Гидромеханический расчет двухшпунтового флютбета при $T = \infty$ и различных отметках линии дна верхнего и нижнего бьефов

П. Ф. Фильчаков

Гидромеханический расчет двухшпунтового несимметричного флютбета при $T = \infty$ был подробно рассмотрен нами в статьях [3, 5].

В данной статье полученные ранее результаты обобщаются на самый общий случай двухшпунтового флютбета, а именно: на случай несимметричного двухшпунтового флютбета при различных отметках линии дна верхнего и нижнего бьефов (при бесконечной глубине водопроницаемого слоя $T = \infty$).

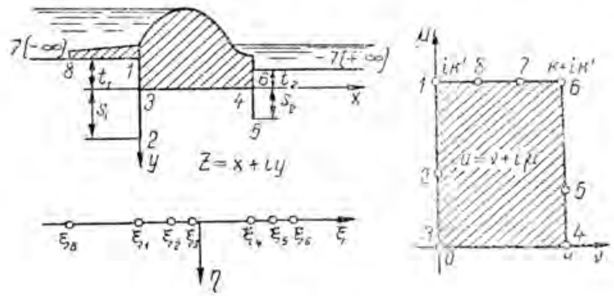

Рис. 1.

Необходимо подчеркнуть, что в настоящее время в строительной практике наиболее распространенным является двухшпунтовый флютбет и отметки дна верхнего и нижнего бьефов в практических схемах совпадают лишь в редких случаях.

1. Рассмотрим двухшпунтовый флютбет при бесконечной глубине водопроницаемого слоя $T = \infty$, представленный на рис. 1.

В качестве плоскости сравнения примем горизонтальную плоскость подошвы флютбета (*3—4*) и будем полагать, что отметка линии дна верхнего бьефа t_1 не равна отметке линии дна нижнего бьефа t_2.

Функция, конформно отображающая область флютбета z на вспомогательную (нижнюю) полуплоскость ζ, определяется следующим интегралом Кристоффеля-Шварца:

$$z = A \int \frac{(\zeta - \xi_2)(\zeta - \xi_5)\, d\zeta}{\sqrt{(\zeta - \xi_1)(\zeta - \xi_3)(\xi_4 - \zeta)(\xi_6 - \zeta)}} + B, \tag{1}$$

где постоянные A, B, $\xi_1, \ldots, \xi_6$ должны быть еще определены, что и составляет принципиальную трудность в рассматриваемых задачах.

Перейдем к новой независимой переменной u, положив

$$\mathrm{sn}^2(u, k) = \frac{(\xi_4-\xi_1)(\zeta-\xi_3)}{(\xi_4-\xi_3)(\zeta-\xi_1)}, \tag{2}$$

где

$$k^2 = \frac{(\xi_4-\xi_3)(\xi_6-\xi_1)}{(\xi_4-\xi_1)(\xi_6-\xi_3)}. \tag{3}$$

В таком случае будем иметь

$$\mathrm{cn}^2(u,k) = \frac{(\xi_3-\xi_1)(\xi_4-\zeta)}{(\xi_4-\xi_3)(\zeta-\xi_1)}; \quad \mathrm{dn}^2(u,k) = \frac{(\xi_3-\xi_1)(\xi_6-\zeta)}{(\xi_6-\xi_3)(\zeta-\xi_1)};$$

$$k'^2 = \frac{(\xi_6-\xi_4)(\xi_3-\xi_1)}{(\xi_4-\xi_1)(\xi_6-\xi_3)} \tag{4}$$

и

$$\frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta-\xi_1)(\zeta-\xi_3)(\xi_4-\zeta)(\xi_6-\zeta)}} = \frac{2}{\sqrt{(\xi_4-\xi_1)(\xi_6-\xi_3)}}\, du. \tag{5}$$

Решая уравнение (2) относительно ζ и внося полученные результаты в формулу (1), после элементарных преобразований получим

$$z = \frac{2A}{L}\{(\xi_3-\xi_1)^2 T_2 + (\xi_3-\xi_1)[(\xi_1-\xi_2)+(\xi_1-\xi_5)]\, T_1 +$$

$$+ (\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_5) T_0\} + B, \tag{6}$$

где обозначено

$$L^2 = (\xi_4-\xi_1)(\xi_6-\xi_3), \tag{7}$$

$$n = -\frac{\xi_4-\xi_3}{\xi_4-\xi_1}, \tag{8}$$

$$T_m = \int \frac{du}{[1+n\,\mathrm{sn}^2 u]^m}. \tag{9}$$

Воспользовавшись известной рекурентной формулой для интегралов T_m,

$$2(m-1)(n+1)(n+k^2)\, T_m = (2m-3)[n^2+2n(k^2+1)+3k^2]\, T_{m-1} -$$

$$-2(m-2)[n(k^2+1)+3k^2]\, T_{m-2} + (2m-5)k^2 T_{m-3} + \frac{n^2\,\mathrm{sn}\,u\cdot\mathrm{cn}\,u\cdot\mathrm{dn}\,u}{(1+n\,\mathrm{sn}^2 u)^{m-1}}, \tag{10}$$

в нашем случае будем иметь

$$(\xi_3-\xi_1)^2\, T_2 = \frac{1}{2}\Big\{(\xi_3-\xi_1)[(\xi_6-\xi_1)+(\xi_4-\xi_1)+(\xi_3-\xi_1)]T_1 +$$

$$+ \frac{LR}{(\zeta-\xi_1)}\Big\} - \frac{k^2(\xi_4-\xi_1)L^2}{2(\xi_4-\xi_3)}\, T_{-1},$$

где

$$R = \sqrt{(\zeta-\xi_1)(\zeta-\xi_3)(\xi_4-\zeta)(\xi_6-\zeta)}.$$

Подставив этот результат в формулу (1) и учтя, что

$$T_1 = \int \frac{du}{1+n\,\mathrm{sn}^2\,u} \equiv \Pi(u,n,k)$$

и

$$k^2 T_{-1} = k^2 \int (1+n\,\mathrm{sn}^2\,u)\,du = (k^2+n)\,u - n\mathcal{E}(u) = \frac{\xi_4-\xi_3}{\xi_4-\xi_1}\left[\frac{\xi_3-\xi_1}{\xi_6-\xi_3}\,u + \mathcal{E}(u)\right]$$

получаем, после очевидных преобразований, отображающую функцию в виде

$$z = AL\left\{\frac{2(\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_5)-(\xi_4-\xi_1)(\xi_3-\xi_1)}{L^2}\,u(k) - \mathcal{E}(u,k) + \right.$$
$$\left. + \frac{(\xi_3-\xi_1)[\xi_1+\xi_3+\xi_4+\xi_6-2(\xi_5+\xi_2)]}{L^2}\,\Pi(u,n,k) + \frac{R}{L(\zeta-\xi_1)}\right\} + B. \qquad (11)$$

Чтобы придать этой формуле окончательный вид, остается перейти к более удобной для вычислений форме Якоби эллиптического интеграла третьего рода, положив

$$\Pi(u,n,k) = u + \frac{\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{cn}\,a\cdot\mathrm{dn}\,a}\,\Pi(u,a), \qquad (12)$$

где параметр a определяется уравнением:

$$\mathrm{sn}^2(a,k) = -\frac{n}{k^2}. \qquad (13)$$

В нашем случае $n = -\dfrac{\xi_4-\xi_3}{\xi_4-\xi_1}$ и $k^2 = -n\dfrac{\xi_6-\xi_1}{\xi_6-\xi_3}$, так что

$$\mathrm{sn}^2 a = \frac{\xi_6-\xi_1}{\xi_6-\xi_3} \qquad (13')$$

и

$$\frac{\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a} = \left\{\frac{(\xi_6-\xi_3)(\xi_6-\xi_1)(\xi_4-\xi_1)}{(\xi_6-\xi_1)(\xi_3-\xi_1)^2}\right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{L}{\xi_3-\xi_1}.$$

Собрав и упростив теперь коэфициенты при u и $\Pi(u,a)$, получаем отображающую функцию в окончательном виде

$$z = AL\left\{C\cdot u(k) - \mathcal{E}(u,k) + D\cdot\Pi(u,a) + \frac{R}{L(\zeta-\xi_1)}\right\} + B, \qquad (14)$$

где

$$CL^2 = 2[\xi_2\xi_5 - \xi_3(\xi_2+\xi_5)] + \xi_3(\xi_1+\xi_4+\xi_6) - \xi_1\xi_6, \qquad (15)$$

$$DL = \xi_1+\xi_3+\xi_4+\xi_6-2(\xi_2+\xi_5), \qquad (16)$$

$$R^2 = (\zeta-\xi_1)(\zeta-\xi_3)(\xi_4-\zeta)(\xi_6-\zeta), \qquad (17)$$

и величины L, a, k, $u(k)$ определены равенствами (7), (13'), (3), (2).

2. Коэфициенты AL, C, D, B, входящие в формулу (14), определим из соответствия точек *1*, *3*, *4*, *6*. При этом для вычисления эллиптиче-

ского интеграла третьего рода будем пользоваться известной формулой

$$\Pi(u,a)=\frac{u}{K}[K\cdot\mathcal{E}(a)-aE]+\frac{1}{2}\ln\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}=\frac{u}{K}\Pi(a)+\frac{1}{2}\ln\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}, \quad (18)$$

где, по аналогии с эллиптическими интегралами первого и второго рода, введено обозначение

$$\Pi(K,a)=K\mathcal{E}(a)-aE=\Pi(a). \quad (19)$$

Точка 3. В этой точке $z=0$; $\zeta=\xi_3$; $u=0$; $R=0$ и, следовательно, из формулы (14) получаем

$$B=0. \quad (20)$$

Точка 4. Здесь $z=b$; $\zeta=\xi_4$; $u=K$; $R=0$ и формула (14) дает

$$b=AL\{C\cdot K-E+D\Pi(a)\}. \quad (21)$$

Точка 6. $z=b-it_2$; $\zeta=\xi_6$; $\operatorname{sn}^2 u=\frac{1}{k^2}$; $u=K+iK'$; $R=0$. Так как

$$\mathcal{E}(K+iK')=E+i(K'-E')$$

и по формуле (18)

$$\Pi(K+iK';a)=\frac{K+iK'}{K}\Pi(a)+\frac{1}{2}\ln\frac{\Theta(K+iK'-a)}{\Theta(K+iK'+a)}=$$

$$=\Pi(a)+\frac{i}{K}\left[K'\Pi(a)+\frac{a\pi}{2}\right],$$

то из уравнения (14) имеем

$$-t_2=AL\left\{CK'-(K'-E')+\frac{D}{K}\left[K'\Pi(a)+\frac{a\pi}{2}\right]\right\}. \quad (22)$$

Точка 1. $z=-it_1$, $\zeta=\xi_1$; $u=iK'$; $\mathcal{E}(iK')=\infty$, $\frac{R}{L(\zeta-\xi_1)}=\infty$.

Чтобы раскрыть неопределенность $\frac{R}{L(\zeta-\xi_1)}-\mathcal{E}(iK')$, воспользуемся известной формулой

$$\mathcal{E}(u+iK')=\mathcal{E}(u)+\frac{\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{\operatorname{sn}u}+i(K'-E'). \quad (23)$$

В таком случае из равенств (2), (4), (7), (17) следует

$$\lim_{\substack{\zeta\to\xi_1\\u\to0}}\left\{\frac{R}{L(\zeta-\xi_1)}-\mathcal{E}(u+iK')\right\}=\lim_{\substack{\zeta\to\xi_1\\u\to0}}\left\{\sqrt{\frac{(\zeta-\xi_3)(\xi_4-\zeta)(\xi_6-\zeta)}{(\xi_4-\xi_1)(\xi_6-\xi_3)(\zeta-\xi_1)}}-\right.$$

$$\left.-\left[\sqrt{\frac{(\xi_3-\xi_1)^2(\xi_4-\zeta)(\xi_6-\zeta)}{(\zeta-\xi_1)(\zeta-\xi_3)(\xi_4-\zeta)(\xi_6-\zeta)}}+\mathcal{E}(u)+i(K'-E')\right]\right\}= \quad (24)$$

$$=\lim_{\substack{\zeta\to\xi_1\\u\to0}}\left\{\frac{R}{L(\zeta-\xi_3)}-[\mathcal{E}(u)+i(K'-E')]\right\}=-i(K'-E').$$

Далее, согласно формуле (18) получаем

$$\Pi(iK', a) = \frac{iK'}{K}\Pi(a) + \frac{1}{2}\ln\frac{\Theta(iK'-a)}{\Theta(iK'+a)} = \frac{i}{K}\left[K'\Pi(a) + \frac{\pi}{a}(a-K)\right], \tag{25}$$

так что на основании (14) находим

$$-t_1 = AL\left\{CK' - (K'-E') + \frac{D}{K}\left[K'\Pi(a) + \frac{\pi}{2}(a-K)\right]\right\}. \tag{26}$$

Вычтя из уравнения (26) уравнение (22), имеем

$$t_2 - t_1 = -\frac{ALD\pi}{2}, \tag{27}$$

откуда, в частности, следует, что при $t_1 \neq t_2$

$$D \neq 0$$

и в состав отображающей функции (14) будет обязательно входить эллиптический интеграл третьего рода.

Присоединяя теперь к уравнениям (21), (22) и (27) соотношение

$$KE' + EK' - KK' = \frac{\pi}{2},$$

находим искомые коэфициенты отображающей функции:

$$-AL = \frac{2}{\pi}[bK' + t_2K + a(t_1 - t_2)], \tag{28}$$

$$C = \frac{b(K'-E') + t_2E + (t_1-t_2)\mathcal{E}(a)}{bK' + t_2K + a(t_1-t_2)}, \tag{29}$$

$$D = \frac{t_2 - t_1}{bK' + t_2K + a(t_1 - t_2)}. \tag{30}$$

При $t_1 = t_2 = t$ из этих формул получаются, как частный случай, результаты, изложенные в статье [3].

3. Переходим теперь к определению констант ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, ξ_5, ξ_6.

Выбор трех произвольных параметров интеграла Кристоффеля-Шварца в данном случае может быть осуществлен только тривиально, а именно: мы потребуем, чтобы

$$-\xi_1 = \xi_6 = 1 \tag{31}$$

и чтобы точке $z = \infty$ соответствовала точка $\zeta = \infty$. Из уравнений (15), (16) при условии (31) находим

$$2(\xi_2 + \xi_5) = \xi_3 + \xi_4 - LD$$

и

$$2\xi_2\xi = \xi_3(\xi - LD) + CL^2 - 1.$$

Следовательно, как и в [3], имеем

$$\xi_2 = -\frac{p^*}{2} - \sqrt{\left(\frac{p^*}{2}\right)^2 - q^*}, \tag{32}$$

$$\xi_5 = -\frac{p^*}{2} + \sqrt{\left(\frac{p^*}{2}\right)^2 - q^*}, \tag{33}$$

где в данном случае

$$-p^* = \frac{\xi_3 + \xi_4 - LD}{2}; \quad -q^* = \frac{1 - \xi_3(\xi_4 - LD) - CL^2}{2}. \tag{34}$$

Приняв во внимание уравнения (31), (30), (29), (13′) и (3), видим, что $p^*=f_1(\xi_3, \xi_4)$; $q^*=f_2(\xi_3, \xi_4)$ и, следовательно, вопрос определения констант отображения приводится к составлению и решению двух уравнений с неизвестными ξ_3, ξ_4.

Для этого приведем предварительно отображающую функцию (14) к виду, удобному для вычислений на четырех основных участках границы области z (см. рис. 1), полагая, что

$$u=\nu+i\mu. \tag{35}$$

Кроме того, для вычисления интеграла

$$\Pi(u, a)=\frac{u\Pi(a)}{K}+\frac{1}{2}\ln\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)} \tag{18}$$

будем пользоваться известными разложениями для логарифмов функций тэта[1] [1 (гл. III, § 6)]

$$\frac{1}{2}\ln\frac{\Theta(u+a)}{\Theta(u-a)}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi m u}{K}\cdot\sin\frac{\pi m a}{K}}{m\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi m K'}{K}}, \tag{36}$$

$$\frac{1}{2}\ln\frac{H_1(u+a)}{H_1(u-a)}=\frac{1}{2}\ln\frac{\cos\frac{\pi(u+a)}{2K}}{\cos\frac{\pi(u-a)}{2K}}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\sin\frac{\pi m u}{K}\cdot\sin\frac{\pi m a}{K}}{\mathrm{sh}\,\frac{\pi m K'}{K}}\,\frac{q^m}{m}, \tag{37}$$

где

$$q=e^{-\frac{\pi K'}{K}}. \tag{38}$$

Ряды (36), (37) сходятся на всей плоскости комплексного переменного, и сходятся они чрезвычайно быстро, так что для практических вычислений обычно достаточно одного-двух первых членов ряда.

Участок $(3\div 4)$. Здесь $z=x$ $(0\leqslant x\leqslant b)$; $u=\nu\,(0\leqslant\nu\leqslant K)$ и отображающая функция (14) принимает вид:

$$\left.\begin{aligned}
z=AL\Bigg[C^*\nu(k)-\mathcal{E}(\nu, k)+\frac{\sqrt{(\zeta-\xi_3)(\xi_4-\zeta)(\xi_6-\zeta)}}{L\sqrt{\zeta-\xi_1}}-{}\\
-D\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi m\nu}{K}\,\sin\frac{\pi m a}{K}}{m\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi m K'}{K}}\Bigg]\\
\text{где}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\\
\mathrm{sn}^2(\nu, k)=\frac{(\xi_4-\xi_1)(\zeta-\xi_3)}{(\xi_4-\xi_3)(\zeta-\xi_1)};\quad k^2=\frac{(\xi_4-\xi_3)(\xi_6-\xi_1)}{(\xi_4-\xi_1)(\xi_6-\xi_3)};\\
\mathrm{sn}^2(a, k)=\frac{\xi_6-\xi_3}{\xi_6-\xi_1}\leqslant 1
\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

[1] Мы пользуемся здесь согласно установившейся традиции в теории движения грунтовых вод старыми обозначениями Якоби для функций тэта.

и обозначено

$$C^* = C + D\,\frac{\Pi(a)}{K} = \frac{b(K'-E') + t_2 E + \dfrac{a(t_1-t_2)E}{K}}{bK' + t_2 K + a(t_1 - t_2)}. \tag{40}$$

В частности, в точке *3*: $\zeta = \xi_3$, $\nu = 0$; следовательно, $z = 0$, и в точке *4*: $\zeta = \xi_4$, $\nu = K$ и учитывая (21), $z = b$.

Участок $(4 \div 5 \div 6)$. На данном участке

$$z = b + iy \ (-t_2 \leqslant y \leqslant s_2);\ \xi_4 \leqslant \zeta \leqslant \xi_6,\ u = K + i\mu \ (0 \leqslant \mu \leqslant K').$$

Следовательно, выполнив обычные преобразования, имеем:

$$\mathrm{sn}(\mu, k') = \mathrm{sn}[i(K-u), k'] = i\,\frac{\mathrm{sn}(K-u; k)}{\mathrm{cn}(K-u; k)} = i\,\frac{\mathrm{cn}\,u}{k'\,\mathrm{sn}\,u},$$

$$\mathcal{E}(K + i\mu) = E + i\left\{\mu - \mathcal{E}(\mu') + \frac{(\xi_3 - \xi_1)R}{L(\zeta - \xi_3)(\zeta - \xi_1)}\right\}$$

и

$$\Pi(K + i\mu; a) = \Pi(a) + i\left\{\frac{\mu\Pi(a)}{K} + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{\mathrm{sh}\,\dfrac{\pi m\mu}{K}\cdot\sin\dfrac{\pi m a}{K}}{m\,\mathrm{sh}\,\dfrac{\pi m K'}{K}}\right\}.$$

Внося теперь эти результаты в формулу (14) и воспользовавшись уравнениями (21), (40), находим

$$z - b = iAL\left[(C^* - 1)\mu + \mathcal{E}(\mu') - \frac{\sqrt{(\zeta-\xi_1)(\zeta-\xi_4)(\xi_6-\zeta)}}{L\sqrt{(\zeta-\xi_3)}} + D\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{\mathrm{sh}\,\dfrac{\pi m\mu}{K}\cdot\sin\dfrac{\pi m a}{K}}{m\,\mathrm{sh}\,\dfrac{\pi m K'}{K}}\right], \tag{41}$$

где

$$\mathrm{sn}^2(\mu, k') = \frac{(\xi_6-\xi_3)(\zeta-\xi_4)}{(\xi_6-\xi_4)(\zeta-\xi_3)};\quad k'^2 = \frac{(\xi_6-\xi_4)(\xi_3-\xi_1)}{(\xi_6-\xi_3)(\xi_4-\xi_1)};\ 0 \leqslant a \leqslant K$$

В частности, для точки *4*: $\zeta = \xi_4$, $\mu = 0$ и $z = b$; для точки *6*: $\zeta = \xi_6$, $\mu = K'$ и так как $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{\sin\dfrac{\pi m a}{K}}{m} = \frac{\pi a}{2K}$, то $z - b = iAL\left\{\left[C + D\dfrac{\Pi(a)}{K} - 1\right]K' + E' + \dfrac{\pi a}{2K}\right\}$ и согласно уравнению (22) действительно имеем $z = b - it_2$.

Участок (*6*; $+\infty$; $-\infty$; *1*). Здесь $z=x-it_n$, причем $n=2$ при $b\leqslant x\leqslant+\infty$ у $n=1$ при $-\infty\leqslant x\leqslant 0$;

$$\xi_6\leqslant\zeta\leqslant\infty;\ -\infty\leqslant\zeta\leqslant\xi_1,\ u=K+iK'-\nu\quad(0\leqslant\nu\leqslant K).$$

В данном случае: $\operatorname{sn}(\nu,k)=\operatorname{sn}(K+iK'-u;k)=\dfrac{\operatorname{dn}(u,k)}{k\cdot\operatorname{cn}(u,k)}$,

$$\mathcal{E}(K+iK'-\nu)=E+i(K'-E')+\mathcal{E}(\nu)-\frac{\operatorname{sn}\nu\cdot\operatorname{dn}\nu}{\operatorname{cn}\nu};$$

$$\frac{\operatorname{sn}\nu\cdot\operatorname{dn}\nu}{\operatorname{cn}\nu}+\frac{R}{L(\zeta-\xi_1)}=\frac{R}{L(\zeta-\xi_4)};$$

$$\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}=\frac{\Theta[K+iK'-(\nu+a)]}{\Theta[K+iK'-(\nu-a)]}=e^{i\frac{\pi a}{K}}\frac{H_1(\nu+a)}{H_1(\nu-a)};$$

и, следовательно, воспользовавшись формулами (18) и (37), получим

$$\Pi(K+iK'-\nu;a)=\frac{K+iK'-\nu}{K}\Pi(a)+\frac{i\pi a}{2K}+\frac{1}{2}\ln\frac{\cos\frac{\pi(a+\nu)}{2K}}{\cos\frac{\pi(a-\nu)}{2K}}+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\sin\frac{\pi m\nu}{K}\cdot\sin\frac{\pi ma}{K}}{\operatorname{sh}\frac{\pi mK'}{K}}\cdot\frac{q^m}{m};$$

так что, подставив все это в (14) и воспользовавшись уравнениями (21), (22), (40), имеем:

$$z-b+it_2=-AL\left\{C^*\nu-\mathcal{E}(\nu)\pm\frac{\sqrt{(\zeta-\xi_1)(\zeta-\xi_5)(\zeta-\xi_6)}}{L\sqrt{\zeta-\xi_4}}+\right.$$

$$\left.+D\left[\frac{1}{2}\ln\frac{\cos\frac{\pi(a+\nu)}{2K}}{\cos\frac{\pi(a-\nu)}{2K}}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\sin\frac{\pi m\nu}{K}\sin\frac{\pi ma}{K}}{\operatorname{sh}\frac{\pi mK'}{K}}\frac{q^m}{m}\right]\right\}, \tag{42}$$

где

$$\operatorname{sn}^2(\nu,k)=\frac{(\xi_4-\xi_1)(\zeta-\xi_6)}{(\xi_6-\xi_1)(\zeta-\xi_4)};$$

знак у радикала (+) и $n=2$ при $b\leqslant x\leqslant\infty$,
знак у радикала (—), и $n=1$ при $-\infty\leqslant x\leqslant 0$.

Переход от одной формы уравнения (42) к другой осуществляется автоматически при обходе бесконечно удаленной точки $z=\infty$, которой соответствует $\nu_\infty=K-a$ $\left(\text{так как } \operatorname{sn}^2(K-\nu_\infty)=\dfrac{\operatorname{cn}^2\nu_\infty}{\operatorname{dn}^2\nu_\infty}=\dfrac{\xi_6-\xi_3}{\xi_6-\xi_1}=\operatorname{sn}^2 a\right)$ и в которой, следовательно, $\cos\dfrac{\pi(a+\nu)}{2K}=\cos\dfrac{\pi}{2}$.

Поэтому в точке $z=\infty$ функция $\ln \dfrac{\cos \dfrac{\pi(a+\nu)}{2K}}{\cos \dfrac{\pi(a-\nu)}{2K}}$ (точнее, функции $\Pi(u, a)$) имеет логарифмическую особенность, и при обходе ее, учитывая уравнение (27): $\dfrac{ALD\pi}{2}=t_1-t_2$ мы и приходим в формуле (42) к замене t_2 величиною t_1.

Участок $(3 \div 2 \div 1)$. На данном участке

$$z=iy \quad (-t_1 \leqslant y \leqslant s_1); \ \xi_1 \leqslant \zeta \leqslant \xi_3; \ u=i\mu \quad (0 \leqslant \mu \leqslant K')$$

и, следовательно,

$$\operatorname{sn}(\mu; k')=\operatorname{sn}(-iu; k')=-i\frac{\operatorname{sn}(u, k)}{\operatorname{cn}(u, k)};$$

$$\mathcal{E}(i\mu)=i\left\{\mu-\mathcal{E}(\mu')+\frac{\operatorname{dn}\mu' \operatorname{sn}\mu'}{\operatorname{cn}\mu'}\right\},$$

$$-\frac{\operatorname{dn}\mu' \operatorname{sn}\mu'}{\operatorname{cn}\mu'}+\frac{R}{L(\zeta-\xi_1)}=\frac{-R}{L(\xi_4-\zeta)},$$

$$\Pi(i\mu; a)=i\left\{\frac{\mu}{K}\Pi(a)-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi m\mu}{K}\cdot\sin\dfrac{\pi ma}{K}}{m\operatorname{sh}\dfrac{\pi mK'}{K}}\right\},$$

так что

$$z=iAL\left[(C^*-1)\mu+\mathcal{E}(\mu')-\frac{\sqrt{(\zeta-\xi_1)(\xi_3-\zeta)(\xi_6-\zeta)}}{L\sqrt{\xi_4-\zeta}}-\right.$$

$$\left.-D\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi m\mu}{K}\cdot\sin\dfrac{\pi ma}{K}}{m\operatorname{sh}\dfrac{\pi mK'}{K}}\right], \tag{43}$$

где

$$\operatorname{sn}^2(\mu; k)=\frac{(\xi_4-\xi_1)(\xi_3-\zeta)}{(\xi_3-\xi_1)(\xi_4-\zeta)}.$$

В частности, для точки *3*: $\zeta=\xi_3$, $\mu=0$ и $z=0$; для точки *1*: $\zeta=\xi_1$, $\mu=K'$; $\displaystyle\sum_{m=}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{\pi ma}{K}}{m}=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{a}{K}\right)$ и согласно уравнению (26) действительно $z=-it_1$.

Перейдем теперь к решению поставленной в начале этого пункта задачи. Два уравнения, необходимые для определения ξ_3, ξ_4, мы получим, положив соответственно в уравнениях (41) и (43) $z=b+is_2$, $\zeta=\xi_5$ и $z=is_1$, $\zeta=\xi_2$.

Решается полученная система табличным способом (подбором): задаемся величинами ξ_3, ξ_4, определяем затем k; k'; L; A; C^*; D; ξ_2, ξ_5 и находим по формулам (41), (43) соответствующие s_1, s_2. Найденные значения, если они не совпадают с заданными, дают указания, какими выбрать новые значения ξ_3, ξ_4. Процесс подбора продолжаем до тех пор, пока не получим с заданной точностью требуемые s_1, s_2.

4. Формулы гидромеханического расчета двухшпунтового флютбета, выведенные выше, позволяют, в частности, произвести расчет общего случая одношпунтового флютбета (в котором толщина флютбета $t \neq 0$), флютбета с толстым шпунтом типа заглубленной бетонной стенкой, плоского, толстого флютбета при различных отметках линии дна верхнего и нижнего бьефов и других практически интересных случаев.

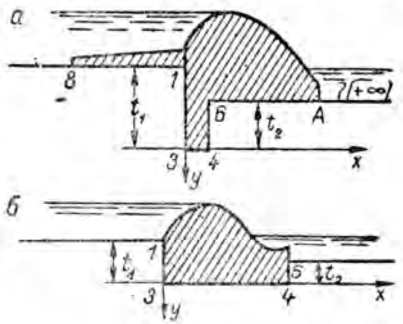

Рис. 2.

Мы ограничимся здесь только рассмотрением двух последних вариантов (рис. 2,*а*, 2,*б*), так как с математической точки зрения все эти задачи приводятся к использованию общих формул при тех или иных частных предположениях.

Строго говоря, варианты *а* и *б* принадлежат к одному и тому же типу, так как отрезки $(8 \div 1)$ и $(6 \div A)$ в варианте *а* являются продолжением линий верхнего и нижнего бьефов и, следовательно, функция, отображающая область флютбетов на полуплоскость, в обоих случаях одного и того же типа.

В данном частном случае $s_1 = s_2 = 0$ и, следовательно,

$$\xi_2 = \xi_3, \ \xi_4 = \xi_5. \tag{44}$$

Так как ξ_2, ξ_5 непосредственно не фигурируют в уравнениях для определения коэфициентов L, A, C, D, то отображающая функция в этом частном случае сохраняет свой прежний вид, и для конкретных расчетов необходимо пользоваться общими формулами (39) — (43).

Но условия (44) существенно упрощают определение констант отображения.

Действительно, при условиях (44) и оставшихся в силе условиях (31):

$$-\xi_1 = \xi_6 = 1, \tag{31}$$

из уравнений (7), (15) и (16) находим:

$$L^2 = (1 + \xi_4)(1 - \xi_3), \tag{7'}$$

$$C = \frac{1 - \xi_4^2}{L^2} = \frac{1 + \xi_3}{1 + \xi_4}, \tag{15'}$$

$$D = -\frac{\xi_4 + \xi_3}{L}. \tag{16'}$$

В таком случае, исключив AL из уравнений (21), (22) и (27) и переходя к безразмерным величинам (или по терминологии акад. Н. Н. Павловского [2], к приведенным размерам), будем иметь

$$\left.\begin{aligned}\frac{t_2}{b} &= \frac{CK' + \dfrac{D}{K}\left|K'\Pi(a) + \dfrac{a\pi}{2}\right| - (K' - E')}{E - [CK + D\Pi(a)]}\\ \frac{t_2 - t_1}{b} &= \frac{\pi D}{2\{E - [CK + D\Pi(a)]\}}\end{aligned}\right\}, \tag{45}$$

где согласно уравнениям (3) и (13′), при условиях (31)

$$k^2 = \frac{2(\xi_4 - \xi_3)}{(1+\xi_4)(1-\xi_3)};\ \ \mathrm{sn}^2(a, k) = \frac{1-\xi_3}{2} \tag{46}$$

и

$$\Pi(a) \equiv K\mathcal{E}(a) - aE. \tag{19}$$

Величину A, необходимую для определения выходных скоростей, определяем из уравнения (28),

$$-AL = \frac{2}{\pi}[bK' + t_2K + a(t_1 - t_2)]. \tag{28}$$

Правые части уравнений (45) есть в конечном итоге функции только двух независимых переменных ξ_3, ξ_4, так что систему (45) легко решить табличным способом.

Для упрощения вычислений введем два новых параметра:

$$\sin\theta = k \quad \text{и} \quad \sin\varphi_a = \mathrm{sn}(a, k).$$

Тогда схема вычислений будет следующая:

По заданным φ_a и θ определяем k, $\mathrm{sn}\,a$,

$$a = F(\varphi_a; \theta);\ \ \xi_3 = 1 - \mathrm{sn}^2 a;\ \ \xi_4 = \frac{2\xi_3 + (1-\xi_3)k^2}{2-(1-\xi_3)k^2};\ C; D$$

и $\Pi(a)$ по уравнениям (15′), (16′), (19), после чего по уравнениям (45) находим соответствующие приведенные размеры флютбета. Построив таким образом участки таблиц (с двумя входами) $\frac{t_2}{b} = f_1(\xi_3; \xi_4)$ и $\frac{t_2 - t_1}{b} = f_2(\xi_3; \xi_4)$, которые охватывают собой заданные размеры флютбета, более точные значения ξ_3, ξ_4 определяем путем интерполяции. При этом вначале удобнее задаваться только „табличными“ значениями параметров θ и φ_a и все вычисления вести с пониженной точностью.

При табличном способе решения системы трансцендентных уравнений существенную роль играет выбор нулевого приближения. Исходя из метода последовательного отображения шпунтов [4], нами разработан приближенный метод определения постоянных интеграла Кристоффеля-Шварца и для рассматриваемых в данной статье флютбетов.

Этот метод обеспечивает 1% точности и будет описан в отдельной статье.