Об определении порядка стохастического роста сумм случайных величин

А. А. Бобров

Различные формы закона больших чисел имеют одно общее содержание: они дают в том или ином смысле оценку роста сумм случайных величин, когда число слагаемых неограниченно возрастает. Так, если обратиться к наиболее общей форме закона больших чисел (А. Н. Колмогоров [2], В. Феллер [3]), то для оценки роста сумм

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$$

случайных величин ξ_i мы будем иметь соотношение

$$\frac{S_n}{B_n} - A_n = o(1), \tag{1}$$

где B_n — з а д а н н а я последовательность положительных чисел, A_n — последовательность надлежаще подобранных чисел и o (1) — стохастическая бесконечно малая величина при $n \to \infty$. Формула (1), разумеется, предполагает, что последовательность случайных величин ξ_i, из которых формируются суммы S_n, подчиняется закону больших чисел Колмогорова-Феллера с заданными нормирующими делителями B_n, входящими в соотношение (1).

Из соотношения (1) мы получаем для сумм S_n формулу

$$S_n = A_n B_n + \zeta_n, \tag{2}$$

где $\zeta_n = o(1)$. B_n — случайная величина, относительно которой известно лишь, что $\frac{\zeta_n}{B_n}$ — бесконечно малая величина, при $n \to \infty$, по вероятности.

Таким образом, данная форма закона больших чисел позволяет определить сумму S_n с точностью до стохастического слагаемого ζ_n, относительно которого известно только, что рост его при $n \to \infty$ о т с т а е т от роста взятых чисел B_n. Однако при этом не имеется никаких указаний для выяснения того, к а к   с и л ь н о происходит это отставание в росте ζ_n от B_n.

Аналогичная неопределенность имеется и во всех прочих формах закона больших чисел.

Естественно поэтому отыскать такую форму закона больших чисел, которая для случайной величины ζ_n формулы (2) фиксирует в определенном смысле т о ч н ы й порядок ее роста при $n \to \infty$.

В настоящей работе дается такая форма закона больших чисел и устанавливается условие (необходимое и достаточное) для его приложимости.

1. Определения. Чтобы иметь возможность точно формулировать нашу задачу, введем несколько определений.

Случайная величина ζ_n, зависящая от натурального параметра n, называется предельно конечной при $n \to \infty$, если она удовлетворяет двум требованиям:

1) существуют числа $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, для которых

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} P(|\zeta_n| > \delta) > \varepsilon;$$

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует $N > 0$, обладающее свойством

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} P(|\zeta_n| > N) < \varepsilon.$$

Здесь через $P(\ )$ обозначена вероятность события, помещенного в скобках.

Условия 1 и 2 очевидно выражают требования, чтобы при $n \to \infty$ величина ζ_n не была ни бесконечно малой, ни бесконечно большой по вероятности.

Последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, называется конечно нормируемой, если существуют числа $B_n > 0$, для которых величина

$$\zeta_n = \frac{X_n - M_n}{B_n},$$

где M_n — медиана для X_n, предельно конечна при $n \to \infty$.

Если последовательность $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, конечно нормируема монотонно возрастающей последовательностью чисел B_n, то мы будем говорить, что величины X_n обладают определенным порядком стохастического роста; причем по определению порядок стохастического роста величин X_n дается порядком роста чисел B_n.

2. С помощью данных определений мы можем теперь так сформулировать нашу задачу:

Пусть задана последовательность случайных величин

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \tag{3}$$

При каких условиях суммы

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$$

обладают определенным порядком стохастического роста? Другими словами: при каких условиях существует монотонно возрастающая последовательность положительных чисел B_n $(n = 1, 2, \ldots)$, для которых величина

$$\zeta_n = \frac{S_n - M_n}{B_n}, \tag{4}$$

где M_n — медиана суммы S_n, предельно конечна при $n \to +\infty$?

Если ограничиться случаем независимых слагаемых, то ответом на поставленный вопрос может служить следующая общая теорема:

Теорема 1. *Для того чтобы суммы S_n независимых случайных величин* (3) *обладали определенным порядком стохастического роста, необходимо и достаточно, чтобы последовательность типов $T(S_n)$ частично притягивалась к некоторому собственному типу T.*

Отсылая за полными сведениями о типах распределения и областях частичного притяжения к специальной литературе [1, 4], мы отметим здесь только следующее. Утверждение, что последовательность типов $T(S_n)$ частично притягивается к собственному типу T, означает: существуют такая последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots$ $\ldots < n_k < \ldots$ и такие две последовательности чисел $B_k > 0$ и A_k $(k = 1, 2, \ldots)$, для которых закон распределения величины

$$\frac{S_{n_k}}{B_k} - A_k$$

стремится при $k \to \infty$ к некоторому собственному закону распределения $\Phi(x)$.

Доказательство этого предложения мы приведем для частного случая, когда слагаемые ξ_i распределены по одному и тому же закону; будет очевидно, что метод доказательства без изменений переносится и на общий случай теоремы 1. В указанном частном случае теорема имеет следующую формулировку:

Теорема 2. *Для того чтобы суммы S_n независимых случайных величин* (3), *распределенных по одинаковому закону $F(x)$, обладали определенным порядком стохастического роста, необходимо и достаточно, чтобы $F(x)$ принадлежал области частичного притяжения некоторого собственного закона распределения $\Phi(x)$.*

3. Доказательство необходимости. Пусть суммы S_n обладают определенным порядком стохастического роста. Это значит, что существует монотонно возрастающая последовательность чисел $B_n > 0$, для которых величина (4) предельно конечна при $n \to \infty$. Пусть $F_n(x) = P(\zeta_n < x)$. В силу условия 2 для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N > 0$, для которого выполняются неравенства

$$F_n(N) > 1 - \varepsilon, \quad F_n(-N) < \varepsilon$$

для всех n. Отсюда следует, что если $\{F_{n_i}(x)\}$ какая-нибудь подпоследовательность из последовательности $\{F_n(x)\}$, сходящаяся к некоторой предельной функции $\Phi(x)$ в каждой точке непрерывности последней, то $\Phi(x)$ — функция распределения.

Заметим также, что так как $F_n(x)$ центрированы медианами, то будем иметь

$$\Phi(0) \leqslant \frac{1}{2}, \quad \Phi(\varepsilon) \geqslant \frac{1}{2} \tag{5}$$

для любого $\varepsilon > 0$.

С другой стороны, в силу условия 1 существует по крайней мере одна из точек $x_0 < 0$ или $x_1 > 0$, обладающих свойствами

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} F_n(x_0) = \alpha > 0, \tag{6}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} F_n(x_1) = \beta < 1. \tag{6'}$$

В самом деле, если бы для любого $x < 0$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} F_n(x) = 0$$

и любого $x' > 0$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} F_n(x') = 1,$$

то имели бы

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ 1, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

что противоречит условию 1.

Итак, пусть для определенности существует $x_1 > 0$, удовлетворяющее (6′). В таком случае существует подпоследовательность $\{F_{n_k}(x)\}$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} F_{n_k}(x_1) = \beta < 1. \tag{7}$$

Применяя теперь к последовательности $\{F_{n_k}(x)\}$ процесс, используемый при доказательстве первой теоремы Хелли, мы можем выделить из $\{F_{n_k}(x)\}$ подпоследовательность $\{F_{n_{k_i}}(x)\}$, сходящуюся в основном к предельной функции распределения $\Phi(x)$, которая помимо (5) удовлетворяет в силу (7) условию

$$\Phi(x_1) = \beta < 1, \qquad x_1 > 0. \tag{8}$$

Неравенства (5) и (8) показывают, что функция распределения $\Phi(x)$ собственная.

К такому же заключению мы придем, если предположим существование точки $x_0 < 0$, удовлетворяющей соотношению (6).

Доказательство достаточности. Пусть $F(x)$ принадлежит области частичного притяжения некоторого собственного закона $\Phi(x)$. Это значит, что при некотором выборе натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ и чисел $B'_k > 0$ и $A'_k (k = 1, 2, \ldots)$ имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_{n_k} - A'_k}{B'_k} < x\right) = \Phi(x). \tag{9}$$

Рассмотрим числа B_n и A_n, определяемые по правилу

$$\left.\begin{aligned} B_n &= B'_k \\ A_n &= A'_k \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &n_{k-1} < n \leqslant n_k, \\ &k = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Покажем, что с таким образом определенными B_n величина (4)

$$\zeta_n = \frac{S_n - M_n}{B_n}, \tag{4}$$

где $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$, M_n — медиана S_n, предельно конечна при $n \to \infty$. Для этого достаточно показать, что величина (4) при $n \to \infty$ ни бесконечно мала (условие 1), ни бесконечно велика по вероятности (условие 2).

1) ζ_n не может быть бесконечно малой при $n \to \infty$, так как, обозначая через $\varphi_{\zeta_n}(t)$ характеристическую функцию величины ζ_n и через

$\varphi_{\zeta_n'}(t)$ характеристическую функцию величины $\zeta_n'=\frac{S_n-A_n}{B_n}$, будем иметь, ввиду равенства,

$$\zeta_n=\zeta_n'+\frac{A_n-M_n}{B_n}$$

соотношения

$$\varphi_{\zeta_n}(t)=\varphi_{\zeta_n'}(t)\,e^{it\frac{A_n-M_n}{B_n}},\quad |\varphi_{\zeta_n}(t)|=|\varphi_{\zeta_n'}(t)|$$

и, следовательно, в силу (9)

$$\lim_{n\to\infty}|\varphi_{\zeta_{n_k}}(t)|=\lim_{n\to\infty}|\varphi_{\zeta'_{n_k}}(t)|=\varphi(t)$$

равномерно в каждом конечном интервале изменения t, где

$$\varphi(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\,d\Phi(x),\qquad |\varphi(t)|\neq 1,$$

что и доказывает наше утверждение.

2) С другой стороны, ζ_n при $n\to\infty$ не может быть бесконечно большой по вероятности (условие 2), так как при любом к а к у г о д н о м е д л е н н о м росте чисел $\omega_n\to+\infty$ $(n\to\infty)$ величина $\frac{\zeta_n}{\omega_n}$ — бесконечно малая. Чтобы это показать, рассмотрим числа $\omega'_n=\omega_{n_{k-1}}$ для $n_{k-1}<n\leqslant n_k$ $(k=1,\,2,\,3,\ldots)$ и характеристическую функцию $\varphi_{\frac{\zeta_n}{\omega_n'}}(t)$. Имеем

$$\varphi_{\frac{\zeta_n}{\omega_n'}}(t)=\varphi_{\frac{\zeta'_n}{\omega_n'}}(t)\,e^{it\frac{A_n-M_n}{B_n\omega_n'}}=\left[\varphi_{\xi_i}\left(\frac{t}{B_n\omega_n'}\right)\right]^n e^{-it\frac{M_n}{B_n\omega_n'}},$$

$$|\varphi_{\frac{\zeta_n}{\omega_n'}}(t)|=|\varphi_{\frac{\zeta_n'}{\omega_n'}}(t)|=\left|\varphi_{\xi_i}\left(\frac{t}{B_n\omega_n'}\right)\right|^n,\tag{10}$$

где

$$\varphi_{\xi_i}(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\,dF(x).$$

В силу (9), (10) и того, что $\omega'_{n_k}=\omega_{n_{k-1}}\to\infty$ $(k\to\infty)$ будем иметь

$$|\varphi_{\frac{\zeta'_{n_k}}{\omega'_{n_k}}}(t)|=\left|\varphi_{\xi_i}\left(\frac{t}{B'_k\,\omega_{n_{k-1}}}\right)\right|^{n_k}\to 1\qquad(k\to\infty)\tag{11}$$

равномерно относительно t в каждом конечном интервале.

С другой стороны, для n $(n_{k-1}<n\leqslant n_k)$

$$|\varphi_{\frac{\zeta'_n}{\omega'_n}}(t)|=\left|\varphi_{\xi_i}\left(\frac{t}{B'_k\,\omega_{n_{k-1}}}\right)\right|^n\geqslant\left|\varphi_{\xi_i}\left(\frac{t}{B'_k\,\omega_{n_{k-1}}}\right)\right|^{n_k},$$

что в силу (11) и (10) дает

$$\lim_{n\to\infty}\left|\varphi_{\frac{\zeta_n}{\omega_n'}}(t)\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\varphi_{\frac{\zeta_n'}{\omega_n'}}(t)\right| = 1 \tag{12}$$

равномерно в любом конечном интервале переменной t.

Имея в виду, что ζ_n центрированы медианами, мы заключаем, что $\frac{\zeta_n}{\omega_n'} = o(1)$ $(n\to\infty)$; учитывая, что $\omega_n \geqslant \omega_n'$, получим окончательно

$$\frac{\zeta_n}{\omega_n} = o(1) \qquad (n\to\infty),$$

что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, Гостехиздат, 1949.

2. А. Н. Колмогоров, Über die Summen durch den Zufallbestimmter unabhängiger Grössen, Math. Ann., 99, 1928, 309—319; 102, 1929, 484—488.

3. W. Feller, Über das Gesetz der grossen Zahlen, Acta litterarum ac scientiarum, 8, fasc. 4, 1937, 191—201.

4. А. Я. Хинчин, Предельные законы для сумм независимых случайных величин, ОНТИ, 1938.

Получена 5.II 1952 г.
Киев.