УДК 512.58

В. В. Любашенко (Ін-т математики НАН України, Київ)

МОДЕЛЬНА СТРУКТУРА НА КАТЕГОРІЯХ, ПОВ'ЯЗАНИХ ІЗ КАТЕГОРІЯМИ КОМПЛЕКСІВ

We prove a Hinich-type theorem on the existence of a model structure on a category related by adjunction to the category of differential graded modules over a graded commutative ring.

Доведено теорему типу теореми Хініча про існування модельної структури на категорії, пов'язаній спряженістю з категорією диференціально-градуйованих модулів над градуйованим комутативним кільцем.

1. Вступ. Хініч [4] довів теорему про існування модельної структури на категорії, пов'язаній спряженістю з категорією комплексів. У цій статті ми наведемо докладне доведення теореми подібного роду. Дві теореми відрізняються щонайменше двома моментами. По-перше, Хініч використовує $\mathbf{dg}$-модулі над (комутативним) кільцем, а ми розглядаємо диференціальні градуйовані модулі над *градуйованим* комутативним кільцем $\Bbbk$. По-друге, у доведенні Хініч вводить певні морфізми, які він називає елементарними тривіальними кофібраціями, і показує, що будь-яка тривіальна кофібрація є ретрактом зліченної композиції елементарних. Ми ж показуємо, що тривіальна кофібрація — це ретракт елементарної тривіальної кофібрації в нашому розумінні.

Ми застосовуємо нашу теорему для доведення, що категорії бі- чи полімодулів над несиметричними операдами мають модельну структуру [5, 6]. Для модулів над операдами модельну структуру побудував Харпер [3] (теорема 1.7). Із моменту виходу статті Хініча [4] з'явилося багато результатів, в яких за даною (моноїдальною) модельною категорією будується модельна структура для іншої категорії, що пов'язана з першою категорією спряженням [1] (пункт 2.5), на категорії моноїдів [9] (теорема 3.1) або на категорії операд [8] (зауваження 2), [7] (теорема 1.1). Зрозуміло, що при такому підході потрібно почати з модельної категорії. Категорія диференціальних (необмежених) градуйованих $\Bbbk^0$-модулів має проективну модельну структуру для комутативного кільця $\Bbbk^0$ [2]. Той же результат для *градуйованого комутативного* кільця $\Bbbk$ має бути виведений із випадку комутативного кільця $\Bbbk^0$ подібно до [1]. Після цього потрібно довести, що $\mathbf{dg}$-$\Bbbk$-mod — це моноїдальна модельна категорія, що вимагає детальної інформації про кофібрації. Така інформація надається, наприклад, доведенням теореми типу Хініча: будь-яка кофібрація — це ретракт зліченної композиції елементарних кофібрацій (конкретного вигляду). Таким чином, при будь-якому підході технічної роботи, мабуть, не уникнути. Ще однією причиною дотримуватися підходу Хініча є педагогічна: він може бути пояснений студентам детально, а також на прикладах.

Позначення та домовленості. У цій статті слово „градуйований" означає „$\mathbb{Z}$-градуйований". Нехай $\Bbbk$ — градуйоване комутативне кільце (оснащене нульовим диференціалом). Через $\mathbf{gr} = \mathbf{gr}_\Bbbk = \mathbf{gr}$-$\Bbbk$-mod позначимо замкнену категорію $\mathbb{Z}$-градуйованих $\Bbbk$-модулів із $\Bbbk$-лінійними гомоморфізмами степеня 0. Таким чином, об'єкт $\mathbf{gr}$ є $X = (X^m)_{m\in\mathbb{Z}}$. Симетрію в моноїдальній категорії градуйованих $\Bbbk$-модулів обрано як $c(x\otimes y) = (-1)^{ml} y\otimes x$ для $x \in X^m$, $y \in Y^l$.

Абелева категорія $\mathbf{dg} = \mathbf{dg}$-$\Bbbk$-mod є замкненою категорією диференціальних $\mathbb{Z}$-градуйованих $\Bbbk$-модулів із ланцюговими $\Bbbk$-лінійними гомоморфізмами. Мономорфізми та епіморфізми

$\mathbf{dg}$ є покомпонентними ін'єкціями та сюр'єкціями. Квазіізоморфізм $M \to N \in \mathbf{dg}$ — це ланцюговий $\Bbbk$-лінійний гомоморфізм, що індукує ізоморфізм у гомологіях. Для $a \in \mathbb{Z}$ функтор зсуву визначається як $[a]\colon \mathbf{dg} \to \mathbf{dg}$, $M \mapsto M[a]$, $M[a]^z = M^{z+a}$. Функтор зсуву поширюється покомпонентно на $\mathbf{dg}^S$ для будь-якої множини S. Позначимо через $\sigma^a : M \to M[a]$ „тотожне відображення" степеня $\deg \sigma^a = -a$. Будемо записувати елементи $M[a]$ як $m\sigma^a$. Якщо $f\colon V \to X$ — однорідне відображення певного степеня, то відображення $f[a]\colon V[a] \to X[a]$ визначається як $f[a] = (-1)^{fa}\sigma^{-a} f \sigma^a$. Зокрема, диференціал $d\colon M \to M$ степеня 1 в $\mathbf{dg}$-модулі M індукує диференціал $d[a] = (-1)^a \sigma^{-a} d \sigma^a : M[a] \to M[a]$ в $M[a]$. Ізоморфізми степеня 0 $\sigma^{-a} \cdot (\sigma^a \otimes 1)\colon (V \otimes W)[a] \to (V[a]) \otimes W$, $(v \otimes w)\sigma^a \mapsto (-1)^{wa} v\sigma^a \otimes w$ та $\sigma^{-a} \cdot (1 \otimes \sigma^a)\colon (V \otimes W)[a] \to V \otimes (W[a])$, $(v \otimes w)\sigma^a \mapsto v \otimes w\sigma^a$, є природно градуйованими. Це означає, що для довільних однорідних відображень $f : V \to X$, $g : W \to Y$ комутують такі квадрати:

$$\begin{tikzcd}
(V[a]) \otimes W \arrow[d, "(f[a])\otimes g"'] & (V \otimes W)[a] \arrow[l, "\sigma^{-a}\cdot(\sigma^a\otimes 1)"', "\sim"] \arrow[r, "\sigma^{-a}\cdot(1\otimes\sigma^a)", "\sim"'] \arrow[d, "(f\otimes g)[a]"'] & V \otimes (W[a]) \arrow[d, "f\otimes(g[a])"] \\
(X[a]) \otimes Y & (X \otimes Y)[a] \arrow[l, "\sigma^{-a}\cdot(\sigma^a\otimes 1)"', "\sim"] \arrow[r, "\sigma^{-a}\cdot(1\otimes\sigma^a)", "\sim"'] & X \otimes (Y[a])
\end{tikzcd} .$$

Власне, другий ізоморфізм є „більш природним", ніж перший, не лише тому, що він не містить знаку, а й тому, що краще відповідає правій системі позначень операторів, прийнятій у цій роботі. Далі ми завжди ототожнюємо $(V \otimes W)[a]$ з $V \otimes (W[a])$ завдяки $\sigma^{-a} \cdot (1 \otimes \sigma^a)$.

Припустимо, що $\alpha\colon M \to N \in \mathbf{dg}$. Позначимо через $\operatorname{Cone}\alpha = (M[1] \oplus N, d_{\text{Cone}}) \in \operatorname{Ob}\mathbf{dg}$ градуйований $\Bbbk$-модуль з диференціалом

$$d_{\text{Cone}} = \begin{pmatrix} d_M[1] & \sigma^{-1}\alpha \\ 0 & d_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma^{-1} d_M \sigma & \sigma^{-1}\alpha \\ 0 & d_N \end{pmatrix}.$$

Наступний результат узагальнює теорему Хініча [4] (пункт 2.2).

Теорема 1.1. *Припустимо, що S — множина, категорія $\mathcal{C}$ є повною і коповною і $F\colon \mathbf{dg}^S \rightleftarrows \mathcal{C} : U$ — спряження. Припустимо, що U зберігає фільтруючі кограниці. Для будь-якого $x \in S$ розглянемо об'єкт $\mathbb{K}_x$ з $\mathbf{dg}^S$, $\mathbb{K}_x(x) = \operatorname{Cone}(\mathrm{id}_\Bbbk)$, $\mathbb{K}_x(y) = 0$ для $y \neq x$. Припустимо, що ланцюгове відображення $U(\mathrm{in}_2)\colon UA \to U(F(\mathbb{K}_x[p]) \sqcup A)$ — квазіізоморфізм для всіх об'єктів A з $\mathcal{C}$ і всіх $x \in S$, $p \in \mathbb{Z}$. Оснастимо $\mathcal{C}$ класами слабких еквівалентів (відповідно фібрацій), що складаються з морфізмів f із $\mathcal{C}$ таких, що Uf — квазіізоморфізм (відповідно епіморфізм). Тоді $\mathcal{C}$ — модельна категорія.*

2. Доведення існування модельної структури. Цей пункт присвячено доведенню теореми 1.1, умови якої ми зараз припускаємо. З доведення випливає теорема Хініча [4] (пункт 2.2) ідеологічно, але не в деталях. Конструкції, використані у доведенні, описують кофібрації та тривіальні кофібрації в $\mathcal{C}$.

Позначимо функтор U також як $-^{\#}$, $UX = X^{\#}$ для $X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ або $X \in \operatorname{Mor}\mathcal{C}$. Нехай $\varepsilon\colon FUA \to A$ — коодиниця спряження і $\eta\colon M \to UFM$ — одиниця спряження. Бієкція спряження задається взаємно оберненими відображеннями

$$(l\colon FM \to A) \longmapsto l^t = \Bigl(M \xrightarrow{\eta} (FM)^{\#} \xrightarrow{l^{\#}} A^{\#}\Bigr),$$

$${}^t x = \Bigl(FM \xrightarrow{Fx} F(A^{\#}) \xrightarrow{\varepsilon} A\Bigr) \longleftarrow\!\!\shortmid (x\colon M \to A^{\#}).$$

Означимо три класи морфізмів у $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{W} = \{f \in \operatorname{Mor}\mathcal{C} \mid \forall\, x \in S\ f^{\#}(x) - \text{квазіізоморфізм}\},$$

$$\mathcal{R}_f = \{f \in \operatorname{Mor}\mathcal{C} \mid \forall\, x \in S\ \forall\, z \in \mathbb{Z}\ f^{\#}(x)^z \text{ є сюр'єктивним}\},$$

$$\mathcal{L}_c = {}^{\perp}\mathcal{R}_{tf} \text{ складається з відображень } f \in \operatorname{Mor}\mathcal{C} \text{ з властивістю лівого підйому}$$

$$\text{щодо всіх морфізмів із } \mathcal{R}_{tf} = \mathcal{W} \cap \mathcal{R}_f.$$

Ми доведемо, що вони є слабкими еквівалентностями, фібраціями та кофібраціями певної модельної структури на $\mathcal{C}$.

Нехай $M \in \operatorname{Ob}\mathbf{dg}^S$, $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, $\alpha\colon M \to A^{\#} \in \mathbf{dg}^S$. Позначимо через $C = \operatorname{Cone}\alpha = (M[1] \oplus UA, d_{\mathrm{Cone}}) \in \operatorname{Ob}\mathbf{dg}^S$ конус, взятий точково, тобто для будь-якого $x \in S$ комплекс $C(x) = \operatorname{Cone}\big(\alpha(x)\colon M(x) \to (UA)(x)\big)$ — звичайний конус. Позначимо через $\bar{\imath} = \mathrm{in}_2 : UA \to C$ очевидне вкладення. Наслідуючи Хініча [4] (підпункт 2.2.2), означимо об'єкт $A\langle M, \alpha\rangle \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ як виштовхування

$$\begin{tikzcd} FU(A) \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "F\bar{\imath}"'] & A \arrow[d, "\bar{\jmath}"] \\ FC \arrow[r, "g"] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner", very near end] & A\langle M, \alpha\rangle. \end{tikzcd}$$

Введемо функтор $h_{A,\alpha}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{S}\mathrm{et}$:

$$h_{A,\alpha}(B) = \big\{(f,t) \in \mathcal{C}(A,B) \times \underline{\mathbf{dg}}^S(M, B^{\#})^{-1} \mid (t)d \equiv td_{B^{\#}} + d_M t = \big(M \xrightarrow{\alpha} A^{\#} \xrightarrow{f^{\#}} B^{\#}\big)\big\}.$$

Лема 2.1. *Об'єкт $D = A\langle M, \alpha\rangle$ і елемент $(\bar{\jmath}, \theta) \in h_{A,\alpha}(D)$ представляють функтор $h_{A,\alpha}$, де*

$$\theta = \big(M \xrightarrow{\sigma} M[1] \xrightarrow{\mathrm{in}_1} C \xrightarrow{\eta} UFC \xrightarrow{Ug} UD\big),$$

тобто природне по B перетворення $\psi_B : \mathcal{C}(D,B) \to h_{A,\alpha}(B)$, $1_D \mapsto (\bar{\jmath}, \theta)$, є бієктивним.

Доведення. Межею відображення $h = \big(M \xrightarrow{\sigma} M[1] \xrightarrow{\mathrm{in}_1} C\big)$ степеня -1 є $(h)d = hd_C + d_M h = \alpha \cdot \bar{\imath}$. Тому $(\theta)d$ — композиція вздовж нижнього шляху на діаграмі

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\alpha"] & UA \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\bar{\imath}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & UFUA \arrow[r, "U\varepsilon"] \arrow[d, "UF\bar{\imath}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & UA \arrow[d, "U\bar{\jmath}"] \\ & C \arrow[r, "\eta"] & UFC \arrow[r, "Ug"] & UD\ , \end{tikzcd}$$

що дорівнює верхньому шляху, тобто $\alpha \cdot U\bar{\jmath}$. Тому $(\bar{\jmath}, \theta) \in h_{A,\alpha}(D)$. За лемою Йонеди природне перетворення ψ_B переводить морфізм $k : D \to B$ з $\mathcal{C}$ в

$$h_{A,\alpha}(k)(\bar{\jmath},\theta) = \Big(A \xrightarrow{\bar{\jmath}} D \xrightarrow{k} B, M \xrightarrow{h} C \xrightarrow{\eta} (FC)^{\#} \xrightarrow{g^{\#}} D^{\#} \xrightarrow{k^{\#}} B^{\#}\Big). \tag{2.1}$$

Доведемо ін'єктивність ψ_B. Нехай $k_1, k_2 : D \to B$ задовольняє співвідношення

$$(f_1, t_1) \equiv h_{A,\alpha}(k_1)(\bar{\jmath},\theta) = h_{A,\alpha}(k_2)(\bar{\jmath},\theta) \equiv (f_2, t_2).$$

Тоді

$$\big(M[1] \xrightarrow{\mathrm{in}_1} C \xrightarrow{\eta} (FC)^\# \xrightarrow{g^\#} D^\# \xrightarrow{k_p^\#} B^\#\big) = \sigma^{-1}t_p$$

не залежить від $p = 1, 2$. На іншому доданку C

$$\Big(A^\# \xrightarrow{\bar\imath} C \xrightarrow{\eta} (FC)^\# \xrightarrow{g^\#} D^\# \xrightarrow{k_p^\#} B^\#\Big) = \Big(A^\# \xrightarrow{\bar\jmath^\#} D^\# \xrightarrow{k_p^\#} B^\#\Big) = f_p^\#$$

також не залежить від $p = 1, 2$. Тому

$$l_p^t = \Big(C \xrightarrow{\eta} (FC)^\# \xrightarrow{g^\#} D^\# \xrightarrow{k_p^\#} B^\#\Big)$$

також не залежить від $p = 1, 2$. Їхні спряжені $l_p = \big(FC \xrightarrow{g} D \xrightarrow{k_p} B\big)$ так само не повинні залежати від p. За припущенням

$$\big(A \xrightarrow{\bar\jmath} D \xrightarrow{k_1} B\big) = f_1 = f_2 = \big(A \xrightarrow{\bar\jmath} D \xrightarrow{k_2} B\big).$$

Властивість виштовхування для D допускає лише один морфізм $D \to B$ з такими властивостями, отже, $k_1 = k_2$.

Доведемо сюр'єктивність ψ_B. По даному елементу $(f : A \to B, t : M \to B^\#) \in h_{A,\alpha}(B)$ ми будуємо відображення $x : C \to B^\#$ степеня 0

$$x = \begin{pmatrix} M[1] \xrightarrow{\sigma^{-1}} M \xrightarrow{t} B^\# \\ A^\# \xrightarrow{f^\#} B^\# \end{pmatrix}.$$

Легко перевірити, що x — ланцюгове відображення, $x \in \mathbf{dg}^S$. Його спряження позначено так:

$$l = {}^t x = \Big(FC \xrightarrow{Fx} F(B^\#) \xrightarrow{\varepsilon} B\Big).$$

Оскільки $\bar\imath \cdot x = f^\# : A^\# \to B^\#$, маємо

$$F\bar\imath \cdot l = \Big(F(A^\#) \xrightarrow{F(f^\#)} F(B^\#) \xrightarrow{\varepsilon} B\Big) = \varepsilon \cdot f.$$

За визначенням виштовхування D існує єдиний морфізм $k : D \to B \in \mathcal{C}$ такий, що $f = \bar\jmath \cdot k$, $l = g \cdot k$. Отже,

$$x = l^t = \Big(C \xrightarrow{\eta} (FC)^\# \xrightarrow{l^\#} B^\#\Big),$$

$$t = \Big(M \xrightarrow{\sigma} M[1] \xrightarrow{\mathrm{in}_1} C \xrightarrow{x} B^\#\Big) = \Big(M \xrightarrow{\sigma} M[1] \xrightarrow{\mathrm{in}_1} C \xrightarrow{\eta} (FC)^\# \xrightarrow{g^\#} D^\# \xrightarrow{k^\#} B^\#\Big).$$

Тому $\psi_B(k) = (f, t)$ і ψ_B є бієктивним.

Лему 2.1 доведено.

***Наслідок* 2.1.** *Відображення* $\big(M \xrightarrow{\alpha} A^\# \xrightarrow{\bar\jmath^\#} A\langle M, \alpha\rangle^\#\big) = (\theta)d$ *гомотопне нулю. Якщо* $d_M = 0$, *то для будь-якого циклу* $m \in ZM$ *цикл* $m\alpha \in ZA^\#$ *переводиться відображенням* $\bar\jmath^\#$ *до межі елемента* $m\theta \in A\langle M, \alpha\rangle^\#$.

Таким чином, якщо $F\colon \mathbf{dg}^S \to \mathcal{C}$ є функтором побудови вільної $\mathbf{dg}$-алгебри якогось типу, відображення $\bar{\jmath}$ інтерпретуються як „додавання змінних для знищення циклів".

Наступне твердження є відомим.

Лема 2.2. *Припустимо, що* $g\colon U \to V \in \mathsf{C}_\Bbbk$ *— сюр'єктивний квазіізоморфізм. Тоді для будь-якої пари* (u, v), $u \in U^{n+1}$, $v \in V^n$, *такої, що* $ud = 0$, $ug = vd$, *існує елемент* $w \in U^n$ *такий, що* $wd = u$, $wg = v$.

Доведення. З перетворення на нуль $H^{n+1}(g)[u] = [gu] = 0$ випливає перетворення на нуль класу когомологій $[u] = 0$. Існує $y \in U^n$ такий, що $yd = u$. Позначимо $c = yg \in V^n$, тоді

$$cd = ygd = ydg = ug = vd.$$

Отже, $c - v$ є циклом, і існує цикл $z \in Z^n U$ такий, що $[zg] = [c - v]$. Існує $e \in V^{n-1}$ такий, що $zg = c - v + ed$. Елемент e підіймається до $x \in U^{n-1}$ такого, що $xg = e$. Таким чином,

$$yg = c = zg - xgd + v = (z - xd)g + v.$$

Тому $w = y - z + xd$ задовольняє $wg = v$ і $wd = u$.

Лему 2.2 доведено.

Ми говоримо, що M складається з вільних $\Bbbk$-модулів, якщо для будь-якого $x \in S$ градуйований $\Bbbk$-модуль $M(x)$ вільний, тобто ізоморфний $\oplus_{a\in\mathbb{Z}} P^a \Bbbk[a]$ для деякої градуйованої множини P і $d_M = 0$.

Твердження 2.1. *Нехай* M *складається з вільних* $\Bbbk$*-модулів,* $d_M = 0$, $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ *і* $\alpha\colon M \to A^\# \in \mathbf{dg}^S$. *Тоді* $\bar{\jmath}\colon A \to A\langle M, \alpha\rangle \in \mathcal{L}_c$.

Доведення. Нехай образ $y^\#$ морфізму $y\colon U \to V \in \mathcal{C}$ є епіморфізмом і квазіізоморфізмом. Нехай $u\colon A \to U \in \mathcal{C}$. Морфізми $v\colon A\langle M, \alpha\rangle \to V$, які роблять квадрат

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\bar{\jmath}"'] & U \arrow[d, two heads, "y", "\wr"'] \\ A\langle M, \alpha\rangle \arrow[r, "v"] \arrow[ur, dashed, "w"] & V \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

комутативним, перебувають у бієкції з елементами $\left(A \xrightarrow{u} U \xrightarrow{y} V, M \xrightarrow{t} V^\#\right) \in h_{A,\alpha}(V)$. Таким чином,

$$(t)d = d_M t + t d_{V^\#} = \left(M \xrightarrow{\alpha} A^\# \xrightarrow{u^\#} U^\# \xrightarrow{y^\#} V^\#\right).$$

Для деякої градуйованої множини $P = (P^a(s) \mid a \in \mathbb{Z},\, s \in S)$, $P^a(s) \in \mathcal{S}\mathrm{et}$, маємо $M = P\Bbbk = \left(\oplus_{a\in\mathbb{Z}} P^a(s)\Bbbk[a]\right)_{s\in S}$. Позначимо обрану базу M через $(e_p)_{p\in P^\bullet(\bullet)}$, $\deg e_p = \deg p$. Для довільного $p \in P^a(s)$ позначимо $n = a - 1$. Маємо цикл $e_p \alpha u^\# \in Z^{n+1}(U^\#)$ і елемент $e_p t \in (V^\#)^n$ такий, що $(e_p \alpha u^\#) y^\# = (e_p t) d_{V^\#}$. Завдяки лемі 2.2 існує елемент, позначений $(e_p r) \in (U^\#)^n$, такий, що $e_p \alpha u^\# = (e_p r) d_{U^\#}$ і $e_p t = (e_p r) y^\#$. Вибираючи такий $e_p r$ для всіх $p \in P^\bullet(\bullet)$, отримуємо відображення $r \in \underline{\mathbf{dg}}^S(M, U^\#)^{-1}$ таке, що комутують трикутники

$$\begin{tikzcd} A^\# \arrow[r, "u^\#"] & U^\# \\ M \arrow[u, "\alpha"] \arrow[ur, "(r)d"'] & \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} & U^\# \arrow[d, "y^\#"] \\ M \arrow[ur, "r"] \arrow[r, "t"] & V^\# \end{tikzcd}.$$

Таким чином, пара $(u\colon A \to U, r\colon M \to U^{\#}) \in h_{A,\alpha}(U)$ визначає морфізм $w\colon A\langle M,\alpha\rangle \to U \in$ $\in \mathcal{C}$ за лемою 2.1. Завдяки (2.1) виконано рівність

$$u = \big(A \xrightarrow{\bar{\jmath}} A\langle M,\alpha\rangle \xrightarrow{w} U\big).$$

Природність бієкції ψ,

$$\begin{tikzcd} h_{A,\alpha}(U) \arrow[r, "\psi_U", "\sim"'] \arrow[d, "h_{A,\alpha}(U)"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathcal{C}(A\langle M,\alpha\rangle, U) \arrow[d, "\mathcal{C}(1,y)"] \\ h_{A,\alpha}(V) \arrow[r, "\psi_V", "\sim"'] & \mathcal{C}(A\langle M,\alpha\rangle, V)\,, \end{tikzcd}$$

застосовується до пари (u,r) і дає

$$\begin{tikzcd} (u\colon A \to U, r\colon M \to U^{\#}) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto, "(-\cdot y, -\cdot y^{\#})"'] \arrow[dr, phantom, "="] & w \arrow[d, mapsto, "-\cdot y"] \\ (uy\colon A \to V, ry^{\#}: M \to V^{\#}) = (\bar{\jmath}v, t) \arrow[r, mapsto] & v = wy. \end{tikzcd}$$

Звідси отримуємо ще одне рівняння

$$v = \big(A\langle M,\alpha\rangle \xrightarrow{w} U \xrightarrow{y} V\big),$$

і w — шуканий діагональний наповнювач для (2.2).

Твердження 2.1 доведено.

Якщо M складається з вільних $\Bbbk$-модулів, (і $d_M = 0$), то $\bar{\jmath}\colon A \to A\langle M,\alpha\rangle$ — кофібрація. Її можна назвати *елементарною стандартною кофібрацією*. Якщо

$$A \to A_1 \to A_2 \to \ldots$$

— послідовність елементарних стандартних кофібрацій, B — кограниця цієї діаграми, то відображення „нескінченної композиції" $A \to B$ є кофібрацією, що називається *стандартною кофібрацією* [4] (підпункт 2.2.3).

Лема 2.3. *Нехай $\alpha \sim \alpha' : M \to A^{\#}$. Тоді є природна по B бієкція $h_{A,\alpha}(B) \simeq h_{A,\alpha'}(B)$. Отже, виникає ізоморфізм k зображуючих об'єктів, що є останньою стрілкою в рівнянні, яке виконано в $\mathcal{C}$:*

$$\bar{\jmath}' = \Big(A \xrightarrow{\bar{\jmath}} A\langle M,\alpha\rangle \underset{\sim}{\xrightarrow{k}} A\langle M,\alpha'\rangle\Big).$$

Доведення. Нехай $h \in \underline{\mathbf{dg}}^S(M, A^{\#})^{-1}$ — гомотопія, $\alpha - \alpha' = hd + dh\colon M \to A^{\#}$. Тоді маємо визначені відображення

$$\begin{tikzcd} h_{A,\alpha}(B) = \big\{(f: A \to B, t\colon M \to B^{\#}) \mid (t)d = \alpha f^{\#}\big\} \\[-10pt] (f,t) \arrow[d, mapsto] & (f, q + hf^{\#}) \\ (f, t - hf^{\#}) & (f,q) \arrow[u, mapsto] \\[-10pt] h_{A,\alpha'}(B) = \big\{(f: A \to B, q\colon M \to B^{\#}) \mid (q)d = \alpha' f^{\#}\big\}, \end{tikzcd}$$

оскільки

$$(t - hf^{\#})d = \alpha f^{\#} - (\alpha - \alpha')f^{\#} = \alpha' f^{\#},$$

$$(q + hf^{\#})d = \alpha' f^{\#} + (\alpha - \alpha')f^{\#} = \alpha f^{\#}.$$

Ці відображення взаємно обернені та природні по B.

Візьмемо $B = A\langle M, \alpha'\rangle$. Існує комутативний квадрат бієкцій

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(A\langle M,\alpha'\rangle, A\langle M,\alpha'\rangle) \arrow[r, "\mathcal{C}(k,1)", "\sim"'] \arrow[d, "\psi"', "\wr"] & \mathcal{C}(A\langle M,\alpha\rangle, A\langle M,\alpha'\rangle) \arrow[d, "\wr"', "\psi"] \\ h_{A,\alpha'}(A\langle M,\alpha'\rangle) \arrow[r, "\sim"] & h_{A,\alpha}(A\langle M,\alpha'\rangle), \end{tikzcd}$$

що дає рівняння

$$\begin{tikzcd} 1_B \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & k \arrow[d, mapsto] \\ (\bar{\jmath}', t') \arrow[r, mapsto] & (\bar{\jmath}', t' + h\bar{\jmath}'^{\#}) = (\bar{\jmath}k, tk^{\#}). \end{tikzcd}$$

Зокрема, $\bar{\jmath}' = \bar{\jmath}k$.

Лему 2.3 доведено.

***Зауваження* 2.1.** Розглянемо діаграму $\alpha' = \big(M' \xrightarrow{\beta} M'' \xrightarrow{\alpha''} A^{\#}\big)$ в $\mathbf{dg}^S$. Ці морфізми приводять до природного перетворення $h_{A,\alpha''}(B) \to h_{A,\alpha'}(B)$, $(f,t) \mapsto (f, \beta\cdot t)$, або рівнозначно $\mathcal{C}(A\langle M'',\alpha''\rangle, B) \to \mathcal{C}(A\langle M',\alpha'\rangle, B)$, що походить від єдиного морфізму $A\langle\beta\rangle :$ $A\langle M', \beta\cdot\alpha''\rangle \to A\langle M'',\alpha''\rangle \in \mathcal{C}$. Це можна знайти з діаграми

$$\begin{tikzcd} & F(A^{\#}) \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "F\bar{\imath}'"] \arrow[dl, "F\bar{\imath}''"'] & A \arrow[d, "\bar{\jmath}'"'] \arrow[dr, "\bar{\jmath}''"] & \\ & F(C') \arrow[r, "g'"] \arrow[dl, "F\gamma"] \arrow[r, phantom, "\ulcorner"] & A\langle M',\alpha'\rangle \arrow[dr, "A\langle\beta\rangle"'] & \\ F(C'') \arrow[rrr, "g''"] & & & A\langle M'',\alpha''\rangle, \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

де $\gamma = \mathrm{Cone}(\beta, 1) : C' \to C''$ — морфізм конусів, індукований β.

Справді, покладемо $B = A\langle M'',\alpha''\rangle$. Одиничний морфізм 1_B відповідає $(\bar{\jmath}'', \theta'') \in h_{A,\alpha''}(B)$, який переходить у $(\bar{\jmath}'', \beta\cdot\theta'') \in h_{A,\alpha'}(B)$. Останній елемент повинен збігатися з $(\bar{\jmath}'\cdot A\langle\beta\rangle,$ $\theta'\cdot A\langle\beta\rangle^{\#})$. Рівняння $\bar{\jmath}'' = \bar{\jmath}'\cdot A\langle\beta\rangle$ — це правий трикутник діаграми (2.3). Рівняння $\beta\cdot\theta'' =$ $= \theta'\cdot A\langle\beta\rangle^{\#}$ можна записати як зовнішність діаграми

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\beta"'] & M'[1] \arrow[r, "\mathrm{in}_1"] & C' \arrow[r, "g'^t"] \arrow[d, "\gamma"'] & D'^{\#} \arrow[d, "A\langle\beta\rangle^{\#}"] \\ M'' \arrow[r, "\sigma"] & M''[1] \arrow[r, "\mathrm{in}_1"] & C'' \arrow[r, "g''^t"] & D''^{\#} \end{tikzcd} .$$

Зі згаданого правого трикутника випливає комутативність зовнішності

$$\begin{tikzcd}
A^{\#} \arrow[r, "\bar\imath'"] \arrow[d, equal] & C' \arrow[r, "g'^{t}"] \arrow[d, "\gamma"'] & D'^{\#} \arrow[d, "A\langle\beta\rangle^{\#}"] \\
A^{\#} \arrow[r, "\bar\imath''"] & C'' \arrow[r, "g''^{t}"] & D''^{\#}
\end{tikzcd} .$$

З цих фактів випливає комутативність правого квадрата, що еквівалентно нижній трапеції в (2.3).

Зокрема, для $0 = \big(0 \xrightarrow{0} M \xrightarrow{\alpha} A^{\#}\big)$ маємо $\bar\imath' = \mathrm{id}\colon A^{\#} \to C'$, $\bar\jmath' = \mathrm{id}\colon A \to A\langle 0,0\rangle$, $\bar\jmath'' = \bar\jmath = A\langle 0\rangle : A = A\langle 0,0\rangle \to A\langle M,\alpha\rangle$.

***Зауваження* 2.2.** Для $0\colon M \to A^{\#}$ маємо $A\langle M,0\rangle \simeq F(M[1]) \sqcup A$, і $\bar\jmath = \mathrm{in}_2$ є канонічним вкладенням. Справді, $C = M[1] \oplus A^{\#}$ — пряма сума комплексів, а $A\langle M,0\rangle$ знаходимо з діаграми

$$\begin{tikzcd}
F(A^{\#}) \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[d, "F(\mathrm{in}_2)"'] \arrow[dr, "\mathrm{in}_2"] & & A \arrow[d, "\mathrm{in}_2"] \\
F(M[1] \sqcup A^{\#}) \arrow[r, "\sim"] & F(M[1]) \sqcup F(A^{\#}) \arrow[r, "1\sqcup\varepsilon"] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner", very near end] & F(M[1]) \sqcup A = A\langle M,0\rangle .
\end{tikzcd}$$

***Приклад* 2.1.** Нехай $N \in \operatorname{Ob}\mathbf{dg}^S$. Візьмемо FN за A і $\eta\colon N \to (FN)^{\#}$ за α. Ми стверджуємо, що можемо взяти $F(\operatorname{Cone} 1_N)$ за $(FN)\langle N,\eta\rangle$. Справді,

$$h_{FN,\eta}(B) = \big\{(f : FN \to B, t\colon N \to B^{\#}) \mid (t)d = \eta \cdot f^{\#}\big\} = \big\{(f,t) \mid (t)d = f^{t}\big\} =$$

$$= \big\{(f,t) \mid f = {}^{t}((t)d)\big\} = \big\{t \in \underline{\mathbf{dg}}^S(N, B^{\#})^{-1}\big\} \simeq \underline{\mathbf{dg}}^S(N[1], B^{\#})^{0} \overset{(!)}{\simeq}$$

$$\overset{(!)}{\simeq} \mathbf{dg}^S\big((N[1] \oplus N, d_{\operatorname{Cone} 1_N}), B^{\#}\big) = \mathbf{dg}^S(\operatorname{Cone} 1_N, B^{\#}) \simeq \mathcal{C}(F(\operatorname{Cone} 1_N), B).$$

Бієкцію (!) залишаємо читачеві як вправу.

Твердження 2.2. *Нехай* $N = P\Bbbk \in \mathbf{dg}^S$ *складається з вільних* $\Bbbk$*-модулів*, $d_N = 0$ *та* $M = \operatorname{Cone} 1_{N[-1]} = (N \oplus N[-1], d_{\mathrm{Cone}})$. *Тоді для будь-якого морфізму* $\alpha\colon M \to UA \in \mathbf{dg}^S$ *морфізм* $\bar\jmath\colon A \to A\langle M,\alpha\rangle$ — *це стандартна кофібрація, композиція двох елементарних стандартних кофібрацій.*

Доведення. Комплекс M є стягуваним, отже, $\alpha \sim 0 = \alpha'\colon M \to A^{\#}$. Застосовуючи лему 2.3, знаходимо, що $\bar\jmath = \big(A \xrightarrow{A\langle 0\rangle} A\langle M,0\rangle \xrightarrow{\sim} A\langle M,\alpha\rangle\big)$, тому достатньо довести твердження для $\alpha = 0$.

Вкладення $\mathrm{in}_2 : N[-1] \to M$ індукує діаграму

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\bar\jmath'"] \arrow[dr, "\bar\jmath''"'] & A\langle N[-1],0\rangle \arrow[r, equal] \arrow[d, "A\langle \mathrm{in}_2\rangle"] & A\langle N[-1],0\rangle\langle 0,0\rangle \arrow[d, "A\langle N[-1],0\rangle\langle 0\rangle"] \\
& A\langle M,0\rangle \arrow[r, "\sim"] & A\langle N[-1],0\rangle\langle N,\eta\rangle
\end{tikzcd} .$$

Комутативність трикутника міститься в діаграмі (2.3). Комутативність квадрата випливає із зауваження 2.2, яке дає $A\langle N[-1],0\rangle = FN \sqcup A$, і з рівняння

$$\begin{tikzcd}
FN \arrow[r, equal] \arrow[d, "F(\mathrm{in}_2)"'] \arrow[dr, phantom, "="] & (FN)\langle 0,0\rangle \arrow[d, "(FN)\langle 0\rangle"] \\
F(\operatorname{Cone} 1_N) \arrow[r, equal] & (FN)\langle N,\eta\rangle .
\end{tikzcd}$$

Останнє рівняння випливає з прикладу 2.1. Візьмемо в ньому $B = F(\mathrm{Cone}\,1_N)$ і знайдемо елемент $h_{FN,\eta}(F(\mathrm{Cone}\,1_N))$, який переходить в 1_B при послідовності бієкцій, розглянутих у прикладі. Рухаючись назад, знаходимо елементи

$$1_B \mapsto \langle \eta\colon \mathrm{Cone}\,1_N \to (F\,\mathrm{Cone}\,1_N)^\#\rangle \mapsto \left\langle N[1] \xrightarrow{\mathrm{in}_1} \mathrm{Cone}\,1_N \xrightarrow{\eta} (F\,\mathrm{Cone}\,1_N)^\#\right\rangle \mapsto$$
$$\mapsto t = \left\langle N \xrightarrow{\sigma} N[1] \xrightarrow{\mathrm{in}_1} \mathrm{Cone}\,1_N \xrightarrow{\eta} (F\,\mathrm{Cone}\,1_N)^\#\right\rangle \in \underline{\mathbf{dg}}^S(N, B^\#)^{-1}.$$

Виконуючи обчислення у доведенні леми 2.1, отримуємо

$$(t)\cdot d = \left\langle N \xrightarrow{\mathrm{in}_2} \mathrm{Cone}\,1_N \xrightarrow{\eta} (F\,\mathrm{Cone}\,1_N)^\#\right\rangle = \left\langle N \xrightarrow{\eta} (FN)^\# \xrightarrow{(F\,\mathrm{in}_2)^\#} (F\,\mathrm{Cone}\,1_N)^\#\right\rangle,$$

звідки t приходить з пари $(F(\mathrm{in}_2), t) \in h_{FN,\eta}(F(\mathrm{Cone}\,1_N))$. Таким чином, морфізм $\bar{\jmath}''\colon A \to$ $\to A\langle M, 0\rangle$ являє собою композицію двох елементарних стандартних кофібрацій і сам є стандартною кофібрацією.

Твердження 2.2 доведено.

Твердження 2.3. *Нехай $r\colon A \to Y \in \mathcal{C}$. Позначимо через*

$$N = Z\,\mathrm{Cone}(r^\#[-1]\colon A^\#[-1] \to Y^\#[-1]) =$$
$$= \left\{(u, y\sigma^{-1}) \in A^\# \times Y^\#[-1] \mid ud = 0,\ ur^\# - yd_{Y^\#} = 0\right\}$$

диференціально градуйований $\Bbbk$-підмодуль циклів комплексу $\mathrm{Cone}(r^\#[-1])$, $d_N = 0$. Позначимо через $\mathrm{pr}_1 : N \to A^\# \in \mathbf{dg}^S$ (відповідно $\mathrm{pr}_2 : N \to Y^\#[-1] \in \mathbf{gr}^S$) відображення $(u, y\sigma^{-1}) \mapsto$ $\mapsto u$ (відповідно $(u, y\sigma^{-1}) \mapsto y\sigma^{-1}$). Позначимо $D = A\langle N, \mathrm{pr}_1\rangle$. Тоді

$$\left(r\colon A \to Y, t = (N \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} Y^\#[-1] \xrightarrow{\sigma} Y^\#)\right)$$

є елементом $h_{A,\mathrm{pr}_1}(Y)$. Відповідний морфізм $q\colon D \to Y$ задовольняє $r = \Big(A \xrightarrow{\bar{\jmath}} A\langle N, \mathrm{pr}_1\rangle \xrightarrow{q}$ $\xrightarrow{q} Y\Big)$. Композиція

$$\beta = \left\langle N \hookrightarrow \mathrm{Cone}(r^\#[-1]) \xrightarrow{\mathrm{Cone}(\bar{\jmath}^\#[-1],1)} \mathrm{Cone}(q^\#[-1])\right\rangle, \qquad \mathrm{Cone}(\bar{\jmath}^\#[-1], 1) = \begin{pmatrix} \bar{\jmath}^\# & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

гомотопна нулю, $\beta = (\theta, 0)\cdot d = (\theta, 0)\cdot d_{\mathrm{Cone}(q^\#[-1])}$, таким чином, всі цикли $\mathrm{Cone}(r^\#[-1])$ переводяться $\mathrm{Cone}(\bar{\jmath}^\#[-1], 1_{Y^\#[-1]})$ до меж в $\mathrm{Cone}(q^\#[-1])$.

Доведення. Покажемо, що $(r, t) \in h_{A,\mathrm{pr}_1}(Y)$. Справді, діаграма

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & Y^\#[-1] \arrow[r, "\sigma"] & Y^\# \arrow[d, "d_{Y^\#}"] \\ A^\# \arrow[rr, "r^\#"] & & Y^\# \end{tikzcd}$$

комутує, як показує обчислення,

$$
\begin{tikzcd}
(u, y\sigma^{-1}) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & y\sigma^{-1} \arrow[r, mapsto] & y \arrow[d, mapsto] \\
u \arrow[r, mapsto] & ur^{\#} \arrow[r, equal] & yd_{Y^{\#}}.
\end{tikzcd}
$$

Відповідний морфізм $q\colon D \to Y$ задовольняє $(r,t) = \left(\bar{\jmath}\cdot q, N \xrightarrow{\theta} D^{\#} \xrightarrow{q^{\#}} Y^{\#}\right)$ завдяки (2.1).

Можна легко перевірити, що конуси пов'язані ланцюговим відображенням

$$
\operatorname{Cone}(\bar{\jmath}^{\#}[-1], 1_{Y^{\#}[-1]}) = \begin{pmatrix} \bar{\jmath}^{\#} & 0 \\ 0 & 1_{Y^{\#}[-1]} \end{pmatrix} \colon \operatorname{Cone}((\bar{\jmath}^{\#} q^{\#})[-1]) \to \operatorname{Cone}(q^{\#}[-1]).
$$

Композиція β переводить $(u, y\sigma^{-1}) \in N$ до $(u\bar{\jmath}^{\#}, y\sigma^{-1}) \in \operatorname{Cone}(q^{\#}[-1])$. Оскільки $d_N = 0$, відображення

$$
(\theta, 0)\cdot d = (\theta, 0)\begin{pmatrix} d_{D^{\#}} & q^{\#}\sigma^{-1} \\ 0 & d_{Y^{\#}[-1]} \end{pmatrix} = (\mathrm{pr}_1 \cdot \bar{\jmath}^{\#}, \theta q^{\#}\sigma^{-1}) = (\mathrm{pr}_1 \cdot \bar{\jmath}^{\#}, t\sigma^{-1}) = (\mathrm{pr}_1 \cdot \bar{\jmath}^{\#}, \mathrm{pr}_2)
$$

переводить $(u, y\sigma^{-1})$ до того ж $(u\bar{\jmath}^{\#}, y\sigma^{-1})$, що й β.

Твердження 2.3 доведено.

Припустимо, що умови теореми 1.1 виконано.

Твердження 2.4. *Нехай $N = P\Bbbk \in \mathbf{dg}^S$ складається з вільних $\Bbbk$-модулів, $d_N = 0$ та $M = \operatorname{Cone} 1_{N[-1]}$. Тоді для всіх $\alpha\colon M \to A^{\#} \in \mathbf{dg}^S$ морфізм $\bar{\jmath}\colon A \to A\langle M, \alpha\rangle$ належить $\mathcal{W}$.*

Доведення. Комплекс M є стягуваним, отже, досить припустити, що $\alpha = 0$. Розглянемо спрямовану множину скінченних градуйованих підмножин $Q \subset P$ (тобто множина $\bigsqcup_{c\in\mathbb{Z}}^{x\in S} Q^c(x)$ є скінченною). Маємо

$$
M[1] = P\mathbb{K}[1] = \bigoplus_{c\in\mathbb{Z}}^{x\in S} P^c(x)\mathbb{K}_x[c+1] = \operatorname*{colim}_{Q\subset P} \coprod_{x\in S,\, c\in\mathbb{Z}}^{q\in Q^c(x)} \mathbb{K}_x[c+1],
$$

$$
\bar{\jmath}^{\#} = \mathrm{in}_2^{\#} = \left\langle A^{\#} \to (F(M[1]) \textstyle\coprod A)^{\#}\right\rangle =
$$

$$
= \left\langle A^{\#} \to \left(\operatorname*{colim}_{Q\subset P}\left(\coprod_{x\in S,\, c\in\mathbb{Z}}^{q\in Q^c(x)} F(\mathbb{K}_x[c+1])\right)\coprod A\right)^{\#}\right\rangle =
$$

$$
= \left\langle A^{\#} \to \operatorname*{colim}_{Q\subset P}\left(\left(\coprod_{x\in S,\, c\in\mathbb{Z}}^{q\in Q^c(x)} F(\mathbb{K}_x[c+1])\right)\coprod A\right)^{\#}\right\rangle.
$$

Для будь-якого скінченного Q відображення

$$
\mathrm{in}_2^{\#} : A^{\#} \to \left(\left(\coprod_{x\in S,\, c\in\mathbb{Z}}^{q\in Q^c(x)} F(\mathbb{K}_x[c+1])\right)\coprod A\right)^{\#}
$$

є квазіізоморфізмом як скінченна композиція квазіізоморфізмів. Таким чином, його конус є ациклічним. Тому конус

$$\operatorname{Cone}\left\langle \bar\jmath^{\#}: A^{\#} \to \operatorname*{colim}_{Q\subset P}\left(\left(\coprod_{x\in S,\, c\in\mathbb{Z}}^{q\in Q^c(x)} F(\mathbb{K}_x[c+1])\right)\coprod\right)^{\#}\right\rangle \simeq$$

$$\simeq \operatorname*{colim}_{Q\subset P}\operatorname{Cone}\left\langle A^{\#} \to \left(\left(\coprod_{x\in S,\, c\in\mathbb{Z}}^{q\in Q^c(x)} F(\mathbb{K}_x[c+1])\right)\coprod A\right)^{\#}\right\rangle$$

є ациклічним і $\bar\jmath^{\#}$ — квазіізоморфізм.

Твердження 2.4 доведено.

Підсумовуючи твердження 2.2 та 2.4, припустимо, що $N \in \operatorname{Ob}\mathbf{dg}^S$ складається з вільних $\Bbbk$-модулів, $d_N = 0$ та $M = \operatorname{Cone} 1_{N[-1]} = (N\oplus N[-1], d_{\mathrm{Cone}})$. Тоді для будь-якого морфізму $\alpha: M \to UA \in \mathbf{dg}^S$ морфізм $\bar\jmath\colon A \to A\langle M,\alpha\rangle$ — тривіальна кофібрація в $\mathcal{C}$ і стандартна кофібрація, композиція двох елементарних стандартних кофібрацій. Він називається *стандартною тривіальною кофібрацією*.

***Доведення теореми* 1.1.** (MC1) (Ко)повнота $\mathcal{C}$ передбачається. Аксіоми (MC2) (три з двох для $\mathcal{W}$) та (MC3) (замкненість $\mathcal{L}_c$, $\mathcal{W}$, $\mathcal{R}_f$ щодо ретракцій) очевидні. Клас $\mathcal{L}_c$ є ${}^{\perp}(\mathcal{W}\cap\mathcal{R}_f)$ за визначенням.

(MC5) (ii) *Функторіальна факторизація на тривіальну кофібрацію та фібрацію.* Нехай $f: X \to Y \in \mathcal{C}$. Позначимо $N = Y^{\#}\Bbbk$, $M[1] = \operatorname{Cone} 1_{N[-1]} = (N\oplus N[-1], d_{\mathrm{Cone}}) \simeq Y^{\#}\mathbb{K}[-1]$. $\Bbbk$-Лінійне відображення $N \to Y^{\#}$, $e_y \mapsto y$, степеня 0 єдиним чином поширюється до постепеневої сюр'єкції $\pi_Y^t: M[1] \to Y^{\#} \in \mathbf{dg}^S$, що визначає морфізм $\pi_Y: F(M[1]) \to Y \in \mathcal{C}$. Поєднуючи його з попереднім, отримуємо морфізм $\pi_Y \cup f: F(M[1])\coprod X \to Y \in \mathcal{C}$. Оскільки $\pi_Y^t = \left\langle M[1] \xrightarrow{\eta} (F(M[1]))^{\#} \xrightarrow{\pi_Y^{\#}} Y^{\#}\right\rangle$ — це сюр'єкція, відображення

$$\pi_Y^{\#} = \left\langle (F(M[1]))^{\#} \xrightarrow{\mathrm{in}_1^{\#}} \left(F(M[1])\coprod X\right)^{\#} \xrightarrow{(\pi_Y\cup f)^{\#}} Y^{\#}\right\rangle$$

також є сюр'єкцією. Тому $(\pi_Y\cup f)^{\#}$ — сюр'єкція і $\pi_Y\cup f \in \mathcal{R}_f$. Розклад

$$f = \left(X \xrightarrow{\bar\jmath} X\langle M,0\rangle = F(M[1])\coprod X \xrightarrow{(\pi_Y\cup f)^{\#}} Y\right)$$

на тривіальну кофібрацію і фібрацію функторіальний по f.

(MC5) (i) *Функторіальна факторизація на кофібрацію та тривіальну фібрацію.* Побудуємо індуктивно діаграму в $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, equal] & D_0 \arrow[r, "h_0"] \arrow[drr, "f=q_0"'] & D_1 \arrow[r, "h_1"] \arrow[dr, "q_1"] & D_2 \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "q_2"] & \dots \\ & & & Y & \dots \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

так, щоб всі h_i були кофібраціями. Для даного q_n з $n \geq 0$ позначимо

$$N_n = Z\operatorname{Cone}(q_n^{\#}[-1]: D_n^{\#}[-1] \to Y^{\#}[-1]) =$$

$$= \left\{(u, y\sigma^{-1}) \in D_n^{\#}\times Y^{\#}[-1] \;\middle|\; ud = 0,\ uq_n^{\#} - yd_{Y^{\#}} = 0\right\},$$

як у твердженні 2.3. Будучи підмножиною циклів, N_n є градуйованим $\Bbbk$-підмодулем з $d_{N_n} = 0$. Розглядаючи N_n як градуйовану множину, введемо градуйований $\Bbbk$-модуль $M_n = N_n\Bbbk$, $d_{M_n} = 0$, з проекцією $p_n : M_n \longrightarrow\!\!\triangleright N_n \in \mathbf{dg}^S$, $e_v \mapsto v$ для всіх $v \in N_n^\bullet(\bullet)$. Позначимо $\alpha_n = \big(M_n \xrightarrow{p_n} N_n \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} D_n^\#\big) \in \mathbf{dg}^S$. Виберемо $D_{n+1} = D_n\langle M_n, \alpha_n\rangle$, тоді $h_n = D_n\langle 0\rangle : D_n \to D_{n+1}$ є кофібрацією. З твердження 2.3 та зауваження 2.1 випливає, що $(q_n : D_n \to Y, t_n = \big(M_n \xrightarrow{p_n} N_n \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} Y^\#[-1] \xrightarrow{\sigma} Y^\#\big)$ є елементом $h_{D_n,\alpha_n}(Y)$. Морфізм $q_{n+1} : D_{n+1} = D_n\langle M_n, \alpha_n\rangle \to Y \in \mathcal{C}$ відповідає парі (q_n, t_n) такій, що $q_n = \big(D_n \xrightarrow{h_n} D_{n+1} \xrightarrow{q_{n+1}} Y\big)$ в $\mathcal{C}$, що дає необхідну діаграму.

Доведемо що $q_2^\# : D_2^\# \to Y^\#$ є сюр'єктивним у всіх степенях. Нехай $y \in Y^{\#\bullet}(\bullet)$. Тоді $(0, yd\sigma^{-1}) \in N_0$, $e_{(0,yd\sigma^{-1})} \in M_0$, $e_{(0,yd\sigma^{-1})}\theta_0 \in D_1^\#$. З рівняння $\theta_0 q_1^\# = t_0 = p_0 \cdot \mathrm{pr}_2 \cdot\sigma : M_0 \to Y^\#$ випливає, що

$$e_{(0,yd\sigma^{-1})}\theta_0 q_1^\# - yd_{Y^\#} = (0, yd\sigma^{-1})\,\mathrm{pr}_2\,\sigma - yd = 0.$$

Крім того,

$$e_{(0,yd\sigma^{-1})}\theta_0 d_{D_1^\#} = e_{(0,yd\sigma^{-1})}(\theta)d = e_{(0,yd\sigma^{-1})}\alpha_0\bar{\imath}_0\eta g_0^\# = (0, yd\sigma^{-1})\,\mathrm{pr}_1\,\alpha_0\bar{\imath}_0\eta g_0^\# = 0.$$

Таким чином, $(e_{(0,yd\sigma^{-1})}\theta_0, y\sigma^{-1}) \in N_1$. Тому відображення $\mathrm{pr}_2 \cdot\sigma : N_1 \to Y^\#$ є сюр'єктивним у кожному степені. Отже, відображення $t_1 = \big(M_1 \xrightarrow{p_1}\!\!\triangleright N_1 \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} Y^\#[-1] \xrightarrow{\sigma} Y^\#\big)$ також є сюр'єктивним. Оскільки $t_1 = \Big(M_1 \xrightarrow{\theta_1} D_2^\# \xrightarrow{q_2^\#} Y^\#\Big)$, з цього випливає, що $q_2^\#$ є сюр'єктивним в кожному степені. Отже, $q_n^\# : D_n^\# \to Y^\#$ є сюр'єктивним для всіх $n \geq 2$ та індуковане відображення $q^\# : D^\# \to Y^\#$ є сюр'єктивним також, де

$$q = \operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} q_n : D = \operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} D_n \to Y.$$

Діаграма (2.4) також індукує діаграму конусів

$$\operatorname{Cone} q_0^\# \xrightarrow{\operatorname{Cone}(h_0^\#,1)} \operatorname{Cone} q_1^\# \xrightarrow{\operatorname{Cone}(h_1^\#,1)} \operatorname{Cone} q_2^\# \to \dots \to \operatorname{Cone} q^\# = \operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cone} q_n^\#.$$

З твердження 2.3 випливає, що підмодуль циклів $Z\operatorname{Cone} q_n^\#$ переводиться відображенням $\operatorname{Cone}(h_n^\#, 1)$ до підмодуля меж $B\operatorname{Cone} q_{n+1}^\#$. Таким чином, кограниця конусів $\operatorname{Cone} q^\#$ є ациклічною. Тому $q^\#$ — квазіізоморфізм. Ми розклали морфізм $f \in \mathcal{C}$ в стандартну кофібрацію i і тривіальну фібрацію $q : f = \big(X \xrightarrow{i} D \xrightarrow{q} Y\big)$.

(MC4) (ii). Доведемо, що стандартна тривіальна кофібрація $\bar{\jmath} : X \to X\langle M, 0\rangle$ лежить в ${}^\perp\mathcal{R}_f$. Тут $M[1] = \operatorname{Cone} 1_{N[-1]}$ і N складається з вільних $\Bbbk$-модулів. Маємо $X\langle M, 0\rangle = F(M[1]) \sqcup X$. Квадрат

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\bar{\jmath}"'] & A \arrow[d, two heads, "g"] \\ X\langle M,0\rangle \arrow[r, "b"] \arrow[ur, dashed, "c"] & B \end{tikzcd}$$

комутує тоді і лише тоді, коли $b = l \cup ag : F(M[1]) \sqcup X \to B$. Спряження переводить l в $l^t : M[1] \to B^\# \in \mathbf{dg}^S$. Існує комутативна діаграма в $\mathcal{S}\mathrm{et}$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{dg}^S(M[1], A^\#) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathbf{dg}^S(1,g^\#)"'] & \underline{\mathbf{dg}}^S(N, A^\#)^0 \arrow[d, "\underline{\mathbf{dg}}^S(1,g^\#)"] \\ \mathbf{dg}^S(M[1], B^\#) \arrow[r, "\sim"] & \underline{\mathbf{dg}}^S(N, B^\#)^0 \end{tikzcd} \quad . \tag{2.5}$$

Припустимо, що $g \in \mathcal{R}_f$, тобто $g^\#$ є сюр'єктивним у кожному степені. Оскільки N складається з вільних $\Bbbk$-модулів, вертикальні відображення — це сюр'єкції. Таким чином, існує ланцюгове відображення $r : M[1] \to A^\#$ таке, що $l^t = r \cdot g^\#$. Використовуючи спряження, знаходимо, що $l = \big(F(M[1]) \xrightarrow{{}^t r} A \xrightarrow{g} B\big)$. Тоді $c = {}^t r \cup a : F(M[1]) \sqcup X \to A$ є шуканим діагональним наповнювачем.

Позначимо через J клас усіх стандартних тривіальних кофібрацій. Тоді наведені вище міркування, розвернуті у зворотний бік, показують, що для $g \in J^\perp$ вертикальні стрілки в (2.5) завжди сюр'єктивні. Це означає, що $g \in \mathcal{R}_f$. Отже, $J^\perp = \mathcal{R}_f$.

Розглянемо довільний морфізм $f : X \to Y \in \mathcal{C}$. Відповідно до доведеного (MC5) (ii) існує розклад

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\bar\jmath"] \arrow[d, "f"'] & Z = X\langle M, 0\rangle \arrow[d, two heads, "p"] \\ Y \arrow[r, equal] & Y \end{tikzcd}$$

у стандартну тривіальну кофібрацію $\bar\jmath$ і $p \in \mathcal{R}_f$. Якщо $f \in \mathcal{W} \cap \mathcal{L}_c$, то $p \in \mathcal{W} \cap \mathcal{R}_f$. За визначенням $\mathcal{L}_c = {}^\perp(\mathcal{W} \cap \mathcal{R}_f)$ існує морфізм w такий, що діаграми

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\bar\jmath"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, equal] \arrow[ur, "w"] & Y \end{tikzcd} \iff \begin{tikzcd} X \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[r, equal] \arrow[d, "\bar\jmath"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "w"] & Z \arrow[r, "p"] & Y \end{tikzcd} \qquad (2.6)$$

комутують і $w \cdot p = 1_Y$, тобто f є ретрактом $\bar\jmath$. Отже, $(\mathcal{W} \cap \mathcal{R}_f)^\perp = J^\perp = \mathcal{R}_f$.

Теорему 1.1 доведено.

***Зауваження* 2.3.** В доведенні показано, що будь-яка тривіальна кофібрація f являє собою ретракт стандартної тривіальної кофібрації $\bar\jmath$ типу (2.6) (пор. з [4], зауваження 2.2.5). Аналогічно будь-яка кофібрація f — це ретракт стандартної кофібрації $\bar\jmath$ типу (2.6). Модельна структура $\mathcal{C}$ кофібрантно породжується класами елементарних кофібрацій та стандартних тривіальних кофібрацій.

Література

1. C. Berger, I. Moerdijk, *Axiomatic homotopy theory for operads*, Comment. Math. Helv., **78**, № 4, 805 – 831 (2003).
2. J. D. Christensen, M. Hovey, *Quillen model structures for relative homological algebra*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., **133**, № 2, 261 – 293 (2002).
3. J. E. Harper, *Homotopy theory of modules over operads and non-Σ operads in monoidal model categories*, J. Pure and Appl. Algebra, **214**, № 8, 1407 – 1434 (2010).
4. V. Hinich, *Homological algebra of homotopy algebras*, Commun. Algebra, **25**, № 10, 3291 – 3323 (1997).
5. V. Lyubashenko, *Homotopy unital A_∞-algebras*, J. Algebra, **329**, № 1, 190 – 212 (2011).
6. V. Lyubashenko, *(Homotopy unital) A_∞-morphisms with several entries*, Theory and Appl. Categ., **30**, № 45 (46), 1501 – 1551 (1552 – 1623) (2015).
7. F. Muro, *Homotopy theory of nonsymmetric operads*, Algebr. Geom. Topol., **11**, № 3, 1541 – 1599 (2011).
8. M. Spitzweck, *Operads, algebras and modules in general model categories*, jan 2001, arXiv: math/ 0101102.
9. S. Schwede, B. Shipley, *Algebras and modules in monoidal model categories*, Proc. London Math. Soc., **80**, № 2, 491 – 511 (2000).

Одержано 28.01.19