О последовательностях аналитических функций и римановых поверхностей

Ю. Ю. Трохимчук

В известной своей статье [1] Каратеодори впервые ввел понятие ядра последовательности односвязных областей $\{G_n\}$ (или римановых поверхностей $\{F_n\}$), $n=1, 2, \ldots$, и доказал, что для сходимости соответствующих отображающих функций $f_n(z)$, заданных в круге $|z|<1$ с нормировкой: $f_n(0)=0$, $f_n'(0)>0$, необходимо и достаточно, чтобы области G_n (или поверхности F_n) сходились к своему ядру, коль скоро $\{f_n(z)\}$ образуют в круге $|z|<1$ нормальное семейство.

Л. И. Волковыский [2] развил результаты Каратеодори для произвольных последовательностей римановых поверхностей $\{F_n\}$, имеющих общим некоторый однолистный круг Q_0, определив с соответствующими изменениями ядро F такой последовательности, а также расширив область равномерной сходимости функций $f_n(z)$ до некоторой области обобщенной сходимости. Основная теорема Л. И. Волковыского утверждает, что, если для произвольной последовательности подобластей $\{G_n\}$ какой-либо фиксированной римановой поверхности R заданы функции $f_n(z)$, отображающие соответствующие G_n на некоторые римановы поверхности F_n, то всякая область обобщенной сходимости G с предельной функцией $f(z)\not\equiv \text{const}$ отображается ею на некоторое ядро F последовательности $\{F_n\}$, возможно, без части его исключительных изолированных точек; при этом область равномерной сходимости G', содержащаяся в G, отображается функцией $f(z)$ на часть ядра F, содержащую по крайней мере все его неисключительные точки. Для сходимости последовательности $\{F_n\}$ к ядру F необходимо и, если область G конечнолистна и не имеет изолированных граничных точек, достаточно, чтобы для всякой подпоследовательности $\{f_{n_i}(z)\}$ последовательности $\{f_n(z)\}$ область ее обобщенной сходимости, содержащая G, с ней совпадала.

Из сказанного видно, что основная теорема Волковыского не дает, вообще говоря, точного соответствия между областью обобщенной сходимости G и ядром F и чтобы получить его, необходимо более подробно изучить исключительные точки ядра F произвольной последовательности римановых поверхностей $\{F_n\}$.

Ниже будет показано, какие именно исключительные точки нужно присоединить, чтобы получить ядро, в точности соответствующее области равномерной сходимости. Оказывается, что можно итти и дальше по пути присоединения все более и более сложной структуры множеств исключительных точек к ядру, причем полученные ядра в точности соответствуют некоторым областям обобщенной сходимости (различных типов), которые получаются из области равномерной сходимости присоединением некоторого множества иррегулярных точек.

В § 1 даются принадлежащие Сарио [3] определение устранимого множества граничных точек и теорема о таких множествах, нужные нам в дальнейшем; здесь приводится новое простое доказательство этой теоремы.

В § 2 вводится определение различных типов областей обобщенной сходимости мероморфных функций $\{f_n(z)\}$, причем показывается, что предельная функция $f(z)$ всегда мероморфна в такой области.

§ 3 является вспомогательным к § 4; в нем рассматриваются некоторые граничные свойства ядра произвольной последовательности подобластей какой-либо римановой поверхности R, расположенных в компактной на R области, перенесение которых на общий случай последовательности римановых поверхностей $\{F_n\}$ приведет в § 4 к определению ядер различных типов.

В § 5 изучаются свойства точек равномерной сходимости и иррегулярных точек последовательности мероморфных функций $\{f_n(z)\}$, после чего излагаются теоремы о точном соответствии между областью равномерной сходимости G_0 и некоторым, так называемым простым, ядром F_0.

Наконец, в § 6 дается основная теорема о точном соответствии между различными областями обобщенной сходимости и различными ядрами последовательности $\{F_n\}$.

§ 1. Устранимые множества точек

Определение. Граница Γ плоской области G называется устранимой, если в G не существует не равной тождественно постоянной однозначной аналитической фукции с конечным интегралом Дирихле.

Непосредственно из определения следует, что свойство устранимости сохраняется при любых конформных однолистных отображениях области G, в частности при любых линейных преобразованиях плоскости; следовательно, всегда можно считать границу Γ ограниченным множеством. Далее, устранимое множество не может содержать континуума, т. е. является замкнутым разрывным множеством на плоскости; в самом деле, внешность континуума всегда можно конформно отобразить в единичный круг и очевидно, что отображающая функция имеет конечный интеграл Дирихле и не является постоянной. Замкнутое всюду разрывное множество на плоскости характеризуется также тем свойством, что в каждой окрестности произвольной его точки можно провести замкнутую жорданову кривую, окружающую данную точку и не проходящую через это множество. Часть разрывного множества, расположенную внутри такой жордановой кривой, будем называть в дальнейшем отделимой его частью.

Докажем теперь следующую теорему Сарио:

Теорема. *Пусть K — некоторая плоская односвязная область и Γ — разрывное множество внутри K, являющееся там отделимой* *частью. Для того чтобы каждая однозначная аналитическая в $K \setminus \Gamma$ функция с конечным интегралом Дирихле продолжалась аналитически и на Γ, необходимо и достаточно, чтобы Γ было устранимым множеством.*

Доказательство. Из предыдущего ясно, что теорему достаточно доказать для случая, когда Γ ограничено. В области $K \setminus \Gamma$ возьмем произвольную замкнутую жорданову спрямляемую кривую C, содержащую внутри себя множество Γ, и внутри C для каждого n $(n = 1, 2, \ldots)$ — систему C_n замкнутых жордановых спрямляемых кривых $\{\lambda_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, k_n)$, максимальный диаметр ε_n которых стремится к нулю при $n \to \infty$.

Пусть $f(z)$ — произвольная однозначная аналитическая в $K \setminus \Gamma$ функция с конечным интегралом Дирихле; в области, заключенной между C и C_n, имеем по теореме Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_n} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \varphi(z) - F(z). \tag{1}$$

Функция $\varphi(z)$ аналитична в замкнутой области $\overline{C}$, а $F(z)$ аналитична всюду вне C_n; при $n \to \infty$ формула (1) остается верной и, следовательно, $F(z)$ определена и аналитична всюду на плоскости z вне Γ. Из формулы (1), верной всюду в $\overline{C} \setminus \Gamma$, легко следует, что $F(z)$ имеет конечный интеграл Дирихле в $\overline{C} \setminus \Gamma$; так как $F(z)$ аналитична вне C, включая и C, то ее интеграл Дирихле и по всей внешности Γ конечен.

Поэтому, если Γ устранимо, то $F(z) \equiv 0$ и $f(z) \equiv \varphi(z)$, т. е. $f(z)$ аналитична внутри K. Из произвольности функции $f(z)$ и следует достаточность условия теоремы.

Если же Γ неустранимо, то вне его существует аналитическая функция $F(z) \not\equiv \mathrm{const}$ с конечным интегралом Дирихле, следовательно, особые ее точки существуют и расположены на Γ. Внутри K эта функция также имеет конечный интеграл Дирихле, но не продолжается аналитически на Γ. Теорема доказана.

Будем говорить, что свойство (A) некоторого множества P на плоскости является конформно-инвариантным, если всякая функция мероморфная в какой-либо области, содержащей множество P, отображает эту область на риманову поверхность, на которой образ P обладает тем же свойством (A). Ясно, что условие доказанной теоремы является свойством множества Γ, конформно-инвариантным в только что указанном смысле.

§ 2. Области обобщенной сходимости

Пусть G — некоторая риманова поверхность над плоскостью z и $\{f_n(z)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — последовательность однозначных на G аналитических функций, сходящихся равномерно в некоторой точке поверхности G[1]. Выделим максимальную область равномерной сходимости

[1] Говорят, что сходимость равномерна в точке, если сходимость равномерна в некоторой окрестности этой точки, т. е. равномерна на всякой замкнутой области внутри такой окрестности. Мероморфные функции $f_n(z)$ сходятся в области равномерно, если в каждой точке этой области сходится равномерно либо последовательность $\{f_n(z)\}$, либо последовательность $\left\{\frac{1}{f_n(z)}\right\}$.

$G_0 \subseteq G$ этих функций, содержащую эту точку. Область G_0 имеет, вообще, граничные точки относительно всей поверхности G, т. е. точки, в области которых функции $f_n(z)$ заданы, но в произвольной их окрестности не сходятся равномерно; следуя Монтелю [4], назовем такие точки иррегулярными. Очевидно, что множество иррегулярных точек всегда замкнуто в G.

Порцией некоторого множества на G назовем пересечение этого множества с произвольной областью на G.

Для множества S всех иррегулярных точек, граничных к области G_0, возьмем, если это возможно, максимальную его порцию $P : P \subseteq S$, являющуюся разрывным на G множеством; это значит, что для любой точки из P в произвольной ее окрестности можно провести жорданову кривую, окружающую эту точку, расположенную внутри G_0 и не проходящую через P.

Определение 1. *Скажем, что последовательность $\{f_n(z)\}$ является в точке $z_0 \in P$ равномерно конечнолистной, если для некоторой фиксированной окрестности $V(z)$ этой точки существует целое $p = p(z_0)$, такое, что на произвольной замкнутой области $\overline{B} \subset V(z_0) \setminus P$ все функции $f_n(z)$, начиная с некоторого n, не более, чем p-листны.*

Очевидно, для того чтобы предельная функция $f(z) \neq \mathrm{const}$ была равномерно конечнолистна внутри области $V(z_0) \setminus P$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{f_n(z)\}$ была равномерно конечнолистна в точке z_0.

Множество точек равномерной конечнолистности будем обозначать через P_0; из определения 1 следует, что множество P_0 есть порция множества P.

Введем теперь следующее определение:

Определение 2. *Областью обобщенной сходимости G_A типа (A) последовательности мероморфных функций $\{f_n(z)\}$ называется область, получаемая из произвольной максимальной области G_0 равномерной их сходимости добавлением части Q_A множества иррегулярных точек, обладающей следующими свойствами:*

1) *она является множеством, разрывным в G;*

2) *ее можно представить в виде объединения конечного числа или счетного множества отделимых частей, являющихся устранимыми множествами;*

3) *она является максимальной порцией множества P_0, обладающей некоторым конформно-инвариантным свойством (A) и удовлетворяющей условиям 1 и 2.*

Для большей общности этого определения будем считать, что множество Q_A может быть и пустым; соответствующая область обобщенной сходимости совпадает тогда с областью равномерной сходимости G_0, которую в этом случае удобно будет назвать областью обобщенной сходимости нулевого типа.

Область обобщенной сходимости $\bar{G}$, содержащую все отделимые части множества P_0, являющиеся устранимыми множествами, назовём полной областью обобщенной сходимости.

Докажем, что предельная функция $f(z)$ последовательности $\{f_n(z)\}$ является мероморфной в полной области обобщенной сходимости $\hat{G}$, следовательно, подавно и в области обобщенной сходимости G_A любого типа (A).

Если $f(z) \equiv \text{const}$, то это утверждение очевидно; пусть поэтому $f(z) \not\equiv \text{const}$.

Возьмем произвольную точку $z_0 \subset \hat{G} \setminus G_0$; z_0 принадлежит некоторой отделимой части s_0 множества P_0, являющейся устранимым (и плоским) множеством. Выберем для z_0 окрестность $V(z_0)$, обладающую свойством, указанным в определении 1, так, чтобы контур ее был расположен в G_0 и чтобы внутри него находились лишь точки s_0. Пусть $z' \in V(z_0) \setminus s_0$ — произвольная точка; значение $f(z')$ может приниматься функцией $f(z)$ не более $p = p(z_0)$ раз в области $V(z_0) \setminus s_0$. Существует поэтому не более, чем p областей $g', g'', \ldots, g^{(k)}$ $(k \leqslant p)$, замыкания которых $\overline{g}', \ldots, \overline{g}^{(k)}$ расположены внутри $V(z_0) \setminus s_0$ и в которых функция $f(z)$ принимает все значения из некоторого фиксированного круга K в плоскости $w = f(z)$. В области, расположенной внутри $V(z_0)$, содержащей точки множества s_0 и не пересекающейся с $\bigcup\limits_j \overline{g}^{(j)}$, функция $\dfrac{1}{f(z) - f(z')}$ ограничена и не более, чем p-листна вне s_0; поэтому она имеет конечный интеграл Дирихле в этой области и в силу теоремы предыдущего параграфа $\dfrac{1}{f(z) - f(z')}$ является аналитической функцией внутри $V(z_0) \setminus \bigcup\limits_j \overline{g}^{(j)}$. Следовательно, функция $f(z)$ мероморфна в окрестности $V(z_0)$.

Так как z_0 есть произвольная точка множества $\hat{G} \setminus G_0$, то функция $f(z)$ мероморфна всюду в полной области обобщенной сходимости.

§ 3. Подобласти римановой поверхности

Прежде чем давать определение ядра для произвольной последовательности римановых поверхностей, рассмотрим тот их частный случай, когда все поверхности $F_n (n = 1, 2, \ldots)$ расположены на одной и той же римановой поверхности R над плоскостью w.

Пусть F_n имеют некоторый общий однолистный круг Q_0. Ядром последовательности областей $\{F_n\}$, $F_n \subset R$, определенным кругом Q_0 назовем максимальную область F, содержащую круг Q_0 и обладающую тем свойством, что каждая ее замкнутая подобласть принадлежит всем F_n, начиная с некоторого n (или, что все равно, что каждая ее точка с некоторой окрестностью — одно или многолистной — принадлежит всем F_n, начиная с некоторого n). Ядро F вполне определено последовательностью областей $\{F_n\}$[1], что легко показать непосредственно.

Предположим для простоты, что все области F_n лежат внутри некоторой компактной на R области. Приведем несколько простых утверждений о ядре F такой последовательности.

Теорема 1. *Произвольная граничная точка ядра F является предельной для граничных точек областей $\{F_n\}$, т. е. для всякой граничной точки w_0 ядра F существует подпоследовательность областей $\{F_{n_i}\}$, такая, что некоторые их граничные точки $\{w_{n_i}\}$ сходятся к w_0.*

[1] См., например [5].

Доказательство. В самом деле, в противном случае имелась бы граничная точка w_0 ядра F, в некоторой окрестности которых находились бы граничные точки лишь конечного числа областей F_n. Тогда, либо эта окрестность принадлежит всем F_n, начиная с некоторой, и точка w_0 — внутренняя для F, либо эта окрестность находится вне бесконечного множества областей $\{F_{n_i}\}$ и, следовательно, точка w_0 — внешняя для F. В обоих случаях получаем противоречие с предположением, что w_0 — граничная точка ядра F.

Легко доказать и следующую теорему:

Теорема 2. *Всякая предельная точка граничных точек областей $\{F_n\}$ не является внутренней для ядра F.*

Мы получили эти свойства, исходя из определения ядра, приведенного выше; из этих свойств, в свою очередь, можно притти к новым, эквивалентным предыдущему, определениям ядра[1]. В самом деле, не трудно убедиться в справедливости следующего предложения:

Теорема 3. *В случае, когда области $\{F_n\}$ расположены на одной и той же римановой поверхности R, следующие свойства области F, содержащей круг Q_0:*

(I) *каждая замкнутая подобласть области F принадлежит всем F_n, начиная с некоторого n;*

(II) *каждая точка сгущения граничных точек областей $\{F_n\}$ не является внутренней для F;*

(III) *каждая граничная точка области F является предельной для граничных точек областей $\{F_n\}$, — плюс свойство максимальности области F для* (I) *и* (II) *и минимальности для* (III), — *эти свойства равносильны, т. е. всегда приводят к одной и той же области F, называемой ядром последовательности $\{F_n\}$ с общим кругом Q_0.*

Можно показать еще, что свойства (I)+(III) и (II)+(III) без добавочного требования экстремальности F также приводят к ядру.

Будем говорить, что области $\{F_n\}$ сходятся к области F, как к ядру, если область F есть ядро для всякой подпоследовательности $\{F_{ni}\}$ последовательности $\{F_n\}$. Имеет место почти очевидная теорема:

Теорема 4. *Для того чтобы области $\{F_n\}$ сходились к F, как к ядру, необходимо и достаточно, чтобы в любой окрестности каждой граничной точки области F находились граничные точки всех F_n, начиная с некоторого n.*

Применяя лемму Гейне-Бореля, не трудно показать, что это условие равносильно так называемой равномерной сходимости границ областей F_n к границе ядра F.

§ 4. Ядро произвольной последовательности римановых поверхностей

Рассмотрим произвольную последовательность римановых поверхностей $\{F_n\}$, расположенных над плоскостью w и имеющих общий однолистный круг Q_0, т. е. на каждой из $F_n (n = 1, 2, \ldots)$ зафиксирован

---

[1] Напомним, что F_n расположены внутри некоторой компактной на R области. Проводя более подробный анализ, можно было бы модифицировать все теоремы этого параграфа и для общего случая последовательности $\{F_n\}$, $F_n \subset R$.

некоторый однолистный круг $Q_0^{(n)}$, лежащий над кругом Q_0 плоскости w. Предположим, что условия теоремы о единственности ядра упрощенной последовательности выполнены [1].

Ядро для последовательности $\{F_n\}$, содержащее круг Q_0, будем строить так, чтобы оно по возможности сохраняло свойства ядра рассмотренного выше частного случая последовательности областей $\{F_n\}$, лежащих на одной и той же римановой поверхности.

Обозначим через F' максимальную поверхность, содержащую круг Q_0, каждая замкнутая подобласть которой принадлежит всем F_n, начиная с некоторого n; эта поверхность вполне определена последовательностью $\{F_n\}$, так как условия теоремы о единственности выполнены.

Рассмотрим всевозможные циклические сечения жордановыми кривыми на поверхности F', разбивающие ее и отделяющие от нее некоторые части рода нуль; возьмем такую часть $F'_{(r)} \subset F'$, ограниченную сечением $r \subset F'$. Скажем, что $F'_{(r)}$ имеет разрывную внутреннюю границу, если:

1) существует мероморфная в круге $K: |z| < 1$ функция $\psi(z)$, отображающая некоторое его открытое подмножество M на $F'_{(r)}$, причем единичной окружности соответствует при этом отображении кривая r;

2) множество $K \setminus M$ разрывно в K.

Риманову поверхность $\overline{F}_{(r)} \equiv \psi(K) \supset F'_{(r)}$ назовем внутренним продолжением части $F'_{(r)}$; граница области $F'_{(r)}$ относительно ее внутреннего продолжения $\overline{F}_{(r)}$ есть некоторое разрывное в $\overline{F}_{(r)}$ множество, являющееся к тому же отделимой частью.

Ясно, что внутреннее продолжение $\overline{F}_r \equiv \psi(K)$ определено для области $F'_{(r)}$ однозначно, т. е. не зависит от выбора функции $\psi(z)$, удовлетворяющей условиям 1 и 2. Очевидно, далее, что $F'_{(r)}$ продолжима внутрь вместе со всякой своей частью $F'_{(\bar{r})}$, имеющей лишь один граничный контур $\bar{r}$.

Продолжая каждую часть $F'_{(r)}$ поверхности F' внутрь в случаях, когда это возможно, получим некоторое однозначно определенное внутреннее продолжение $\overline{F}$ поверхности $F' : \overline{F} \supseteq F'$.

Множество $\Delta = \overline{F} \setminus F'$ является разрывным и замкнутым в $\overline{F}$ множеством точек; поэтому вокруг каждой точки из Δ в любой ее окрестности можно провести жорданову кривую λ на F' (для случая бесконечно удаленной точки из Δ это означает, что в любой ее окрестности над произвольной областью $|z| > \varrho$ можно провести жорданову кривую $\lambda \subset F'$, окружающую точку $z = 0$). Такая кривая принадлежит всем F_n, начиная с некоторого n; перенесем ее на эти F_n. Примем теперь во внимание лишь те точки w' из Δ, для которых все такие кривые λ, внутренние на $\overline{F}$ к некоторой фиксированной кривой $\lambda_{w'}$, разбивают все F_n, начиная с некоторой.

Пусть w_0 — такая точка из Δ; возьмем какую-либо последовательность точек $\{w_k\}$ в F', сходящуюся к w_0 и пусть w_* одна из точек w_k, попавших внутрь некоторой кривой $\lambda \subset F'$, расположенной внутри фиксированной кривой λ_{w_0}. Точка w_* и кривая λ принадлежат всем поверхностям F_n, начиная с некоторой; разрезая эти F_n вдоль кривой λ, назо-

[1] См. [5].

вем отделившуюся при этом от F_n часть $F_n^{(\lambda)}$, содержащую точку w_*, обобщенной окрестностью точки w_0 на поверхности F_n.

Если для любой кривой $\lambda \subset F'$, внутренней к λ_{w_0}, существует бесконечное множество поверхностей $\{F_{n_i}\}$, таких, что граница обобщенной окрестности $F_{n_i}^{(\lambda)}$ точки w_0 на F_{n_i} содержит граничные точки поверхности F_{n_i}, то будем говорить, что w_0 есть точка сгущения граничных точек поверхностей $\{F_n\}$.

В случае, когда w_0 не является точкой сгущения для граничных точек поверхностей $\{F_n\}$, для каждого n, начиная с некоторого, обобщенная окрестность $F_n^{(\lambda)}$ точки w_0 на поверхности F_n при некоторой кривой λ, внутренней к λ_{w_0}, представляет собой после присоединения к ней точек λ компактную область на F_n. Следовательно, $F_n^{(\lambda)}$ является конечнолистной поверхностью конечного рода. Свойство конечности числа листов и рода не зависит от взятой кривой λ, так как для всякой другой кривой λ', внутренней к λ, имеем: $F_n^{(\lambda')} \subset F_n^{(\lambda)}$.

Точки, не являющиеся предельными для граничных точек поверхностей $\{F_n\}$, назовем правильными. Из предыдущего следует, что точка $w_0 \in A$ является правильной тогда и только тогда, если при некоторой кривой λ, внутренней к λ_{w_0}, каждая обобщенная окрестность ее $F_n^{(\lambda)}$ начиная с некоторой, конечнолистна, конечного рода и представляет собой вместе с точками λ компактную область на F_n. Заметим еще, что для всей последовательности $\{F_n\}$ число листов или род обобщенных окрестностей $F_n^{(\lambda)}$ может неограниченно возрастать.

О п р е д е л е н и е 3. *Поверхность F_0, полученную присоединением к поверхности $F' \supset Q_0$ множества Γ_0 правильных точек, у которых все обобщенные окрестности $\{F_n^{(\lambda)}\}$, начиная с некоторого n при какой-либо кривой λ, внутренней к соответствующей фиксированной, либо ограничены, либо расположены вне ограниченной области, назовем простым ядром последовательности $\{F_n\}$ с общим кругом Q_0.*

Не трудно показать, что Γ_0 есть порция множества правильных точек на $\bar{F}$ (а, следовательно, и множества A); множество правильных точек из $A \setminus \Gamma_0$ обозначим через A_0.

О п р е д е л е н и е 4. *Ядром F_A типа (A) последовательности римановых поверхностей $\{F_n\}$ с общим кругом Q_0, называется риманова поверхность, получаемая из простого ядра F_0 этой последовательности, определенного кругом Q_0, присоединением части Γ_A множества правильных точек, обладающих следующими свойствами:*

1) *ее можно представить в виде объединения конечного числа или счетного множества (плоских) отделимых частей, являющихся устранимыми множествами;*

2) *она является максимальной порцией множества A_0, обладающей некоторым конформно-инвариантным свойством (A) и удовлетворяющей условию 1.*

Простое ядро F_0, получающееся из этого определения при пустом множестве Γ_A, будем иногда называть ядром нулевого типа.

Ядро $\bar{F}$, содержащее все отделимые части множества A_0, являющиеся устранимыми множествами, назовем п о л н ы м ядром.

Отметим тут же, что в дальнейшем под определение правильной точки, входящей в любое из Γ_A, будут подходить и все остальные точки ядра F_A, т. е. точки из простого ядра F_0, но для их различения термин „правильная" мы будем приписывать лишь точкам множества Δ_0.

Данное общее определение ядра для частного случая областей $\{F_n\}$, расположенных на одной и той же римановой поверхности R, очевидно, эквивалентно определению ядра в предыдущем параграфе (ср. (II) теоремы 3), причем здесь ядро всегда является простым.

Сходимость поверхностей $\{F_n\}$ к ряду F_A типа (A) определяется аналогично, как и в § 3.

§ 5. Точки равномерной сходимости и иррегулярные точки

Пусть снова, как и в § 2, $\{f_n(z)\}$ — последовательность мероморфных функций, заданных на некоторой римановой поверхности G под плоскостью z, и пусть $G_0 \subseteq G$ — область их равномерной сходимости с предельной функцией $f(z) \not\equiv \text{const}$. Функция $f_n(z)$ отображает поверхность G на некоторую риманову поверхность F_n над плоскостью w; по основной теореме о сходимости [2] область G_0 отображается функцией $f(z)$ на риманову поверхность Φ_0, содержащую поверхность F' последовательности $\{F_n\}$ и отличающуюся от F' на некоторое множество исключительных изолированных на Φ_0 точек.

Пусть $w_0 \in \Phi_0 \setminus F'$ и $z_0 = \varphi(w_0)$, где $\varphi(w)$ функция, обратная к $f(z)$; точка z_0 по условию изолирована в области G_0 и в некоторой окрестности ее $V(z_0)$ функции $\{f_n(z)\}$ сходятся равномерно. Отсюда следует, что внутри $V(z_0)$ существует окрестность точки z_0, в которой при некотором $M_0 > 0$ всюду или $|f_n(z)| < M_0$, или $|f_n(z)| > M_0$ начиная с некоторого n. Не трудно теперь показать, что w_0 есть правильная точка, обобщенные окрестности которой $\{F_n^{(\lambda)}\}$ при некоторой кривой λ, начиная с какого-то определенного n, либо ограничены, либо расположены вне некоторой ограниченной области на плоскости w.

Присоединяя такие правильные точки к F' — и только их, — мы получим, очевидно, простое ядро F_0 последовательности $\{F_n\}$, которое по предыдущему в точности соответствует, при отображении $f(z)$, области равномерной сходимости G_0, т. е. $\Phi_0 = F_0$.

Почти не изменяя приведенных рассуждений и используя снова основную теорему Л. И. Волковыского, мы получим следующую теорему:

Теорема 5. *Если в областях G_n, расположенных на одной и той же римановой поверхности R над плоскостью z, заданы мероморфные функции $f_n(z)$, отображающие соответствующие G_n на некоторые римановы поверхности F_n над плоскостью w, то для каждой области G_0 их равномерной сходимости с предельной функцией $f(z) \not\equiv \text{const}$ на всех поверхностях F_n, начиная с некоторой, можно зафиксировать общий однолистный круг Q_0 так, что функция $f(z)$ отображает область G_0 на простое ядро F_0 последовательности $\{F_n\}$, однозначно определенное кругом Q_0* (см. [5]).

При этом для сходимости поверхностей $\{F_n\}$ к простому ядру F_0 необходимо и достаточно, чтобы для всякой подпоследовательности $\{f_{n_i}(z)\}$ последовательности *$\{f_n(z)\}$ область их равномерной сходимости совпадала с G_0.*

Из этой теоремы можно вывести, что функции $\varphi_n(w)$, обратные к $f_n(z)$, сходятся равномерно в области $F' \subseteq F_0$. Заметим здесь же, что простое ядро F_0 отличается от поверхности F' на некоторое множество точек ветвления, являющихся правильными, для которых существуют обобщенные окрестности, проективно ограниченные в совокупности; обратно, присоединяя к F' такие правильные точки ветвления, получим простое ядро F_0. Все это не трудно показать и строго.

В случае, когда и F_n расположены на одной римановой поверхности S, применяя теорему 5 к последовательности функций $\{f_n(z)\}$ и им обратных $\{\varphi_n(w)\}$, получим следующий результат:

Теорема 6. *Если в условиях теоремы 5 поверхности F_n расположены на одной и той же римановой поверхности S, то область равномерной сходимости G_0 функций $\{f_n(z)\}$ совпадает с ядром областей $\{G_n\}$ и предельная функция $f(z)$ отображает G_0 на некоторое ядро F_0 областей $F_n \subset S$, являющееся областью равномерной сходимости функций $\{\varphi_n(w)\}$; при этом сходимость областей $\{G_n\}$ к ядру G_0 равносильна сходимости к ядру F_0 областей $\{F_n\}$.*

Дадим теперь геометрическую характеристику и для некоторых иррегулярных точек последовательности мероморфных функций $\{f_n(z)\}$.

Как и в § 2 рассмотрим разрывное множество P иррегулярных точек, граничных к некоторой области их равномерной сходимости G_0.

Возьмем произвольную точку z_0 из P; без ограничения общности дальнейших рассуждений предположим, что z_0 находится в конечной плоскости.

Так как в произвольной окрестности $V(z_0)$ этой точки равномерной сходимости нет, то из последовательности $\{f_n(z)\}$ всегда возможно выбрать подпоследовательность $\{f_{n_i}(z)\}$, каждая подпоследовательность которой не сходится равномерно в точке z_0. Можно сразу показать следующее.

В каждой окрестности точки z_0 уравнения $f_{n_i}(z) = a$, начиная с некоторого n_i, имеют корни для всех значений a, кроме, быть может, двух.

В самом деле, в противном случае выделяется из $\{f_{n_i}(z)\}$ подпоследовательность функций, не принимающих трех значений a', a'' и a''', которая будет, следовательно, нормальной, а это противоречит выбору подпоследовательности $\{f_{n_i}(z)\}$ и $\{f_n(z)\}$.

Покажем, что в произвольной окрестности точки z_0 функции последовательности $\{f_{n_i}(z)\}$, начиная с некоторой, принимает каждое значение a без исключения, в предположении, что предельная функция $f(z) \not\equiv \text{const}$.

Допустим, что для некоторой подпоследовательности $\{f_{\tilde{n}_i}(z)\}$ из $\{f_{n_i}(z)\}$ функции $f_{\tilde{n}_i}(z)$ не принимают каких-либо значений $a_{\tilde{n}_i}$ в некоторой фиксированной окрестности точки z_0. Проведем в этой окрестности жорданову кривую L, лежащую в области G_0 равномерной сходимости и содержащую внутри себя точку z_0; потребуем, чтобы L не проходила ни через один полюс функций $f_{\tilde{n}_i}(z)$ и $f(z)$ и чтобы на L были лишь точки однолистности функции $f(z)$.

Так как на L сходимость функций $\{f_{\tilde{n}_i}(z)\}$ равномерна, то соответствующие ей кривые $\lambda_{\tilde{n}_i} = f_{\tilde{n}_i}(L)$, начиная с некоторого n_i, расположены на поверхности F' и сходятся там равномерно к некоторой ограниченной кривой $\lambda = f(L) \subset F'$. Разрезая F' вдоль λ, мы разобьем ее, очевидно, на две части; выберем внутри кривой L какую-либо точку $z' \in G_0$ и возьмем ту из частей поверхности F', которая содержит образ $f(z')$ точки z'. Эта часть, — обозначим ее через F'_λ, — обладает тем свойством, что каждая ее точка является образом (при отображении $f(z)$) некоторой точки равномерной сходимости, находящейся внутри кривой L.

Внутри F'_λ в достаточной близости от λ возьмем ломаную λ_0, такую, чтобы соответствующие ей при отображениях $\varphi_{\tilde{n}_i}(w)$, обратных к $f_{\tilde{n}_i}(z)$, кривые $l_{\tilde{n}_i}$, начиная с некоторого $\tilde{n}_i$, были расположены внутри L и содержали внутри себя точку z_0. Ясно, что $\varphi_{\tilde{n}_i}(w)$ сходятся равномерно на λ_0. Односвязной области $g_{\tilde{n}_i}$, ограниченной кривой $l_{\tilde{n}_i}$, функция $f_{\tilde{n}_i}(z)$ ставит в соответствие некоторую односвязную и конечнолистную поверхность $F^{(\lambda_0)}_{\tilde{n}_i}$, так как каждая $f_{\tilde{n}_i}(z)$ задана и мероморфна всюду внутри L. В случае, когда z_0 есть точка области обобщенной сходимости, поверхности $\{F^{(\lambda_0)}_{\tilde{n}_i}\}$ образуют систему обобщенных окрестностей точки $w_0 = f(z_0)$ для соответствующей последовательности поверхностей $\{F_{\tilde{n}_i}\}$.

Если функция $f_{\tilde{n}_i}(z)$ не принимает внутри L значения $a_{\tilde{n}_i}$, то она и подавно не принимает его в замкнутой области $g_{\tilde{n}_i}$. Кроме того, очевидно, что существует окрестность $U(z_0)$ точки z_0, общая всем областям $g_{\tilde{n}_i}$.

Проекция ломаной λ_0 на плоскость w разбивает последнюю на конечное число односвязных компонент e_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$. Для всех функций $f_{\tilde{n}_i}(z)$, начиная с некоторого $\tilde{n}_{i_0}$, внутри каждой компоненты e_ν найдется точка, в которую проектируется образ некоторой внутренней точки из соответствующей области $g_{\tilde{n}_i}$.

В самом деле, в противном случае, в силу конечности числа компонент e_ν, нашлась бы подпоследовательность функций $\{f_{\tilde{n}_{i_j}}(z)\}$ из $\{f_{\tilde{n}_i}(z)\}$, не принимающих всех значений из какой-либо компоненты e_ν в соответствующих областях $g_{\tilde{n}_{i_j}}$, а потому и подавно в окрестности $U(z_0)$, в которой эта подпоследовательность, следовательно, оказалась бы нормальной, что противоречиво.

Из предыдущего следует, что все исключительные значения каждой из функций $f_{\tilde{n}_i}(z)$, начиная с $\tilde{n}_i = n_i'$, попадают строго внутрь некоторых компонент e_ν.

Пусть $f_{\tilde{n}_i}(z)$ — произвольная функция при $\tilde{n}_i \geqslant \max(\tilde{n}_{i_0}, \tilde{n}_i')$. Исключительное ее значение $a_{\tilde{n}_i}$ попадает внутрь некоторой компоненты e_ν; внутри последней выберем еще какую-либо точку $w_\nu = f_{\tilde{n}_i}(z_\nu)$, где $z_\nu \in g_{\tilde{n}_i}$.

Соединим w_ν с точкой $a_{\tilde{n}_i}$ простой ломаной γ, лежащей внутри e_ν. Множество точек ломаной γ, содержащее w_ν, имеющих прообразы внутри области $g_{\tilde{n}_i}$, открыто в γ; найдется поэтому первая точка $a' \in \gamma$, не являющаяся значением функции $f_{\tilde{n}_i}(z)$ внутри $g_{\tilde{n}_i}$. Пусть $\{w_n'\}$ есть последовательность точек на γ, сходящихся к a'; точкам w_n' соответствуют в области $g_{\tilde{n}_i}$ некоторые точки z_n'. Никакая предельная точка множества $\{z_n'\}$ не может принадлежать кривой $l_{\tilde{n}_i}$, так как $f_{\tilde{n}_i}(l_{\tilde{n}_i}) = \lambda_0$. Но функция $f_{\tilde{n}_i}(z)$ (обобщенно) непрерывна в области $g_{\tilde{n}_i}$; отсюда легко следует, что значение a' принимается функцией $f_{\bar{n}_i}(z)$ внутри $g_{\bar{n}_i}$, что невозможно.

Следовательно, ни одна из функций $f_{\bar{n}_i}(z)$ при $\bar{n}_i \geqslant \max(\bar{n}_{i_0}, \bar{n}_i')$ не может иметь исключительных значений внутри кривой L, что противоречит принятому допущению.

Итак, доказано следующее свойство:

Существует подпоследовательность $\{f_{n_i}(z)\}$ такая, что в произвольной окрестности $V(z_0)$ точки $z_0 \in P$ все уравнения $f_{n_i}(z) = a$, начиная с некоторого n_{i_0}, имеют корни для всех значений a (причем индекс n_{i_0} зависит только от $V(z_0)$, но не от значения a).

Геометрически это можно выразить так: каждая из поверхностей типа $F_{n_i}^{(\lambda)}$ $(n_i \geqslant n_{i_0})$, — в частности, обобщенная окрестность правильной точки, — имеет, по крайней мере, один „полный" лист.

Если для некоторой правильной точки на $\overline{F}$ при любой кривой λ, внутренней к соответствующей фиксированной, существует подпоследовательность обобщенных окрестностей ее $\{F_{n_i}^{(\lambda)}\}$, каждая из которых содержит, по крайней мере, один „полный" лист, то очевидно, что и обратно, такой точке „соответствует" некоторое — вообще, континуальное — множество иррегулярных точек, расположенное внутри поверхности G.

Итак, для того чтобы некоторая правильная точка w_0 на $\overline{F}$ соответствовала иррегулярным точкам на поверхности G, необходимо и достаточно, чтобы при любой кривой λ, внутренней к λ_{w_0}, нашлась подпоследовательность обобщенных окрестностей ее $\{F_{n_i}^{(\lambda)}\}$, каждая из которых содержит, по крайней мере, один „полный" лист.

Из только что приведенного доказательства следует, что исключительные значения подпоследовательности $\{f_{n_i}(z)\}$ в окрестности иррегулярной точки возможны лишь в случае, когда предельная функция $f(z) \equiv \text{const}$. Но это замечание не обратимо, как показывает пример функций $f_n(z) = \dfrac{1}{2n}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

§ 6. Основная теорема о соответствии

Теорема 7. *Пусть даны произвольная риманова поверхность R, расположенная над плоскостью z, на R — произвольная последовательность областей $\{G_n\}$ и в каждой области G_n — произвольная однозначная мероморфная функция $f_n(z)$, отображающая G_n на некоторую риманову поверхность F_n над плоскостью w. Тогда для всякой области обобщенной сходимости G_A типа (A) последовательности $\{f_n(z)\}$ с предельной функцией $f(z) \not\equiv$ const на каждой из поверхностей F_n, начиная с некоторой, можно зафиксировать общий однолистный круг Q_0 так, что функция $f(z)$ отображает область G_A на ядро F_A типа (A), однозначно определенное кругом Q_0.*

Для сходимости последовательности $\{F_n\}$ к ядру F_A, необходимо и достаточно, чтобы для всякой подпоследовательности $\{f_{n_i}(z)\}$ последовательности $\{f_n(z)\}$ область их обобщенной сходимости, содержащая G_A, с ней совпадала.

Доказательство. Так как свойство (A) конформно-инвариантно и всякая область обобщенной сходимости функций $\{f_n(z)\}$ содержится в полной области $\bar{G}$ обобщенной их сходимости, то теорему достаточно доказать лишь для последней.

Пусть G_0 — область равномерной сходимости функций $f_n(z)$, содержащаяся в $\bar{G}$, и пусть $z_0 \in \bar{G} \setminus G_0$. Функция $f(z)$ мероморфна в области $\bar{G}$ (см. § 2), следовательно, она мероморфна в некоторой окрестности $V(z_0)$ точки z_0.

Внутри $V(z_0)$ проведем замкнутую жорданову кривую ϱ, окружающую точку z_0, расположенную в области G_0 так, что ей при отображении $f(z)$ соответствует жорданова кривая r, расположенная на поверхности F'. Так как ϱ ограничивает односвязную область g мероморфности функции $f(z)$, то соответствующая ей часть поверхности F', ограниченная кривой r, т. е. $F'_{(r)}$, имеет род нуль, и, очевидно, продолжима внутрь, причем ее внутреннее продолжение $\bar{F}_{(r)}$ совпадает с $f(g) \subset \bar{F}$.

Как и в предыдущем параграфе, убедимся, что $f(z)$ отображает точку z_0 в правильную точку на $\bar{F}$, а так как функция $f(z)$ еще и мероморфна, то ясно, что образ $f(\bar{G} \setminus G_0) \subset \bar{F}$ множества $\bar{G} \setminus G_0$ также распадается на порции отделимых частей, являющихся устранимыми множествами, т. е. функция $f(z)$ отображает полную область $\bar{G}$ обобщенной сходимости в полное ядро F последовательности $\{F_n\}$.

Покажем, что и обратно, каждая точка полного ядра $\bar{F}$ есть образ некоторой точки из области $\bar{G}$ при отображении $f(z)$. Очевидно, достаточно доказать это лишь для правильных точек из $\bar{F} \setminus F_0$, где F_0 — простое ядро последовательности $\{F_n\}$, а для этого нужно будет показать, что обратная к $f(z)$ функция $\varphi(w)$ мероморфно продолжима на все множество $\bar{F} \setminus F_0$.

Возьмем произвольную точку $w_0 \in \bar{F} \setminus F_0$. Применяя, в случае необходимости, линейное преобразование, можем предположить, что $w_0 \neq \infty$.

Возьмем какую-либо систему обобщенных окрестностей $\{F_n^{(\lambda)}\}$ этой точки, для которой кривая λ отделяет от $\bar{F} \setminus F_0$ устранимое его подмножество. Прообразами этих окрестностей в R будут некоторые области g_n, ограниченные кривыми $l_n = \varphi_n(\lambda)$. Последовательность функций $\{\varphi_n(w)\}$, обратных к $f_n(z)$, сходится на λ равномерно, поэтому в произвольную окрестность кривой $l = \varphi(\lambda)$ попадут все кривые l_n, начиная с некоторой. Отсюда ясно, что в произвольной ее окрестности можно выбрать кривую l_0 так, чтобы область $g_0 \subset R$, ограниченная ею, располагалась внутри всех g_n, начиная с некоторого n; зафиксируем одну такую кривую l_0. Так как области g_n не имеют граничных точек, кроме точек кривых l_n, то все они равномерно конечнолистны и конечного рода; тем более конечнолистной и конечного рода будет и область g_0, граничные точки которой представлены кривой l_0.

Множество $g_0 \cap G_0$ точек равномерной сходимости, расположенное внутри l_0, отображается функцией $f(z)$ на часть D_0 простого ядра F_0, расположенную внутри кривой $\lambda_0 = f(l_0)$; следовательно, функция $\varphi(w)$ равномерно конечнолистна, пусть p-листна.

В силу конечнолистности и конечности рода области g_0 у нее может быть лишь конечное число точек ветвления, а так как кривая l_0 нигде не плотна на плоскости z, то существует конечный круг K такой, что над ним располагается конечное число полных однолистных кружков области $g_0 : k_1, k_2, \ldots, k_m$.

Определим теперь некоторый круг $K_0 \subset K$ следующим образом: либо над K нет точек области $g_0 \cap G_0$ и тогда K_0 есть круг, концентрический с K и меньшего радиуса, либо такие точки найдутся, — пусть в k_1; в последнем случае возьмем кружок $\bar{k}_1 \subseteq k_1$, принадлежащий области $g_0 \cap G_0$. Тогда, либо над $\bar{k}_1$ нет уже точек области $g_0 \cap G_0$ и тогда K_0 есть круг, концентрический с $\bar{k}_1$ и меньшего радиуса, либо такие точки есть, — пусть в k_2; как и раньше, находим в k_2 кружок $\bar{k}_2 \subseteq k_2$, лежащий над $\bar{k}_1$ и принадлежащий области $g_0 \cap G_0$, и т. д. Не более, чем через p шагов найдем, наконец, круг $K_0 \subset K$ с центром в некоторой точке $z = z'$.

В области D_0 кругу K_0 соответствует не более, чем p односвязных областей $h_1, h_2, \ldots, h_q$ $(q \leqslant p)$, замыкания $\bar{h}_1, \ldots, \bar{h}_q$ которых полностью расположены внутри D_0. Функция $\dfrac{1}{\varphi(w) - z'}$ в области $D_0 \setminus \bigcup\limits_i \bar{h}_i$ ограничена и p-листна, поэтому ее интеграл Дирихле конечен в этой области. Проводя соответствующим образом вспомогательные разрезы внутри области $D_0 \setminus \bigcup\limits_i \bar{h}_i$, разобьем ее на конечное число плоских односвязных компонент, в каждой из которых функция $\dfrac{1}{\varphi(w) - z'}$ аналитична в силу теоремы § 1. Следовательно, эта функция аналитична внутри $D_0 \setminus \bigcup\limits_i \bar{h}_i$, а потому функция $\varphi(w)$ мероморфна всюду внутри кривой λ_0, т. е. в некоторой окрестности точки w_0. Так как точка $w_0 \in \bar{F} \setminus F_0$ была произвольной, то отсюда и следует первое утверждение теоремы.

Второе утверждение теоремы легко получить из первого.

Из частных случаев этой теоремы отметим тот, когда свойство (A) множества есть свойство (e_1) содержать изолированные точки и только их. Соответствующие область обобщенной сходимости G_{e_1} и ядро F_{e_1} типа (e_1) всегда содержатся в области обобщенной сходимости G, соответственно, в ядре F в смысле Л. И. Волковыского, но не всегда здесь имеет место совпадение. Можно показать, что, кроме нулевого типа (см. § 2 и 4), тип (e_1) — единственный, обладающий этим свойством.

Для того чтобы видеть разнообразие возможных частных случаев теоремы, укажем еще на некоторые конформно-инвариантные свойства. Если брать длину множества в сферической метрике и в смысле Каратеодори, то такими свойствами, например, будут: иметь длину нуль; быть положительной длины во всякой своей порции; иметь положительную конечную длину во всякой порции; иметь конечную (не обязательно положительную) длину во всякой порции; быть несчетным в каждой своей порции и длины нуль и т. д.

Выведем из теоремы 7 некоторые следствия.

С л е д с т в и е 1. Если в условиях теоремы 7 области G_n сходятся к ядру G, которое является областью обобщенной сходимости функций

$\{f_n(z)\}$ с предельной функцией $f(z) \not\equiv$ const, то последовательность $\{F_n\}$ сходится к соответствующему ядру F.

Следствие 2. Пусть в условиях теоремы 7 области G_n сходятся к ядру G и функции $\{f_n(z)\}$ образуют в нем нормальное семейство, причем предельные его функции всегда отличны от тождественных постоянных. Тогда, если всякой сходящейся подпоследовательности $\{f_{n_i}(z)\}$ соответствует ядро F поверхностей $\{F_{n_i}\}$, не зависящее от выбора подпоследовательности $\{f_{n_i}(z)\}$, то для равномерной сходимости всей последовательности $\{f_n(z)\}$ в области G достаточно, чтобы функции $f_n(z)$ были подчинены нормирующим условиям, обеспечивающим единственное — а именно, тождественное — отображение ядра G на себя.

В самом деле, если бы последовательность $\{f_n(z)\}$ не сходилась, то в силу ее нормальности можно было бы выделить две равномерно сходящиеся подпоследовательности $\{f_{n_i}(z)\}$ и $\{f_{n_j}(z)\}$ с разными предельными функциями $\bar{f}(z)$ и $\bar{\bar{f}}(z)$, отображающими ядро G на ядро F; но тогда функция $\bar{f}^{-1}[\bar{\bar{f}}(z)]$ отображала бы область G на себя и из указанных выше нормирующих условий вытекало бы, что $\bar{f}^{-1}\bar{\bar{f}}(z) = z$, т. е. $\bar{f}(z) \equiv \bar{\bar{f}}(z)$, что противоречиво.

В силу теоремы 7 в условиях следствия 2 последовательность $\{F_n\}$ сходится к ядру F.

Если в условиях следствий 1 и 2 области G_n совпадают с кругом $|z| < 1$ и для $f_n(z)$ имеем: $f_n(0) = 0$ и $f_n'(0) > 0$, то получаем теоремы Каратеодори [1].

Если же плоские области G_n, содержащие точку $z = 0$, являются произвольными равномерно ограниченными областями, а функции $f_n(z)$ нормированы: $f_n(0) = 0$ и $f_n'(0) > 0$, или $|f_n'(0)| < m < 1$, или $|f_n'(0)| > m > 1$, то придем к результату Бибербаха [6].

Заметим еще, что для всякого конформно-инвариантного свойства (A), не противоречащего свойству устранимости множества, существует последовательность мероморфных функций $\{f_n(z)\}$, область обобщенной сходимости которых имеет тип (A), причем предельная функция $f(z) \not\equiv$ const; следовательно, в силу теоремы 7, существует и последовательность римановых поверхностей $\{F_n\}$ с ядром типа (A). Чтобы убедиться в этом, можно соответствующим образом сгустить особенности для функций $f_n(z) = z + \dfrac{1}{nz}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. Carathéodory, Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten, Math. Ann., 72, 107—144 (1912).

2. Л. И. Волковыский, Сходящиеся последовательности римановых поверхностей, Мат. сб., 23(65), 1948, 361—382.

3. L. Sario, Über Riemannsche Flächen mit hebbarem Rand, Ann. Acad. Sci. Fennicae, A. I., 50, 1948.

4. П. Монтель, Нормальные семейства аналитических функций, М.—Л., 1936

5. Ю. Ю. Трохимчук, К теории последовательностей римановых поверхностей, Украинский мат. журнал, т. IV, № 1, 1952, 49—56.

6. L. Bieberbach, Ueber einen Satz des Herrn Carathéodory, Nachrichten der K. Ges. der Wissensch. zu Göttingen., Math.-phys. Klasse, 1913.

Получена 3. V 1952 г.
Львов.