ранга. Следовательно, в силу (12,7) любые два прямых разложения группы D_α, $\alpha\in M$, обладают изоморфными продолжениями. Кроме того, каноническое разложение (D) удовлетворяет условию 1° теоремы (12,6), поскольку оно удовлетворяет условию (а). Поэтому на основании теоремы (21,6) заключаем, что любые два прямых разложения группы G обладают изоморфными продолжениями.

(12,13). Теорема. *Пусть H — вполне разложимая смешанная абелева группа, и G — факторгруппа группы H по ее максимальной периодической подгруппе. Если факторгруппа G либо является счетной группой, либо удовлетворяет условию* (а) *предложения* (12,12), *то любые два прямых разложения группы G обладают изоморфными продолжениями.*

Эта теорема непосредственно следует из теорем (12,2), (12,3), (12,8) и (12,12).

(12,14). Теорема. *Пусть H — вполне разложимая смешанная абелева группа и G — факторгруппа группы H по ее максимальной периодической подгруппе. Если факторгруппа G либо является счетной группой, либо удовлетворяет условию* (а) *предложения* (12,12), *то каждое прямое разложение группы G можно продолжить до разложения в прямую сумму неразложимых подгрупп первого ранга, причем любые два таких разложения будут изоморфны.*

Эта теорема непосредственно следует из предыдущей.

(12,15). Теорема. *Пусть H — прямое слагаемое вполне разложимой абелевой группы. Если факторгруппа группы H по ее максимальной периодической подгруппе имеет не более чем счетную мощность, то H также является вполне разложимой группой.*

Доказательство. Пусть H — прямое слагаемое вполне разложимой абелевой группы A и

$$A = \sum_{i \in M} C_i \tag{C}$$

какое-нибудь разложение группы A в прямую сумму подгрупп первого ранга. Предположим, что факторгруппа группы H по ее максимальной периодической подгруппе имеет не более чем счетную мощность. Обозначим через $\{C_i\}_{i \in N}$ множество всех тех прямых слагаемых в разложении (C), в которых либо группа H имеет ненулевую компоненту, либо каждый элемент имеет конечный порядок. Положим

$$B = \sum_{i \in N} C_i.$$

Очевидно, B — вполне разложимая абелева группа, содержащая подгруппу H и максимальную периодическую подгруппу группы A. Факторгруппа группы B по ее максимальной периодической подгруппе имеет не более чем счетную мощность; это следует из того, что факторгруппа группы H по ее максимальной периодической подгруппе имеет не более чем счетную мощность. Кроме того, группа H является прямым слагаемым группы B, поскольку H — подгруппа группы B, являющаяся прямым слагаемым группы A. Отсюда в силу (12,14) следует, что группа H разлагается в прямую сумму подгрупп первого ранга. Теорема доказана.

Частным случаем теоремы (12,15) является

(12,16). Теорема. *Любое счетное прямое слагаемое вполне разложимой абелевой группы также является вполне разложимой группой.*

ЛИТЕРАТУРА

1. О. Н. Головин, Множители без центров в прямых разложениях групп, Матем. сб., 6(48), 1939, 423—426.

2. Л. Я. Куликов, К теории абелевых групп произвольной мощности, Матем. сб., 16(58), 1945, 129—162.

3. А. Г. Курош, Über absolute Eindeutigkeit der direkten Produktzerlegungen einer Gruppe, Матем. сб., 1 (43), 1936, 345—350.

4. А. Г. Курош, Изоморфизмы прямых разложений, ИАН, сер. матем., 7, 1943, 185—202.

5. А. Г. Курош, Теория групп, Гостехиздат, М.—Л., 1944.

6. R. Baer, Abelian groups without elements of finite order, Duke math. J., 3, 1937, 68—122.

7. H. Prüfer, Untersuchungen über die Zerlegbarkeit der abzählbaren primären Abelschen Gruppen, Math. Zeitschr., 17, 1923, 35—61.

8. H. Fitting, Über die direkten Produktzerlegungen einer Gruppe in direkt unzerlegbare Faktoren, Math. Zeitschr. 39, 1934, 16—30.

9. H. Fitting, Über die Existenz gemeinsamer Verfeinerung bei direkten Produktzerlegungen einer Gruppe, Math. Zeitschr., 41, 1936, 380—395.

Получена 8.I 1951 г.
Ленинград.