Новый метод приближенного интегрирования обыкновенных диференциальных уравнений

И. М. Рапопорт

Исследуя метод приближенного интегрирования диференциального уравнения первого порядка, разработанный С. А. Чаплыгиным [1], Н. Н. Лузин показал, что погрешность m-го приближения, найденного по методу С. А. Чаплыгина, имеет порядок $\left(\frac{1}{2}\right)^{2^m}$ [2]. Если не ставить перед собой специальной задачи построения верхних и нижних приближений, то, пользуясь обобщением метода Ньютона на функциональные уравнения, разработанным Л. В. Канторовичем [3], можно указать итерационный процесс для приближенного решения диференциального уравнения первого порядка, обладающий столь же быстрой сходимостью и не требующий специальных ограничений, налагаемых на диференциальное уравнение в методе С. А. Чаплыгина. Для диференциальных уравнений высших порядков применение обобщенного метода Ньютона непосредственно не приводит к цели, так как в этом случае реализация каждого шага требует решения системы линейных диференциальных уравнений, матрица коэфициентов которой меняется к тому же от шага к шагу.

В этой статье мы предлагаем новый метод приближенного интегрирования обыкновенных диференциальных уравнений, применимый к диференциальным уравнениям произвольного порядка и не требующий установления каких-либо специальных ограничений. Как мы показываем, погрешность m-го приближения, найденного по этому методу, при наличии достаточно хорошего исходного приближения не превосходит $K\vartheta^{2^m}$ $(\vartheta < 1)$, где не зависящие от m постоянные K и ϑ могут быть вычислены по исходному приближению. В § 1 мы рассматриваем вопрос о приближенном интегрировании линейных диференциальных уравнений (в этом частном случае мы устанавливаем более тонкие оценки), в § 2 мы указываем итерационный процесс для решения нелинейных диференциальных уравнений.

§ 1. Приближенное интегрирование линейных диференциальных уравнений

Рассмотрим сперва вопрос о приближенном интегрировании системы n линейных диференциальных уравнений первого порядка с заданными n начальными условиями

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad x(0) = \xi, \tag{1,1}$$

где $x(t)$ — искомый n-мерный вектор, а $A(t)$ — заданная матрица-функция порядка n, непрерывная в интервале $(0, T)$.

Если матрица-функция $X(t)$ порядка n непрерывна вместе со своей первой производной $X'(t)$ в интервале $(0, T)$ и удовлетворяет соотношениям

$$X'(t) = A(t) X(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad X(0) = I, \tag{1,2}$$

то вектор

$$x(t) = X(t)\, \xi \tag{1,3}$$

удовлетворяет соотношениям (1,1) и определяет, таким образом, искомое решение заданных диференциальных уравнений, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Пусть $X_0(t)$ — некоторая матрица порядка n, неособенная и непрерывная вместе со своей первой производной в интервале $(0, T)$, причем $X_0(0) = I$. Отправляясь от матрицы $X_0(t)$ как от нулевого приближения, построим последовательность матриц $X_m(t)$, $m = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{gathered} X'_{m+1}(t) = A_m(t) X_{m+1}(t) + [A(t) - A_m(t)] X_m(t), \\ X_{m+1}(0) = I, \; m = 0, 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{1,4}$$

где

$$A_m(t) = X'_m(t) X_m^{-1}(t), \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{1,5}$$

Полагая в (1,4)

$$X_{m+1}(t) = X_m(t) [I + Y_{m+1}(t)] \tag{1,6}$$

и принимая во внимание соотношения (1,5), получим для матриц $Y_1(t)$, $Y_2(t), \ldots$ диференциальные уравнения

$$X_m(t) Y'_{m+1}(t) = [A(t) - A_m(t)] X_m(t), \; Y_{m+1}(0) = 0, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

откуда

$$Y_{m+1}(t) = \int_0^t X_m^{-1}(t) [A(t) - A_m(t)] X_m(t)\, dt, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{1,7}$$

Введем обозначения

$$\Delta_m(t) = X_m^{-1}(t) [A(t) X_m(t) - X'_m(t)], \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{1,8}$$

Согласно (1,5) и (1,8) соотношениям (1,7) можно придать вид

$$Y_{m+1}(t) = \int_0^t \Delta_m(t)\, dt, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{1,9}$$

В соответствии с (1,4) и (1,5)

$$A_{m+1}(t) - A_m(t) = [A(t) - A_m(t)] X_m(t) X_{m+1}^{-1}(t) = X_m(t) \Delta_m(t) X_{m+1}^{-1}(t).$$

Таким образом,

$$\begin{gathered} X_{m+1}(t) \Delta_{m+1}(t) X_{m+1}^{-1}(t) - X_m(t) \Delta_m(t) X_m^{-1}(t) = \\ = A(t) - A_{m+1}(t) - [A(t) - A_m(t)] = -X_m(t) \Delta_m(t) X_{m+1}^{-1}(t) \end{gathered}$$

и, следовательно, согласно (1,6)

$$X_{m+1}(t)\,\Delta_{m+1}(t)=X_m(t)\,\Delta_m(t)\,X_m^{-1}(t)\,X_{m+1}(t)-$$
$$-X_m(t)\,\Delta_m(t)=X_m(t)\,\Delta_m(t)\,Y_{m+1}(t),$$

откуда

$$\Delta_{m+1}(t)=[I+Y_{m+1}(t)]^{-1}\,\Delta_m(t)\,Y_{m+1}(t), \qquad m=0,1,2,\ldots \tag{1,10}$$

Итак, согласно (1,8), (1,9) и (1,10) последовательность матриц $\Delta_m(t)$, $m=0, 1, 2, \ldots$ и $Y_m(t)$, $m=1, 2, \ldots$, определяется рекурентными соотношениями

$$Y_{m+1}(t)=\int_0^t \Delta_m(t)\,dt,\ \Delta_{m+1}(t)=[I+Y_{m+1}(t)]^{-1}\,\Delta_m(t)\times$$
$$\times Y_{m+1}(t),\ m=0,1,2,\ldots,\ \Delta_0(t)=X_0^{-1}(t)\,[A(t)\,X_0(t)-X_0'(t)]. \tag{1,11}$$

В соответствии с (1,6) матрица $X_m(t)$ может быть представлена в виде произведения

$$X_m(t)=X_0(t)\,[I+Y_1(t)]\,[I+Y_2(t)]\ldots[I+Y_m(t)]. \tag{1,12}$$

Перейдем теперь к исследованию сходимости указанного выше итерационного процесса. Условимся везде в дальнейшем под нормой матрицы понимать наибольшее из абсолютных значений ее элементов. Если A и B — две квадратных матрицы порядка n, то при таком определении нормы будет иметь место следующее очевидное соотношение:

$$\|AB\|\leqslant n\|A\|\,\|B\|.$$

Если x — n-мерный вектор, то

$$\|Ax\|\leqslant n\|A\|\,\|x\|,$$

где $\|x\|$ — наибольшее из абсолютных значений составляющих вектора x.

Будем предполагать ниже, что подстановка матрицы $X_0(t)$ в диференциальное матричное уравнение (1,2) дает настолько малую невязку, что выполняется неравенство

$$\int_0^T \|\Delta_0(t)\|\,dt<\frac{7}{16\,n} \tag{1,13}$$

(как мы показываем ниже, этим гарантируется существование обратных матриц, фигурирующих в соотношениях (1,11)).

Обозначим через $\vartheta(t)$ наименьший неотрицательный вещественный корень алгебраического уравнения

$$\vartheta-\vartheta^2-\vartheta^3+\frac{3}{2}\,\vartheta^4=\frac{n}{2}\int_0^t \|\Delta_0(t)\|\,dt. \tag{1,14}$$

В соответствии с условием (1,13)

$$0\leqslant\vartheta(t)<\frac{1}{2} \quad \text{при} \quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{1,15}$$

Покажем, что

$$\| Y_j(t) \| \leqslant \frac{2}{n} [\vartheta(t)]^{2^{j-1}},$$

$$\| \varDelta_j(t) \| \leqslant 2^j [\vartheta(t)]^{2^j-1} \prod_{i=0}^{j-1} \{1 - 2[\vartheta(t)]^{2^i}\}^{-1} \| \varDelta_0(t) \|, \qquad j = 1, 2, \ldots \quad (1,16)$$

Допустим, что неравенства (1,16) имеют место при $j = m$ $(m \geqslant 1)$. Тогда согласно (1,11) и (1,14)

$$\| Y_{m+1}(t) \| \leqslant 2^m \int_0^t [\vartheta(t)]^{2^m-1} \prod_{i=0}^{m-1} \{1 - 2[\vartheta(t)]^{2^i}\}^{-1} \| \varDelta_0(t) \| dt =$$

$$= \frac{2^{m+1}}{n} \int_0^{\vartheta} \vartheta^{2^m-1} \prod_{i=0}^{m-1} (1 - 2\vartheta^{2^i})^{-1} (1 - 2\vartheta)(1 - 3\vartheta^2) d\vartheta.$$

В то же время

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 - 2\vartheta^{2^i}) \geqslant (1 - 2\vartheta^2 - 2\vartheta^4) \prod_{i=3}^{\infty} (1 - 2\vartheta^{2^i}) \geqslant \ldots \geqslant 1 -$$

$$- 2 \sum_{i=1}^{\infty} \vartheta^{2^i} \geqslant 1 - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \vartheta^{2i} = \frac{1 - 3\vartheta^2}{1 - \vartheta^2} \geqslant 1 - 3\vartheta^2.$$

Таким образом,

$$\| Y_{m+1}(t) \| \leqslant \frac{2}{n} \int_0^{\vartheta} 2^m \vartheta^{2^m-1} d\vartheta = \frac{2}{n} [\vartheta(t)]^{2^m}.$$

Отсюда

$$\| [I + Y_{m+1}(t)]^{-1} - I \| = \| - Y_{m+1}(t) + Y_{m+1}^2(t) -$$

$$- Y_{m+1}^3(t) + \ldots \| \leqslant \frac{2}{n} \vartheta^{2^m} + \frac{1}{n} (2\vartheta^{2^m})^2 +$$

$$+ \frac{1}{n} (2\vartheta^{2^m})^3 + \ldots = \frac{2}{n} \vartheta^{2^m} (1 - \vartheta^{2^m})^{-1}$$

и, следовательно, согласно (1,11)

$$\| \varDelta_{m+1}(t) \| \leqslant 2^m \vartheta^{2^m-1} \prod_{i=0}^{m-1} (1 - 2\vartheta^{2^i})^{-1} 2\vartheta^{2^m} [1 + 2\vartheta^{2^m} (1 -$$

$$- 2\vartheta^{2^m})^{-1}] \| \varDelta_0(t) \| = 2^{m+1} \vartheta^{2^{m+1}-1} \prod_{i=0}^{m} (1 - 2\vartheta^{2^i})^{-1}.$$

Итак, если неравенства (1,16) имеют место при $j = m$ $(m \geqslant 1)$, то они остаются справедливыми и при $j = m + 1$. В то же время, как не трудно проверить, при $j = 1$ неравенства (1,16) выполняются. Таким образом, эти неравенства действительно имеют место при любом $j \geqslant 1$.

Введем теперь в рассмотрение матрицы

$$Z_{kl}(t)=[I+Y_k(t)][I+Y_{k+1}(t)]\ldots[I+Y_{k+l-1}(t)]-I,\ k\geqslant 1,\ l\geqslant 1, \tag{1,17}$$

и покажем, что

$$\|Z_{kl}(t)\|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{j=2}^{2^l} j\vartheta^{2^{k-1}(j-1)}. \tag{1,18}$$

Действительно, если неравенство (1,18) имеет место при некоторых значениях индексов k и l, то в соответствии с рекурентным соотношением

$$Z_{k,l+1}(t)=Z_{kl}(t)+Y_{k+l}(t)+Z_{kl}(t)Y_{k+l}(t)$$

и неравенствами (1,16)

$$\|Z_{k,l+1}(t)\|\leqslant\frac{1}{n}\left[\sum_{j=2}^{2^l} j\vartheta^{2^{k-1}(j-1)}+2\vartheta^{k+l-1}+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=2}^{2^l}2j\vartheta^{2^{k-1}(2^l+j-1)}\right]\leqslant\frac{1}{n}\left[\sum_{j=2}^{2^l+1} j\vartheta^{2^{k-1}(j-1)}+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=2^l+2}^{2^{l+1}}2(j-2^l)\vartheta^{2^{k-1}(j-1)}\right]\leqslant\frac{1}{n}\sum_{j=2}^{2^{l+}} j\vartheta^{2^{k-1}(j-1)}.$$

В то же время $Z_{k1}(t)=Y_1(t)$ и, следовательно, при $l=1$ неравенство (1,18) непосредственно следует из неравенств (1,16). Таким образом, неравенство (1,18) действительно имеет место при любых значениях индексов k и l, удовлетворяющих неравенствам $k\geqslant 1$, $l\geqslant 1$.

Согласно (1,12) и (1,17) при $M>m$

$$X_M(t)-X_m(t)=X_0(t)Z_{1m}(t)[Z_{m+1,M-m}(t)-I]$$

и, таким образом, в соответствии с неравенством (1,18)

$$\|X_M(t)-X_m(t)\|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=2}^{2^m} j[\vartheta(t)]^{j-1}\left\{1+\sum_{j=2}^{\infty} j\,[\vartheta(t)]^{2^m(j-1)}\right\}\|X_0(t)\|= \tag{1,19}$$

$$=\frac{F[\vartheta(t),m]}{[1-\vartheta(t)]^2}[\vartheta(t)]^{2^m}\|X_0(t)\|,$$

где

$$F(\vartheta,m)=(2-\vartheta^{2^m})(1-\vartheta^{2^m})^{-2}[1-\vartheta^{2^m}-2^m(1-\vartheta)\vartheta^{2^m}]. \tag{1,20}$$

Как показывает исследование функции $F(\vartheta,m)$, $F(\vartheta,m)\leqslant 2$ в области $0\leqslant\vartheta<\frac{1}{2}$, $m\geqslant 0$. Таким образом, последовательность матриц $X_m(t)$ равномерно сходится в интервале $(0,\ T)$, причем для предельной матрицы $X(t)$ справедливо неравенство

$$\|X(t)-X_m(t)\|\leqslant 2[1-\vartheta(t)]^{-2}[\vartheta(t)]^{2^m}\|X_0(t)\|. \tag{1,21}$$

В соответствии с (1,8) предельная матрица $X(t)$ удовлетворяет диференциальному матричному уравнению (1,2) и согласно (1,4) $X(0)=I$. Полагая

$$x_m(t)=X_m(t)\xi, \qquad m=0,1,2,\ldots, \tag{1,22}$$

получим последовательность векторов $x_m(t)$, равномерно сходящуюся в интервале $(0, T)$ к вектору $x(t)$, определяющему искомое решение заданной системы линейных диференциальных уравнений (1,1), причем согласно (1,21)

$$\|x(t)-x_m(t)\| \quad 2n[1-\vartheta(t)]^{-2}[\vartheta(t)]^{2^m}\|X_0(t)\|\,\|\xi\|<$$
$$<8nC\|\xi\|\left(\frac{1}{2}\right)^{2^m} \quad (C=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|X_0(t)\|). \tag{1,23}$$

§ 2. Приближенное интегрирование нелинейных диференциальных уравнений

Перейдем теперь к вопросу о приближенном интегрировании системы n нелинейных диференциальных уравнений первого порядка с заданными n начальными условиями

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x), \quad 0\leqslant t\leqslant T, \quad x(0)=\xi, \tag{2,1}$$

где $x(t)$ — искомый n-мерный вектор, а $f(t, x)$ — заданная вектор-функция независимой переменной t и искомого вектора x. Введем в рассмотрение квадратную матрицу порядка n

$$A(t,x)=\left(\frac{\partial f_i(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_j}\right), \tag{2,2}$$

где $f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $i=1, 2, \ldots, n$ — составляющие вектора $f(t, x)$. Относительно матрицы $A(t, x)$ будем предполагать, что она удовлетворяет условию

$$\|A(t,y)-A(t,x)\|\leqslant M(t)\|y-x\| \tag{2,3}$$

и соответственно

$$\|f(t,y)-f(t,x)-A(t,x)(y-x)\|\leqslant nM(t)\|y-x\|^2, \tag{2,4}$$

где $M(t)$ — функция, ограниченная в интервале $(0, T)$.

Пусть $x_0(t)$ $(x_0(0)=\xi)$ — исходное приближение для искомого вектора $x(t)$. Определим последовательные приближения $x_1(t)$, $x_2(t), \ldots$ диференциальными уравнениями

$$\frac{dx_{m+1}}{dt}=A_m(t)x_{m+1}+f(t,x_m)-A_m(t)x_m,$$
$$x_{m+1}(0)=\xi, \qquad m=0,1,2,\ldots, \tag{2,5}$$

где

$$A_m(t)=X'_m(t)\,X_m^{-1}(t), \qquad m=0,1,2,\ldots, \tag{2,6}$$

$X_0(t)$ $(X_0(0)=I)$ — приближенное решение линейного диференциального матричного уравнения

$$X'(t)=A(t,x_0)X(t), \; X(0)=I, \tag{2,7}$$

а $X_1(t), X_2(t), \ldots,$ — последовательность матриц, определяемая диференциальными уравнениями

$$X'_{m+1}(t) = A_m(t)\, X_{m+1}(t) + [A(t, x_{m+1}) - A_m(t)]\, X_m(t),$$
$$X_{m+1}(0) = I, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{2,8}$$

Полагая в уравнениях (2,5)

$$x_{m+1}(t) = x_m(t) + X_m(t)\, y_{m+1}(t) \tag{2,9}$$

и принимая во внимание соотношения (2,6), получим для векторов $y_1(t), y_2(t), \ldots$ диференциальные уравнения

$$X_m(t)\frac{dy_{m+1}}{dt} = -\frac{dx_m}{dt} + f(t, x_m), \; y_{m+1}(0) = 0, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

откуда

$$y_{m+1}(t) = -\int_0^t X_m^{-1}(t)\left[\frac{dx_m}{dt} - f(t, x_m)\right] dt, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{2,10}$$

Аналогично, полагая в уравнениях (2,8)

$$X_{m+1}(t) = X_m(t)\,[I + Y_{m+1}(t)] \tag{2,11}$$

и принимая во внимание соотношения (2,6), получим для матриц $Y_1(t), Y_2(t), \ldots$ диференциальные уравнения

$$X_m(t)\, Y'_{m+1}(t) = [A(t, x_{m+1}) - A_m(t)]\, X_m(t), \; Y_{m+1}(0) = 0, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

откуда

$$Y_{m+1}(t) = \int_0^t X_m^{-1}(t)\,[A(t, x_{m+1}) - A_m(t)]\, X_m(t)\, dt, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{2,12}$$

Введем обозначение

$$\varphi(t, y, x) = f(t, y) - f(t, x) - A(t, x)(y - x). \tag{2,13}$$

Согласно (2,5), (2,9) и (2,13) формулам (2,10) можно придать вид

$$y_{m+1}(t) = \int_0^t X_m^{-1}(t)\{[A(t, x_m) - A_{m-1}(t)]\, X_{m-1}(t)\, y_m(t) -$$
$$- \varphi(t, x_{m-1}, x_m)\}\, dt, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{2,14}$$

Введем, далее, обозначение

$$\Delta_m(t) = [A(t, x_m) - A_{m-1}(t)]\, X_{m-1}(t). \tag{2,15}$$

Согласно (2,6) и (2,8)

$$A_{m+1}(t) - A_m(t) = [A(t, x_{m+1}) - A_m(t)]\, X_m(t)\, X_{m+1}^{-1}(t) = \Delta_{m+1}(t) X_{m+1}^{-1}(t). \tag{2,16}$$

В соответствии с (2,15) и (2,16)

$$\Delta_{m+1}(t)\, X_m^{-1}(t) - \Delta_m(t)\, X_{m-1}^{-1}(t) = A(t, x_{m+1}) - A_m(t) -$$
$$- A(t, x_m) + A_{m-1}(t) = A(t, x_{m+1}) - A(t, x_m) - \Delta_m(t)\, X_m^{-1}(t),$$

откуда

$$\Delta_{m+1}(t)=[A(t, x_{m+1})-A(t, x_m)]\,X_m(t)+\Delta_m(t)\,X_{m-1}^{-1}(t)\,X_m(t)-\Delta_m(t),$$

или согласно (2,11)

$$\Delta_{m+1}(t)=[A(t, x_{m+1})-A(t, x_m)]\,X_m(t)+\Delta_m(t)\,Y_m(t). \tag{2,17}$$

Объединяя формулы (2,9), (2,11), (2,12), (2,14) и (2,17), придем к следующим рекурентным соотношениям:

$$\left.\begin{aligned}
y_{m+1}(t)&=\int_0^t X_m^{-1}(t)\,[\Delta_m(t)\,y_m(t)-\varphi(t, x_{m-1}, x_m)]\,dt\\
x_{m+1}(t)&=x_m(t)+X_m(t)\,y_{m+1}(t)\\
\Delta_{m+1}(t)&=[A(t, x_{m+1})-A(t, x_m)]\,X_m(t)+\Delta_m(t)\,Y_m(t)\\
Y_{m+1}(t)&=\int_0^t X_m^{-1}(t)\,\Delta_{m+1}(t)\,dt\\
X_{m+1}(t)&=X_m(t)\,[I+Y_{m+1}(t)]
\end{aligned}\right\},\quad m=1, 2, \ldots \tag{2,18}$$

Перейдем теперь к исследованию сходимости указанного выше процесса последовательных приближений. Введем обозначения

$$\varepsilon_1=\int_0^T\left\|\frac{dx_0}{dt}-f(t, x_0)\right\|\;t, \tag{2,19}$$

$$\varepsilon_2=\int_0^T\|X_0'(t)-A(t, x_0)\,X_0(t)\|\,dt, \tag{2,20}$$

$$\mu=\int_0^T M(t)\,dt, \tag{2,21}$$

и обозначим через C наибольшее из абсолютных значений, принимаемых в интервале $(0, T)$ элементами матриц $X_0(t)$ и $X_0^{-1}(t)$:

$$C=\max_{0<t<T}(\|X_0(t)\|,\ \|X_0^{-1}(t)\|). \tag{2,22}$$

Будем предполагать ниже, что исходное приближенное решение системы диференциальных уравнений (2,1) $x=x_0(t)$ при подстановке в уравнения (2,1) дает настолько малую невязку, что число ε_1 удовлетворяет неравенству

$$\varepsilon_1\leqslant\frac{q^2}{nC}\,g(\mu n^4C^5), \tag{2,23}$$

где

$$q=\exp\left(-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\ln\xi_i}{2^{i+1}}\right)\left(\xi_1=2,\ \xi_{i+1}=\xi_i+\frac{1}{\xi_i},\quad i=1, 2, \ldots\right), \tag{2,24}$$

а $g(\nu)$ — непрерывная, монотонно убывающая функция вещественной переменной ν, определяемая формулами

$$g(\nu)=\frac{1}{1+\frac{256}{27}\nu} \text{ при } \nu\leqslant\frac{27}{64},$$

$$g(\nu)=\frac{1-\sqrt[3]{\nu}}{2-\sqrt[3]{\nu}} \text{ при } \frac{27}{64}\leqslant\nu\leqslant\nu_0,\quad \nu_0=\left(\frac{19-\sqrt{73}}{12}\right)^3,$$

$$g(\nu)=\frac{1-\sqrt[3]{\nu_0}}{2-\sqrt[3]{\nu_0}}\frac{\nu_0^2}{\nu^2} \text{ при } \nu\geqslant\nu_0. \tag{2,25}$$

Введем обозначение

$$\lambda=\frac{nC\varepsilon_1}{q^2} \tag{2,26}$$

и обозначим далее через k наименьшее из вещественных решений уравнения

$$k^2=\mu n^4C^3F^3(k,\lambda)$$

$$\left(F(k,\lambda)=\frac{1-\lambda}{1-(1+k^2)\lambda} \text{ при } k\leqslant 1,\right.$$

$$\left.F(k,\lambda)=\frac{1-k^4\lambda}{1-2k^4\lambda} \text{ при } k\geqslant 1\right), \tag{2,27}$$

удовлетворяющих неравенству

$$k>\sqrt{\mu n^4C^3}. \tag{2,28}$$

Если число ε_1 удовлетворяет неравенству (2,23), то уравнение (2,27) всегда имеет по крайней мере одно вещественное решение, удовлетворяющее неравенству (2,28). Действительно, решая уравнение (2,27) относительно λ, можно придать этому уравнению вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}&=1+\frac{k^2}{1-\mu^{\frac{1}{3}}n^{\frac{4}{3}}Ck^{-\frac{2}{3}}} \text{ при } k\leqslant 1\\ \frac{1}{\lambda}&=k^4\left(1+\frac{1}{1-\mu^{\frac{1}{3}}n^{\frac{4}{3}}Ck^{-\frac{2}{3}}}\right) \text{ при } k\geqslant 1\end{aligned}\right\}. \tag{2,29}$$

Если $\mu n\, C^3\leqslant\frac{27}{64}$, то функция $\frac{1}{\lambda}$, равная $+\infty$ при $k=\sqrt{\mu n^4C^3}+0$, монотонно убывает далее при возрастании k от $\sqrt{\mu n^4C^3}$ до $\frac{8\sqrt{3}}{9}\sqrt{\mu n^4C^3}$ и при $k=\frac{8\sqrt{3}}{9}\sqrt{\mu n^4C^3}\leqslant 1$ достигает минимального значения $1+\frac{256}{27}\mu n^4C^3$. Но в рассматриваемом случае согласно (2,23) и (2,25) $\frac{1}{\lambda}=\frac{q^2}{nC\varepsilon_1}\geqslant 1+\frac{256}{27}\mu n^4C^3$. Таким образом, в данном случае уравнение (2,27) имеет одно решение в интервале $\sqrt{\mu n^4C^3}<k\leqslant\frac{8\sqrt{3}}{9}\sqrt{\mu n^4C^3}\leqslant 1$.

Если $\frac{27}{64} < \mu n^4 C^3 \leqslant \nu_0$, то функция $\frac{1}{\lambda}$ при возрастании k от $\sqrt{\mu n^4 C^3}$ до 1 монотонно убывает, достигая значения $\frac{2 - \mu^{\frac{1}{3}} n^{\frac{4}{3}} C}{1 - \mu^{\frac{1}{3}} n^{\frac{4}{3}} C}$ при $k=1$. Но в данном случае согласно (2,23) и (2,25) $\frac{1}{\lambda} = \frac{q^2}{nC\varepsilon_1} \geqslant \frac{2 - \mu^{\frac{1}{3}} n^{\frac{4}{3}} C}{1 - \mu^{\frac{1}{3}} n^{\frac{4}{3}} C}$. Таким образом, в рассматриваемом случае уравнение (2,27) имеет одно решение в интервале $\sqrt{\mu n^4 C^3} < k \leqslant 1$.

Наконец, если $\mu n^4 C^3 > \nu_0$, то при возрастании k от $\sqrt{\mu n^4 C^3}$ до $\sqrt{\frac{\mu n^4 C^3}{\nu_0}}$ функция $\frac{1}{\lambda}$ монотонно убывает, достигая при $k = \sqrt{\frac{\mu n^4 C^3}{\nu_0}}$ своего минимального значения $\frac{2 - \sqrt[3]{\nu_0}}{\nu_0^2 (1 - \sqrt[3]{\nu_0})} (\mu n^4 C^3)^2$. Но в рассматриваемом случае согласно (2,23) и (2,25) $\frac{1}{\lambda} = \frac{q^2}{nC\varepsilon_1} \geqslant \frac{2 - \sqrt[3]{\nu_0}}{\nu_0^2 (1 - \sqrt[3]{\nu_0})} (\mu n^4 C^3)^2$. Таким образом, в данном случае уравнение (2,27) имеет одно решение в интервале $\sqrt{\mu n^4 C^3} < k \leqslant \sqrt{\frac{\mu n^4 C^3}{\nu_0}}$.

Заметим попутно, что согласно (2,23) и (2,25) $\lambda = \frac{nC\varepsilon_1}{q^2} \leqslant g(\mu n^4 C^3) < 1$ и, в соответствии с уравнением (2,27), определяющим число k,

$$\lambda < \frac{1}{1+k^2} \text{ при } k \leqslant 1, \lambda < \frac{1}{2k^4} \text{ при } k \geqslant 1. \tag{2,30}$$

Будем предполагать ниже, что приближенное решение $X = X_0(t)$ матричного диференциального уравнения (2,7) при подстановке в уравнение (2,7) дает настолько малую невязку, что число ε_2, определяемое формулой (2,20), удовлетворяет неравенству

$$\varepsilon_2 \leqslant \mu n^3 C^2 \left[\left(\frac{k^2}{\mu n^4 C^3} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right] \varepsilon_1. \tag{2,31}$$

Введем обозначения

$$p_j = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{2^i}, \quad j=2,3,\ldots, p_1 = 0, \tag{2,32}$$

$$q_j = \exp\left(-\sum_{i=1}^{j-1} \frac{\ln \xi_i}{2^{i+1}} \right), \quad j=2,3,\ldots \; (\xi_1 = 2,$$

$$\xi_{i+1} = \xi_i + \frac{1}{\xi_i}, \quad i=1,2,\ldots), \quad q_1 = 1, \tag{2,33}$$

$$\vartheta_j = \sqrt{\lambda} \frac{q}{q_j} k^{p_j}, \quad j=1,2,\ldots, \tag{2,34}$$

и докажем, что имеют место неравенства

$$\left.\begin{aligned} &\|y_j(t)\| \leqslant \vartheta_j^{2^j} \\ &\int_0^T \|\varDelta_j(t)\|\,dt \leqslant \mu^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{2}{3}} k^{\frac{4}{3}}(\xi_j-1)\,\vartheta_j^{2^j} \\ &\|Y_j(t)\| \leqslant \frac{k^2}{n}(\xi_j-1)\,\vartheta_j^{2^j} \end{aligned}\right\}, \qquad j=1, 2, \ldots \tag{2,35}$$

Покажем, что если неравенства (2,35) выполняются при $j = 1, 2, \ldots, m$ $(m \geqslant 1)$, то они выполняются и при $j = m+1$.

Заметим предварительно, что в соответствии с формулами (2,24) (2,33) и (2,34)

$$\ln(\xi_j\vartheta_j^{2^j}) = 2^j\left(\frac{1}{2}\ln\lambda + \ln q - \ln q_j + 2^{-j}\ln\xi_j + p_j\ln k\right) =$$

$$= 2^j\left(\frac{1}{2}\ln\lambda - \sum_{i=j}^{\infty}\frac{\ln\xi_i}{2^{i+1}} + \sum_{i=j}^{\infty}\frac{\ln\xi_j}{2^{i+1}} + p_j\ln k\right) < 2^j\left(\frac{1}{2}\ln\lambda + p_j\ln k\right)$$

и, таким образом,

$$\xi_j\vartheta_j^{2^j} < (\sqrt{\lambda}\,k^{p_j})^{2^j}, \quad j=1, 2, \ldots \tag{2,36}$$

Покажем сперва, что

$$\|X_m(t)\| < \mu^{-\frac{1}{3}} n^{-\frac{4}{3}} k^{\frac{2}{3}} \text{ и } \|X_m^{-1}(t)\| < \mu^{-\frac{1}{3}} n^{-\frac{4}{3}} k^{\frac{2}{3}}, \tag{2,37}$$

если при $j = 1, 2, \ldots, m$ выполняются неравенства (2,35). Рассмотрим отдельно два случая.

1) $k \leqslant 1$. Введем в рассмотрение матрицы

$$Z_j(t) = X_0^{-1}(t)\,X_j(t) - I, \qquad j=1, 2, \ldots, m, \tag{2,38}$$

и покажем, что в данном случае

$$\|Z_j(t)\| < \frac{\lambda k^2}{n}(1+\lambda+\lambda^2+\ldots+\lambda^{2^j-2}), \qquad j=1, 2, \ldots, m. \tag{2,39}$$

Согласно (2,11) и (2,38)

$$Z_{j+1}(t) = Z_j(t) + Y_{j+1}(t) + Z_j(t)\,Y_{j+1}(t), \quad j=2, 3, \ldots, m, \quad Z_1(t) = Y_1(t). \tag{2,40}$$

В соответствии с неравенствами (2,35) и (2,36) при $k \leqslant 1$

$$\|Y_j(t)\| < \frac{k^2}{n}\xi_j\vartheta_j^{2^j} < \frac{k^2}{n}(\sqrt{\lambda})^{2^j}, \qquad j=1, 2, \ldots, m. \tag{2,41}$$

Таким образом, согласно (2,40) и (2,41) при $j = 1$ неравенство (2,39) выполняется. В то же время, если неравенство (2,39) выполняется при

$j=i$ $(1 \leqslant i \leqslant m-1)$, то оно выполняется и при $j=i+1$. Действительно, в этом случае согласно (2,40) и (2,41)

$$\|Z_{i+1}(t)\| < \frac{\lambda k^2}{n}(1+\lambda+\lambda^2+\ldots+\lambda^{2^i-2}) + \frac{k^2}{n}\lambda^{2^i} +$$

$$+\frac{k^4}{n}\lambda^{2^i+1}(1+\lambda+\lambda^2+\ldots+\lambda^{2^i-2}) \leqslant \frac{\lambda k^2}{n}(1+\lambda+\lambda^2+\ldots+\lambda^{2^{i+1}-2}).$$

Итак, в рассматриваемом случае

$$\|Z_j(t)\| < \frac{\lambda k^2}{n(1-\lambda)}, \qquad j=1, 2, \ldots, m. \tag{2,42}$$

Согласно (2,22), (2,38) и (2,42)

$$\|X_m(t)\| = \|X_0(t)[I+Z_m(t)]\| < C\left(1+\frac{\lambda k^2}{1-\lambda}\right) < \frac{C}{1-\frac{\lambda k^2}{1-\lambda}} = \frac{C(1-\lambda)}{1-(1+k^2)\lambda}$$

и

$$\|X_m^{-1}(t)\| = \|[I+Z_m(t)]^{-1}X_0^{-1}(t)\| = \|[I-Z_m(t)+Z_m(t)-\ldots]X_0^{-1}(t)\| <$$

$$< C\left[1+\frac{\lambda k^2}{1-\lambda}+\left(\frac{\lambda k^2}{1-\lambda}\right)^2+\ldots\right] = \frac{C(1-\lambda)}{1-(1+k^2)\lambda}$$

$\Big($в соответствии с неравенствами (2,30), в рассматриваемом случае $\frac{\lambda k^2}{1-\lambda} < 1\Big)$.

Итак, в данном случае согласно (2,27) неравенства (2,37) выполняются.

2) $k \geqslant 1$. Покажем сперва, что в данном случае

$$\|Z_j(t)\| < \frac{\lambda k^4}{n}[1+\lambda k^4+(\lambda k^4)^2+\ldots+(\lambda k^4)^{2^j-2}], \qquad j=1, 2, \ldots, m. \tag{2,43}$$

В соответствии с неравенствами (2,35) и (2,36) при $k \geqslant 1$

$$\|Y_j(t)\| < \frac{k^2}{n}(\sqrt{\lambda}\, k)^{2^j}, \qquad j=1, 2, \ldots, m, \tag{2,44}$$

так как согласно (2,32)

$$p_j < \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i} = 1. \tag{2,45}$$

Таким образом, в соответствии с формулами (2,40) и (2,44) при $j=1$ неравенство (2,44) выполняется. В то же время, если неравенство (2,44) выполняется при $j=i$ $(1 \leqslant i \leqslant m-1)$, то оно выполняется и при $j=i+1$. Действительно, в этом случае согласно (2,40) и (2,44)

$$\|Z_{i+1}(t)\| < \frac{\lambda k^4}{n}[1+\lambda k^4+\ldots+(\lambda k^4)^{2^i-2}] + \frac{k^2}{n}(\lambda k^2)^{2^i} +$$

$$+\frac{\lambda k^6}{n}(\lambda k^2)^{2^i}[1+\lambda k^4+\ldots+(\lambda k^4)^{2^i-2}] \leqslant \frac{\lambda k^4}{n}[1+\lambda k^4+\ldots+(\lambda k^4)^{2^{i+1}-2}].$$

Итак, в рассматриваемом случае

$$\| Z_j(t) \| < \frac{\lambda k^4}{n(1-\lambda k^4)}, \qquad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{2,46}$$

Согласно (2,22), (2,38) и (2,46)

$$\| X_m(t) \| = \| X_0(t)[I + Z_m(t)] \| < C\left(1 + \frac{\lambda k^4}{1-\lambda k^4}\right) < \frac{C}{1 - \dfrac{\lambda k^4}{1-\lambda k^4}} = \frac{C(1-\lambda k^4)}{1-2\lambda k^4}$$

и

$$\| X_m^{-1}(t) \| = \| [I + Z_m(t)]^{-1} X_0^{-1}(t) \| = \| [I - Z_m(t) + Z_m^2(t) - \ldots] X_0^{-1}(t) \| <$$

$$< C\left[1 + \frac{\lambda k^4}{1-\lambda k^4} + \left(\frac{\lambda k^4}{1-\lambda k^4}\right)^2 + \ldots\right] = \frac{C(1-\lambda k^4)}{1-2\lambda k^4}$$

$\left(\text{в соответствии с неравенствами (2,30), в данном случае } \frac{\lambda k^4}{1-\lambda k^4} < 1\right)$.

Таким образом, и в случае $k \geqslant 1$ согласно (2,27) неравенства (2,37) выполняются.

В соответствии с формулами (2,32), (2,33) и (2,34)

$$\ln \vartheta_{m+1}^{2^{m+1}} = 2^{m+1}[\ln(\sqrt{\lambda}\, q) - \ln q_{m+1} + p_{m+1} \ln k] = 2^{m+1}[\ln(\sqrt{\lambda}\, q) -$$

$$- \ln q_m + \frac{\ln \xi_m}{2^{m+1}} + p_m \ln k + \frac{\ln k}{2^m}\Bigg] = 2^{m+1} \ln \vartheta_m + \ln \xi_m + 2 \ln k$$

и, следовательно,

$$\vartheta_{m+1}^{2^{m+1}} = k^2 \xi_m \vartheta_m^{2^{m+1}}. \tag{2,47}$$

Если неравенства (2,35) выполняются при $j = 1, 2, \ldots, m$ $(m \geqslant 1)$, то согласно (2,3), (2,4), (2,13), (2,18), (2,21), (2,37) и (2,47),

$$\| y_{m+1}(t) \| < \mu^{-\frac{1}{3}} n^{-\frac{1}{3}} k^{\frac{2}{3}} \int_0^T [n \| \varDelta_m(t) \| \| y_m(t) \| + \| \varphi(t, x_{m-1}, x_m) \|]\, dt <$$

$$< \mu^{-\frac{1}{3}} n^{\frac{2}{3}} k^{\frac{2}{3}} \int_0^T [\| \varDelta_m(t) \| \| y_m(t) \| + M(t) \mu^{-\frac{2}{3}} n^{-\frac{2}{3}} k^{\frac{4}{3}} \| y_m(t) \|^2]\, dt \leqslant \mu^{-\frac{1}{3}} n^{\frac{2}{3}} k^{\frac{2}{3}} \times$$

$$\times [\mu^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{2}{3}} k^{\frac{4}{3}} (\xi_m - 1) \vartheta_m^{2^{m+1}} + \mu^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{2}{3}} k^{\frac{4}{3}} \vartheta_m^{2^{m+1}}] = k^2 \xi_m \vartheta_m^{2^{m+1}} = \vartheta_{m+1}^{2^{m+1}},$$

$$\int_0^T \| \varDelta_{m+1}(t) \|\, dt \leqslant n \int_0^T [n M(t) \| y_{m+1}(t) \| \| X_m(t) \|^2 + \| \varDelta_m(t) \| \| Y_m(t) \|]\, dt <$$

$$< \mu^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{2}{3}} k^{\frac{4}{3}} \vartheta_{m+1}^{2^{m+1}} + \mu^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{2}{3}} k^{\frac{10}{3}} (\xi_m - 1)^2 \vartheta_m^{2^{m+1}} = \mu^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{2}{3}} k^{\frac{4}{3}} \times$$

$$\times \left[1 + \frac{1}{\xi_m}(\xi_m - 1)^2\right] \vartheta_{m+1}^{2^{m+1}} = \mu^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{2}{3}} k^{\frac{4}{3}} \left(\xi_m + \frac{1}{\xi_m} - 1\right) \vartheta_{m+1}^{2^{m+1}} =$$

$$= \mu^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{2}{3}} k^{\frac{4}{3}} (\xi_{m+1} - 1) \vartheta_{m+1}^{2^{m+1}}, \quad \| Y_{m+1}(t) \| < \mu^{-\frac{1}{3}} n^{-\frac{1}{3}} k^{\frac{2}{3}} \int_0^T \| \varDelta_{m+1}(t) \|\, dt <$$

$$< \frac{k^2}{n} (\xi_{m+1} - 1) \vartheta_{m+1}^{2^{m+1}},$$

т. е. выполнение неравенств (2,35) при $j=1, 2, \ldots, m$ $(m \geqslant 1)$ влечет за собой выполнение этих неравенств и при $j=m+1$.

Покажем теперь, что при $j=1$ неравенства (2,35) выполняются. Согласно (2,10), (2,19), (2,22), (2,26) и (2,34)

$$\|y_1(t)\| \leqslant nC \int_0^T \left\| \frac{dx_0}{dt} - f(t, x_0) \right\| dt = nC\varepsilon_1 = \lambda q^2 = \vartheta_1^2.$$

Далее, в соответствии с формулами (2,6) и (2,15)

$$\Delta_1(t) = [A(t, x_1) - A_0(t)]\, X_0(t) = [A(t, x_1) - A(t, x_0)]\, X_0(t) + \\ + A(t, x_0)\, X_0(t) - X_0'(t)$$

и, таким образом, согласно (2,3), (2,9), (2,20) и (2,31)

$$\int_0^T \|\Delta_1(t)\|\, dt \leqslant \int_0^T \|[A(t, x_1) - A(t, x_0)]\, X_0(t)\|\, dt + \varepsilon_2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T n^2 M(t) \|y_1(t)\| \, \|X_0(t)\|^2\, dt + \varepsilon_2 \leqslant \mu n^3 C^3 \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leqslant$$

$$\leqslant \mu n^3 C^3 \left(\frac{k^2}{\mu n^4 C^3} \right)^{\frac{2}{3}} \varepsilon_1 = \mu^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{2}{3}} k^{\frac{4}{3}} nC\varepsilon_1 = \mu^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{2}{3}} k^{\frac{4}{3}} \vartheta_1^2.$$

Наконец, в соответствии с (2,18) и (2, 28)

$$\|Y_1(t)\| \leqslant nC \int_0^T \|\Delta_1(t)\|\, dt = \mu^{\frac{1}{3}} n^{\frac{1}{3}} k^{\frac{4}{3}} C \vartheta_1^2 < \frac{k^2}{n} \vartheta_1^2.$$

Итак, неравенства (2,35) выполняются при $j=1$, а следовательно, и при любом $j \geqslant 1$.

В соответствии с формулами (2,32), (2,33) и (2,34),

$$\frac{\vartheta_{j+1}}{\vartheta_j} = \frac{q_j}{q_{j+1}} k^{p_{j+1} - p_j} = \xi_j^{2^{-j-1}} k^{2^{-j}} = (k^2 \xi_j)^{2^{-j-1}}, \tag{2,48}$$

$$\vartheta_1 = \sqrt{\lambda}\, q, \quad \lim_{j \to \infty} \vartheta_j = \sqrt{\lambda}\, k. \tag{2,49}$$

Соотношение (2,48) показывает, что при возрастании j от 1 до ∞ ϑ_j либо все время растет, либо (при достаточно малом k) сперва убывает, а потом начинает возрастать. Таким образом, согласно (2,49)

$$\vartheta_j \leqslant \vartheta, \qquad j = 1, 2, \ldots,$$

где

$$\vartheta = \sqrt{\lambda}\, q \text{ при } k \leqslant q, \ \vartheta = \sqrt{\lambda}\, k \text{ при } k \geqslant q, \tag{2,50}$$

и согласно (2,35)

$$\|y_j(t)\| \leqslant \vartheta^{2^j}, \qquad j = 1, 2, \ldots \tag{2,51}$$

Число ϑ, определяемое формулами (2,50), заведомо меньше единицы в соответствии с неравенствами (2,30).

Согласно (2,18) и (2,37),

$$\left\| x_{m+1}(t) - x_m(t) \right\| \leqslant \mu^{-\frac{1}{3}} n^{-\frac{1}{3}} k^{\frac{2}{3}} \vartheta^{2^{m+1}}, \qquad m=0, 1, 2, \ldots \tag{2,52}$$

Таким образом, при $M > m$

$$\left\| x_M(t) - x_m(t) \right\| \leqslant \sqrt[3]{\frac{k^2}{\mu n}} \vartheta^{2^{m+1}} \left[1 + \vartheta^{2^{m+1}} + (\vartheta^{2^{m+1}})^3 + \ldots\right] <$$

$$< \sqrt[3]{\frac{k^2}{\mu n}} \frac{\vartheta^{2^{m+1}}}{1 - \vartheta^{2^{m+1}}} \leqslant \sqrt[3]{\frac{k^2}{\mu n}} \frac{1}{1 - \vartheta^2} \vartheta^{2^{m+1}}.$$

Как видим, последовательность векторов $x_m(t)$ равномерно сходится в интервале $(0, T)$ к некоторому предельному вектору $x(t)$, причем

$$\left\| x(t) - x_m(t) \right\| < \sqrt[3]{\frac{k^2}{\mu n}} \frac{1}{1 - \vartheta^2} \vartheta^{2^{m+1}}, \qquad m=0, 1, 2, \ldots \tag{2,53}$$

Согласно (2,15) последовательность матриц $A_m(t)$ сходится в интервале $(0, T)$ к матрице $A(t, x)$ и, как показывают соотношения (2,5), предельный вектор $x(t)$, к которому сходится в интервале $(0, T)$ последовательность векторов $x_m(t)$, образует искомое решение заданной системы диференциальных уравнений (2,1), удовлетворяющее заданным начальным условиям.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Чаплыгин, Собрание сочинений, т. 1, 1948.

2. Н. Н. Лузин, О методе приближенного интегрирования акад. С. А. Чаплыгина, Труды ЦАГИ, вып. 141, 1932.

3. Л. В. Канторович, ДАН, 59, № 7, 1948; „Успехи математических наук", т. III, вып. 6 (28), 1948.

Получена 18.VI 1952 г.
Киев.