Некоторые вопросы чебышевского приближения в комплексной области [1]

Е. Я. Ремез

Введение

При изучении основных вопросов приближения числовой функции $f(\mathfrak{x})$ с помощью линейных комбинаций других заданных числовых функций вида $\sum_{k=1}^{n} z_k\varphi_k(\mathfrak{x})$, где $z_1, \ldots, z_n$ — подлежащие определению численные значения параметров, для достижения возможной общности оказывается иногда целесообразным (ср., например, наши работы [1, 2]) трактовать $\mathfrak{x}$ как абстрактный аргумент, пробегающий заданное множество E в некотором абстрактно определенном пространстве. Те или иные структурные свойства функций $f(\mathfrak{x})$, $\varphi_k(\mathfrak{x})$ при этом, естественно, подлежат ближайшему учету, если в основу приближения кладутся принципы интегральные (например, квадратический или средний степенной) или известные интерполяционные. Но когда речь идет о задаче апроксимации по чебышевскому принципу наилучшего равномерного приближения, то, как показывает небольшое размышление, роль аргумента $\mathfrak{x}$ оказывается, при изучении ряда наиболее общих вопросов этого рода, совершенно несущественною: задание самих функций $f(\mathfrak{x})$, $\varphi_k(\mathfrak{x})$ [2] здесь имеет значение лишь некоторого вспомогательного аппарата, при помощи которого значения величины $l=f(\mathfrak{x})$ сопоставляются с соответствующими [3] системами значений величин $a_k=\varphi_k(\mathfrak{x})$ $(k=\overline{1, n})$ [4], и именно этим сопоставлением определяется решение чебышевской задачи. В силу этого здесь становится возможным — и целесообразным в видах достижения наибольшей простоты — совершенно исключить из рассмотрения вспомогательный аргумент $\mathfrak{x}$ и положить в основу трактования наиболее общих вопросов теории чебышевского приближения прямое сопоставление соответственных значений величин l и $\sum_{k=1}^{n} z_k a_k$ (для того или другого фиксируемого

[1] Основное содержание данной статьи было предметом доклада в заседании Ученого совета Ин-та математики АН УССР 29.I 1952 г. Исходные же результаты и общий план данного исследования были представлены автором еще в январском докладе 1951 г.

[2] Эти функции могут быть здесь и разрывными и даже многозначными (в довольно широком понимании) — ср. [3].

[3] Конечно, вообще говоря, отнюдь не однозначным образом.

[4] Сокращенная запись $k=\overline{1, n}$ заменяет $k=1, 2, \ldots, n$.

набора численных значений $z_1, \ldots, z_n$), когда „точка" $(a_1, a_2, \ldots, a_n, l)$ пробегает некоторое заданное (неисчислимо-бесконечное, вообще) точечное множество $\mathfrak{G}_0$ в $(n+1)$-координатном действительном или комплексном пространстве. Именно такая общая схема постановки чебышевской задачи, еще в 1934—1935 гг. примененная нами для действительной области [3], здесь кладется в основу изучения общих вопросов чебышевского приближения и в комплексной области (главы II—IV).

В предварительном сообщении [4], посвященном этому кругу вопросов, мы придерживались чисто аналитического метода исследования поставленных вопросов. Бо́льшая часть данной работы (главы I—III) посвящена геометрическому трактованию чебышевской задачи приближения в теснейшей связи с рассмотрением выпуклого комплексного тела в унитарном пространстве $\mathfrak{R}_{n+1}$, интерпретирующего совокупность данных соответственно преобразованной задачи и делающего как бы непосредственно осязаемою связь между данными задачи и наглядно определяемым решением ее. Геометрически устанавливая, в ходе этих рассмотрений, основные факты, касающиеся существования решений и их общих свойств, включая, в частности, аналоги классических теорем Чебышева-Маркова и Валле Пуссена, мы подвергаем особому изучению свойства „чебышевских точек уклонения" (гл. III, § 10; гл. IV, § 13—15), являющихся, между прочим, всегда фиксированными, т. е. независимыми от возможного частного выбора решения задачи, и останавливаемся на выяснении значения этих свойств для исследования ряда вопросов как общетеоретического значения, так и находящихся в ближайшей связи с задачами фактического построения решений (последние рубрики большого параграфа 10 и § 14).

В этих главах данная работа по применяемому в них методу примыкает к выполненному в свое время автором исследованию [5], посвященному некоторым аналогичным вопросам в области задач апроксимации действительных функций. Как и в том исследовании, мы тут при геометрическом выводе некоторых основных фактов базируемся на дополненной нами ([5], § 2) формулировке известной теоремы Каратеодори-Штейница о барицентрических представлениях точек выпуклой оболочки. Для выполнения самого геометрического построения, доставляющего решение чебышевской задачи в комплексном случае, нам приходится привлечь, наряду с обычной концепцией опорной плоскости к выпуклому телу [1], уточненную и оказывающуюся важною для всего данного круга вопросов концепцию собственной опорной плоскости к выпуклому точечному множеству в евклидовом пространстве $R_{2(n+1)}$ и определяемое с его помощью понятие опорного линейного образа к выпуклому множеству в соответствующем комплексном пространстве $\mathfrak{R}_{n+1}$.

В связи с этим геометрическим исследованием законно поставить вопрос о том, остается ли применимым в случае комплексной области еще другой способ использования теории выпуклых тел для трактования

[1] Такого рода построение было впервые применено, на основе других рассуждений, в известной работе Хаара [6].

некоторых чебышевских вопросов, именно — способ, базирующийся на теореме Хелли о пересечениях выпуклых тел. Как известно, Л. Г. Шнирельманом было указано [7] в 1938 г. такого рода прямое применение теоремы Хелли к установлению одной общей теоремы о чебышевских приближениях в действительной области, которая в простейшем случае приближений с помощью рациональных многочленов восходит к Валле Пуссену [8] и имеет своим содержанием установление связи между величинами наилучшего приближения в некоторой заданной области апроксимации и на различных системах, составленных из $n+1$ точек этой же области. На поставленный таким образом вопрос мы немедленно можем дать следующий ответ, не имея в виду возвращаться к этому вопросу в дальнейшем изложении: примененное Л. Г. Шнирельманом рассуждение [7] без каких-либо фактических усложнений оказывается непосредственно применимым и к чебышевской задаче (11)—(13) в комплексной области, если наряду с пространством комплексно-числовых строк $(z_1, \ldots, z_n)$ ввести в рассмотрение $2n$-мерное действительное пространство $(\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1; \ldots; \operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_n)$, причем условие ограниченности пересечения некоторого конечного числа l [1] из совокупности подлежащих здесь рассмотрению выпуклых $2n$-мерных тел наверное выполняется при $l=n$ в силу условия отличия от нуля хотя бы одного из определителей порядка n, составленного из коэфициентов левых частей уравнений (11). Утверждение обобщаемого таким образом для комплексного случая „δ-варианта теоремы Чебышева“ [2] звучит следующим образом: *величина наилучшего приближения* ϱ *задачи* (13) *равна верхней грани величин наилучшего приближения для аналогичных задач, относящихся ко всевозможным комбинациям по* $2n+1$ *уравнений системы* (11) [3]. Нельзя отрицать того, что такое использование теоремы Хелли представляет действительно максимально-прямой путь для установления предложения, которое мы соответственно и обозначаем как δ-вариант теоремы Чебышева. Мы считаем, однако, уместным подчеркнуть, что, базируясь на точных результатах, устанавливаемых нами в главе III, § 9—10, можно, как нетрудно видеть, совершенно непосредственно получить не только δ-вариант теоремы Чебышева в данной формулировке, но и различные более совершенные формулировки той же теоремы в комплексном и действительном случаях (ср. конец пункта *з* в § 10).

Последняя глава данной работы (гл. IV, § 12—15) примыкает наиболее близко к содержанию нашего предварительного сообщения [4] и по-

---

[1] Обозначение из формулировки статьи Шнирельмана.

[2] Этот термин, который мы здесь, за неимением другого, позволим себе употребить для сокращения речи, указывает, конечно, на тесную логическую связь данного варианта теоремы Чебышева с теоремою о пересечениях выпуклых тел. Заметим, что соответствующее предложение для задачи (13) в действительной области было нами во всей общности формулировано еще в 1934—1935 гг. ([3], стр. 137, сноска 1, и стр. 141) как непосредственное следствие из установленного нами тогда же наиболее точного аналога теоремы Чебышева-Маркова.

[3] Нельзя не заметить, что значение этой теоремы в качестве основы для вычислительных соображений — в комплексной области оказывается намного ниже, чем в действительной, — именно в силу необходимости замены числа $n+1$ на большее число $2n+1$ в формулировке теоремы.

священа ряду рассмотрений, частью более аналитических по своему характеру, в которых за исходный пункт берется выдвинутое в упомянутом предварительном сообщении понятие лимитирующей системы уклонений. Это понятие, с которым связывается один из наиболее глубоко лежащих фактов всей рассматриваемой теории, приобретает особо важное значение в связи с вопросами оценки точности достигнутого (на том или ином этапе) приближения (§ 14) при осуществлении бесконечных процессов для фактического построения решений чебышевской задачи.

Из результатов, устанавливаемых в данной работе для чебышевской задачи в комплексной области, путем надлежащей специализации, непосредственно получается, вообще говоря, и ряд соответствующих фактов для задачи в действительной области, исходя из того простого замечания (ср. [9], теорема 4), что при вещественности данных задачи, т. е. координат точки $(a_1, \ldots, a_n, l)$ (ср. выше), пробегающей заданное точечное множество $\mathfrak{S}_0$, всегда оказывается в конечном счете достаточным иметь в виду и решения только вещественные. Но одновременно, при ближайшем сопоставлении обеих задач, здесь обнаруживаются во многих случаях весьма поучительные моменты принципиального и достаточно резкого качественного различия (см., в особенности, § 10, пункты *г*, *и*; § 13 и § 14). Можно отметить, в частности, что устанавливаемые в основных исследованиях глав III и IV результаты, касающиеся чебышевских точек уклонения и лимитирующих систем уклонений, позволяют в ряде существенных пунктов пополнить полученные нами ранее [3, 5] результаты и для чебышевской задачи в действительной области. С другой стороны, внимательное сличение ситуации, обнаруживаемой при этом в специальном случае вещественной задачи, с фактами, имеющими место в более общем случае задачи комплексной, позволяет по-настоящему понять, в чем заключаются основные источники тех усложнений, которые появляются, вообще, при переходе от действительного случая к комплексному (см. гл. III, § 10, пункт *и*; гл. IV, конец § 14) [1].

---

[1] Наше упомянутое предварительное сообщение [4] по вопросам чебышевского приближения в комплексной области, опирающееся существенным образом на наши прежние исследования в действительной области, было опубликовано в одном из апрельских выпусков ДАН СССР за 1951 г. В августовском номере Математического сборника за тот же год появилась статья В. К. Иванова (при написании которой автор, повидимому, еще не мог располагать нашим упомянутым последним сообщением), посвященная некоторым, отчасти сходным вопросам чебышевского приближения в действительной и комплексной области для конечной системы несовместных линейных уравнений. Спустя год появилась еще одна статья того же автора в июньском номере Математического сборника, который был нами получен на днях, когда данная статья уже заканчивалась оформлением к печати. Не входя пока в ближайший разбор самого содержания указанных двух статей В. К. Иванова (см., впрочем, некоторые замечания наши в конце § 15 данной работы), мы здесь вынуждены лишь отметить несколько своеобразное понимание их автором свободы литературных ссылок. В частности, то предложение второй статьи В. К. Иванова (теорема 8), которое сам автор во введении рекомендует как основной результат всей работы, в действительности содержится уже (и даже в более разработанном виде) на стр. 967 нашего упомянутого сообщения, и об этом автор, как нам кажется, должен был во всяком случае сказать.

Некоторые предварительные определения и вспомогательные предложения

§ 1. Пусть имеем в унитарном пространстве $\mathfrak{R}_n$ [10] n-членных комплексно-числовых строк $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, где $w_k = u_k + iv_k$ $(k = \overline{1, n})$, какое-нибудь выпуклое и замкнутое точечное множество $\mathfrak{K}$[1]. Свойство выпуклости понимается в том обычном смысле, что вместе с любыми двумя точками $w^{(1)}$, $w^{(2)}$, принадлежащими рассматриваемому множеству, оно содержит и все точки $\theta w^{(1)} + (1-\theta) w^{(2)}$ $(0 < \theta < 1)$.

Рассматривая $u_1, v_1; u_2, v_2; \ldots; u_n, v_n$ как действительные координаты точки в $2n$-мерном евклидовском пространстве R_{2n}, мы естественным образом получаем взаимно однозначное отображение $\mathfrak{R}_n$ на $R_{2n} = \Phi(\mathfrak{R}_n)$, которое множеству $\mathfrak{K}$ поставит в соответствие некоторое замкнутое и выпуклое множество $K \subset R_{2n}$:

$$\Phi(\mathfrak{K}) = K; \quad \mathfrak{K} = \Phi^{-1}(K). \tag{1}$$

Если множество $\mathfrak{K}$ содержит внутренние точки, то тем же свойством будет обладать и множество K, которое в таком случае будет представлять собою выпуклое $2n$-мерное тело. Если же $\mathfrak{K}$ внутренних точек не содержит, то не содержит таковых и выпуклое множество K. В этом случае существует[2] по крайней мере одна $(2n-1)$-мерная плоскость пространства R_{2n},

$$\sum_{k=1}^{n} A_k u_k + B_k v_k = A, \tag{2}$$

целиком заключающая в себе K. Мы в дальнейшем будем короче $(N-1)$-мерные плоскости какого-нибудь евклидовского пространства R_N называть просто *плоскостями* и обозначать, вообще, символом R'_{N-1}. Если в упомянутом случае существует всего ν различных, заключающих в себе множество K, линейно независимых между собою плоскостей $R'_{2n-\nu}$ пространства R_{2n} (т. е. плоскостей, выражаемых уравнениями вида (2) с линейно независимыми левыми частями), то пересечение $R'_{2n-\nu}$ этих плоскостей будет обозначаться нами как (однозначно определяемое) *наименьшее подпространство* (в данном случае $(2n-\nu)$-мерное)[3], заключающее в себе данное множество K. Выпуклое множество K будет наверное содержать внутренние точки

---

[1] Предполагаем, что оно непустое и содержит более одной точки.

[2] Ср., например, монографию Боннезен и Фенхель [11], стр. 2, а также статью автора [5].

[3] $R'_{2n-\nu}$ является $(2n-\nu)$-мерным декартовским (ср. [12], стр. 57) подпространством, в котором положение точки можно определять с помощью $2n-\nu$ остающихся независимыми координат, причем две точки считаются бесконечно близкими, если разности соответствующих независимых координат бесконечно малы (подробнее об этом и о некоторых связанных вопросах сказано в нашей статье [5], стр. 117). Это подпространство мы можем также рассматривать как *метрическое*, сохраняя в силе метрику пространства R_{2n}. Но $R'_{2n-\nu}$, вообще говоря, не будет, конечно, *линейным* подпространством (линейной системой), хотя всегда может быть получено из линейного подпространства с помощью „параллельного переноса".

относительно $R'_{2n-\nu}$, и точно так же его прообраз $\mathfrak{R}=\Phi^{-1}(K)$ будет обладать внутренними точками относительно $\Phi^{-1}(R_{2n-\nu})$.

Пусть ν обозначает любое из чисел $1, 2, \ldots, 2n-1$. Если рассматриваемое нами выпуклое замкнутое множество K не охватывает соответствующее $R'_{2n-\nu}$ целиком, то оно наверное содержит и пограничные точки относительно $R'_{2n-\nu}$. Пусть $\tilde{w}$ обозначает одну из них, причем мы сохраним то же обозначение и для прообраза этой точки в $\mathfrak{R}$. Через точку $\tilde{w}$ наверное может быть проведена по крайней мере одна опорная $(2n-\nu-1)$-мерная плоскость $R'_{2n-\nu-1} \subset R'_{2n-\nu}$ к выпуклому множеству K. Представляя ее в виде $R'_{2n-\nu-1} = R'_{2n-\nu} \cap T$, где T обозначает какую-нибудь плоскость ($(2n-1)$-мерную) пространства R_{2n}, заведомо линейно независимую (в разъясненном уже выше смысле) от тех ν плоскостей, пересечением которых определялось само $R'_{2n-\nu}$, — мы замечаем, что T является опорною плоскостью к выпуклому множеству K в пространстве R_{2n}. Притом это такая опорная плоскость, которая, проходя через данную пограничную точку $\tilde{w}$ выпуклого множества K, очевидно, заведомо не содержит в себе ни одной внутренней (относительно $R'_{2n-\nu}$) точки этого множества. Такие опорные плоскости мы будем называть *собственными опорными плоскостями* — в отличие от тривиальных опорных плоскостей, содержащих все множество K вместе с заключающим его в себе $R'_{2n-\nu}$.

В случае $\nu=0$ мы условимся отождествлять R'_{2n-0} с самим R_{2n}, и таким образом в этом случае всякую опорную плоскость выпуклого тела K можно будет, очевидно, трактовать как собственную опорную плоскость[1].

Относительно количества собственных опорных плоскостей, проходящих через $\tilde{w}$, можно заметить, что при $\nu>0$ $(1 \leqslant \nu \leqslant 2n-1)$ мы всегда имеем бесконечное множество (континуум) собственных опорных плоскостей, а при $\nu=0$ — либо одну единственную, либо опять-таки бесконечное множество собственных опорных плоскостей, смотря по тому, будет ли точка $\tilde{w}$ „регулярною" или „особою" (ср. [11], стр. 13) точкою поверхности выпуклого тела K.

Опираясь на установленное таким образом понятие собственной опорной плоскости к выпуклому точечному множеству действительного евклидовского пространства, мы можем теперь немедленно дать определение другого, важного для дальнейшего, понятия, относящегося уже не ко множеству K, а к его комплексному прообразу $\mathfrak{R}=\Phi^{-1}(K)$. Имея уравнение

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k u_k+\beta_k v_k)=\lambda \tag{3}$$

какой-нибудь собственной опорной плоскости T к выпуклому множе-

---

[1] Что касается исключенного фактически из рассмотрения случая $\nu=2n$ (случай одноточечного множества K), то достаточно будет заметить, что в этом случае понятие собственной опорной плоскости просто теряет смысл. — Ср. некоторые соответствующие соображения в нашей статье [5], сноска 4 на стр. 118.

ству K в точке $\tilde{w}$, которое мы можем также переписать в виде

$$\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k - i\beta_k)(u_k + iv_k) = \lambda, \tag{3'}$$

и определяя действительное число μ условием

$$\operatorname{Im}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k - i\beta_k)(\tilde{u}_k + i\tilde{v}_k) \equiv \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\tilde{v}_k - \beta_k\tilde{u}_k) = \mu, \tag{4}$$

где $\tilde{u}_1, \tilde{v}_1; \ldots; \tilde{u}_n, \tilde{v}_n$ обозначают координаты данной точки $\tilde{w}$ в R_{2n}, мы введем в рассмотрение комплексный линейный образ

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k - i\beta_k)w_k = \lambda + i\mu \qquad (w_k = u_k + iv_k) \tag{5}$$

в унитарном пространстве $\mathfrak{R}_n$. Он, очевидно, проходит через пограничную точку $\tilde{w}$ множества $\mathfrak{K}$ — прообраз одноименной точки множества K — и, с другой стороны, он заведомо не заключает в себе ни одной внутренней (относительно $\Phi^{-1}(R'_{2n-\nu})$) точки множества $\mathfrak{K}$, поскольку он составляет часть множества $\Phi^{-1}(T)$, уже обладающего аналогичным свойством в отношении множества $K \subset R'_{2n-\nu}$. Удовлетворяющий этим двум требованиям комплексный линейный образ (5) мы назовем *опорным линейным образом* к выпуклому замкнутому множеству $\mathfrak{K}$ унитарного пространства $\mathfrak{R}_n$ (проведенным через заданную пограничную точку $\tilde{w}$ этого множества) [1]. Само комплексное уравнение (5), действительная составляющая которого (3′) представляет собой уравнение собственной опорной плоскости в соответствующей пограничной точке множества $\Phi(\mathfrak{K}) = K$ действительного евклидовского пространства R_{2n}, мы будем обозначать как *нормальное уравнение* рассматриваемого опорного линейного образа [2].

§ 2. В последующем изложении нам придется не раз опираться на некоторые факты, касающиеся барицентрических представлений точек выпуклой оболочки ([11], § 2) какого-нибудь множества в евклидовском пространстве. По этому вопросу нами в свое время ([5], § 2) была указана следующая уточненная формулировка теоремы Каратеодори-Штейница ([14], п. 9; [15], § 10), применимая к любому (ограниченному или неограниченному, возможно

---

[1] В частном случае $\nu = 0$ это определение в существенном совпадает с определением понятия „stützender R_{n-1}", которое в связи с иным кругом вопросов применял Э. Хелли [13] в своей работе о системах линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных.

[2] Не исключены и такие случаи, когда для одного и того же самого опорного линейного образа могут быть получены существенно различные (связанные с различными собственными опорными плоскостями (3′)) нормальные уравнения (5). Однако в конкретных построениях, которые нас будут в дальнейшем (гл. III) интересовать, мы таких случаев не встретим. С другой стороны, в силу одной теоремы общего характера о выпуклых телах, восходящей в простейшем случае к Минковскому (ср., напр., [23], стр. 162), мы можем утверждать, что всякий линейный опорный образ обладает по крайней мере одним нормальным уравнением.

и незамкнутому) „$(N-\nu)$-мерному“[1] $(0 \leqslant \nu < N)$ точечному множеству G какого-нибудь N-мерного евклидовского (или декартовского) пространства R_N и его выпуклой оболочке K_G:

Всякая точка $Q=(q_1, q_2, \ldots, q_N) \in K_G$, где K_G — выпуклая оболочка m-мерного $(m=N-\nu)$ точечного множества G пространства R_N, находится внутри (в строгом смысле этого слова) по крайней мере одного неособенного[2] симплекса $Q^{(1)}Q^{(2)}\ldots Q^{(r)}$ $(1 \leqslant r \leqslant m+1)$, все вершины которого принадлежат множеству G. При этом, если Q — внутренняя[3] точка для K_G, то одна из вершин симплекса может быть помещена в любой точке, выбранной совершенно произвольно на G.

Чтобы лучше выявить аналитическое содержание указанного предложения и сделать более прозрачным факт непосредственной его применимости (в рассматриваемом нами более специальном круге вопросов) также и к соответствующим множествам $\mathfrak{G}=\Phi^{-1}(G)$, $\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}=\Phi^{-1}(K_G)$ унитарного пространства $\mathfrak{R}_n$ (при $N=2n$, $Q \equiv \boldsymbol{w}$)[4], мы его сформулируем еще в следующем, фактически эквивалентном виде:

Для всякой точки $Q \in K_G$, где K_G *— выпуклая оболочка m-мерного $(m=N-\nu;\ 0 \leqslant \nu < N)$ точечного множества G пространства R_N, существует по крайней мере одна система б а р и ц е н т р и ч е с к и н е з а в и с и м ы х м е ж д у с о б о ю точек $Q^{(1)}, Q^{(2)}, \ldots, Q^{(r)}$ (r — некоторое число в пределах $1 \leqslant r \leqslant m+1$), принадлежащих множеству G, через которые точка Q может быть представлена („барицентрически“) как центр тяжести помещенных в них положительных масс. При этом, если Q — внутренняя (относительно наименьшего $R'_{N-\nu} \supset G$) точка K_G, то в качестве $Q^{(1)}$ может быть взята любая произвольно выбранная точка множества G.*

Здесь необходимо разъяснить, что при $r>1$ мы называем *барицентрически независимыми* точки $Q^{(1)}, Q^{(2)}, \ldots, Q^{(r)}$ в том случае, если они не связаны никакой линейной зависимостью, с вещественно-числовыми коэфициентами k_j, вида

$$\sum_{j=1}^{r} k_j Q^{(j)}=0, \quad \text{где} \quad \sum_{j=1}^{r} k_j=0, \quad \sum_{j=1}^{r} k_j^2>0. \tag{6}$$

Само барицентрическое представление точки Q через точки $Q^{(1)}, \ldots, Q^{(r)}$, о котором идет речь в данном предложении, разумеется, всегда может быть осуществлено при сумме положительных масс $\mu_1, \ldots, \mu_r$, равной 1, в виде

$$Q=\sum_{j=1}^{r} \mu_j Q^{(j)} \quad \left(\sum_{j=1}^{r} \mu_j=1; \quad \mu_j>0, \quad j=\overline{1, r}\right). \tag{7}$$

[1] Для краткости речи мы здесь условимся вообще обозначать точечное множество (безразлично, выпуклое или невыпуклое) какого-нибудь евклидовского пространства R_N как $(N-\nu)$*-мерное* $(0 \leqslant \nu < N)$, если оно содержится в некотором подпространстве $R'_{N-\nu}$, но не содержится ни в каком $R'_{N-\nu-1}$.

[2] Симплекс называем н е о с о б е н н ы м, если его размерность только на одну единицу меньше числа его вершин.

[3] Относительно соответствующего наименьшего $R'_{N-\nu} \supset G$.

[4] Как и выше, мы будем всегда применять одинаковые буквенные обозначения (например, Q) для с о о т в е т с т в е н н ы х элементов („точек“ или „векторов“) пространств $\mathfrak{R}_n$ и $R_{2n}=\Phi(\mathfrak{R}_n)$.

В таком виде рассматриваемое предложение оказывается непосредственно применимым и к упомянутым множествам $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}$ унитарного пространства $\mathfrak{R}_n$ при $m = 2n - \nu$, предполагая $(2n - \nu)$-мерным соответствующее множество $\Phi(\mathfrak{G}) = G$; при этом $\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}} = \Phi^{-1}(K_G)$ оказывается, конечно, не чем иным, как наименьшим выпуклым множеством пространства $\mathfrak{R}_n$, содержащим $\mathfrak{G}$, т. е. выпуклою оболочкою данного множества $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{R}_n$.

Замечание. По поводу отмеченной теоремы о барицентрическом представлении точек выпуклой оболочки (в действительном или в комплексном пространстве) необходимо добавить еще, что, как это легко усматривается на основе самих определений выпуклого множества и выпуклой оболочки, справедливо и обратное утверждение, а именно — всякая точка, барицентрически представимая с помощью положительных масс μ_j через точки множества G (соответственно $\mathfrak{G}$), наверное принадлежит выпуклой оболочке K_G (соответственно $\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}$) (ср. [5], с. 119).

§ 3. Нам для дальнейшего необходимо еще условиться здесь относительно некоторого уточнения терминологии, касающейся линейной зависимости форм (ср. монографию автора [3], стр. 130—131).

Рассматривая действительные линейные формы

$$f_i = f_i(x, y, \ldots, u) = a_i x + b_i y + \ldots + h_i u \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots), \quad (8)$$

мы, с одной стороны, будем пользоваться обычным определением линейной зависимости, называя формы $f_1, f_2, \ldots, f_r$ *линейно зависимыми (в широком смысле)*, если существует какая-нибудь система постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_r$, из которых хотя бы одна отлична от нуля, таких, что

$$C_1 f_1 + C_2 f_2 + \ldots + C_r f_r \equiv 0. \quad (9)$$

Необходимое и достаточное условие для существования такой зависимости заключается, очевидно, в том, что ранг матрицы коэфициентов системы рассматриваемых r линейных форм должен быть меньше r.

С другой стороны, для точной формулировки в общем виде некоторых основных теорем о наилучших приближениях оказывается полезным ввести еще следующее более специальное определение: линейные формы $f_1, \ldots, f_r$ называем *линейно зависимыми в узком смысле*, если в тождестве (9) все r постоянных $C_1, \ldots, C_r$ отличны от нуля и если не существует никакого аналогичного соотношения с меньшим числом членов. Ясно, что тут постоянные $C_1, \ldots, C_r$ являются однозначно определенными с точностью до общего множителя.

Необходимое и достаточное условие для существования линейной зависимости в узком смысле между $f_1 \ldots, f_r$ заключается в том, чтобы ранг матрицы коэфициентов равнялся $r - 1$, и чтобы из нее можно было выделить такую („суженную“) матрицу из $r - 1$ столбцов, в которой все r определителей $(r - 1)$-го порядка отличны от нуля.

Можно теперь добавить, что оба определения, вместе с относящимися к ним детерминантными условиями, непосредственно обобщаются и для комплексных линейных форм, если при этом и для множителей $C_1, \ldots, C_r$ допускать вполне произвольные комплексные значения.

В последующих главах вопросы линейной зависимости или независимости линейных форм окажутся естественным образом связанными с некоторыми отмеченными выше фактами теории выпуклых множеств в их применении к чебышевской задаче. Ограничимся пока указанием, что условие барицентрической независимости r точек $Q^{(1)}, \ldots, Q^{(r)}$ в $\boldsymbol{R}_N$ (т. е. несуществования между ними зависимости вида (6) [1] равносильно, как легко видеть, условию линейной независимости r действительных форм от $x_0, x_1, \ldots, x_N$:

$$x_0 + q_1^{(j)} x_1 + q_2^{(j)} x_2 + \ldots + q_N^{(j)} x_N \qquad (j = \overline{1, r}), \tag{10}$$

где $q_1^{(j)}, \ldots, q_N^{(j)}$ обозначают координаты точки $Q^{(j)}$ в $\boldsymbol{R}_N$.

Глава II

Задача чебышевского приближения в комплексной области и ее геометрическая постановка

§ 4. Применяя в случае комплексной области общую схему (ср. Введение) постановки чебышевской обобщенно-полиномиальной задачи апроксимации, впервые формулированную нами ([3], гл. VIII) в 1934 г. для действительной области, мы в основу формулировки задачи кладем рассмотрение *„системы“ несовместных линейных уравнений*, вообще говоря, неисчислимо-бесконечной и лишь в простейшем случае конечной (или исчислимой):

$$\left. \begin{array}{c} f(z) = f(Q|z) \equiv a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots + a_n z_n = l \\ ((a_1, \ldots, a_n, l) \equiv Q \in \mathfrak{G}_0) \end{array} \right\}, \tag{11}$$

где $\mathfrak{G}_0$ — пробегаемое „точкой“ $(a_1, \ldots, a_n, l) \equiv Q$ заданное ограниченное точечное множество в унитарном пространстве $(n+1)$-членных комплексно-числовых строк $\mathfrak{R}_{n+1}$, а $z_1, \ldots, z_n$ обозначают неизвестные (параметры); при этом $z \equiv (z_1, \ldots, z_n)$ — элемент („точка“) аналогичного пространства $\mathfrak{R}_n$. Обозначая через $\mathfrak{G}_0^*$ замыкание $\mathfrak{G}_0$ и через $\delta \equiv \delta(Q, z)$ — величину *уклонения*

$$l - f(z) = l - \sum_{k=1}^{n} a_k z_k = \delta, \tag{12}$$

соответствующую (при фиксируемом z) той или другой точке Q или, выражаясь иначе, уравнению Q системы (11), мы можем анали-

[1] Говоря иначе (ср. § 2) — условие неособенности симплекса $Q^{(1)} Q^{(2)} \ldots Q^{(r)}$.

тически формулировать подлежащую нашему рассмотрению задачу наилучшего (чебышевского) приближения в виде требования

$$\sup_{Q \in \mathfrak{G}_0} |\delta| = \max_{Q \in \mathfrak{G}_0^*} |\delta| \equiv L \equiv L(z) = \min. \tag{13}$$

Без какого-нибудь существенного сужения задачи мы можем предположить ранг „матрицы" коэфициентов $a_k (k = \overline{1, n})$ системы (11) равным n[1], что означает линейную независимость комплексных величин („координат") $a_1, a_2, \ldots, a_n$ на множестве $\mathfrak{G}_0$: этого в действительности всегда можно достигнуть — например, устраняя в случае надобности линейно зависимые a_k путем выражения их через другие, линейно независимые, и уменьшая в связи с этим также число неизвестных $z_1, \ldots, z_n$[2]. Поскольку же система (11) предположена несовместною, то при линейной независимости $a_1, \ldots, a_n$ будет уже обеспечена линейная независимость всех $n+1$ комплексных величин $a_1, \ldots, a_n, l$ на множестве $\mathfrak{G}_0$.

Для удобства речи мы условимся далее всегда писать коротко „система (11*)", когда речь будет итти о „замыкании" системы уравнений (11), получаемом при замене $\mathfrak{G}_0$ на $\mathfrak{G}_0^*$.

§ 5. Имея в виду геометризировать чебышевскую задачу в смысле ее перефразирования на языке теории выпуклых тел, мы прежде всего присоединим к замкнутому точечному множеству $\mathfrak{G}_0^*$ все его комплексно-симметрические, относительно „начала координат", изображения $\mathfrak{G}_\varphi^*$ $(0 < \varphi < 2\pi)$, определяемые как множества всех точек

$$Qe^{\varphi i} \equiv (a_1 e^{\varphi i}, \ldots, a_n e^{\varphi i}, le^{\varphi i}) \equiv (ae^{\varphi i}, le^{\varphi i}) \qquad (Q \in \mathfrak{G}_0^*) \tag{14}$$

при соответствующем фиксированном значении φ. Далее положим

$$\bigcup_{\varphi=0}^{2\pi} \mathfrak{G}_\varphi^* = \mathfrak{G}. \tag{15}$$

Основываясь на фактах компактности в себе точечного множества $\mathfrak{G}_0^*$ и, равным образом, числового множества значений $e^{\varphi i}$ $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$, очень легко доказать замкнутость и множества $\mathfrak{G}$.

Полагая $a_k = x_k + iy_k$ $(k = \overline{1, n})$, $l = \xi + i\eta$ и применяя взаимно однозначное отображение $\mathfrak{R}_{n+1}$ на $R_{2(n+1)} = \Phi(\mathfrak{R}_{n+1})$ как в § 1, мы ограниченным множествам $\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{G}_0^*$, $\mathfrak{G}_\varphi^*$, $\mathfrak{G}$ поставим в соответствие множества G_0, G_0^*, G_φ^*, G в евклидовском $(2n+2)$-мерном пространстве R_{2n+2}. Через K_G обозначим выпуклую оболочку множества G, которая также является ограниченною и вместе с тем замкнутою одновременно с G (ср., например, [14], п. 7). Соответствующее множество $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}} = \Phi^{-1}(K_G)$

[1] Следует, с другой стороны, отчетливо оговорить, что мы отнюдь не предполагаем обязательного выполнения известного (обеспечивающего всегда единственность решений) условия Хаара-Колмогорова [6, 9], которое потребовало бы здесь отличия от нуля не одного, а всех определителей порядка n упомянутой „матрицы" — и не только для самой системы (11), но и для ее „замыкания" (11*) (ср. ниже).

[2] Относительно другого возможного способа разрешения данного вопроса ср. [3], стр. 130, 140.

в $\mathfrak{R}_{n+1}$ (также, разумеется, ограниченное и замкнутое) является (ср. § 2) выпуклою оболочкою множества $\mathfrak{G}$.

Применение теоремы о барицентрических представлениях точек выпуклой оболочки (гл. I, § 2), с дополнительным замечанием к ней, позволяет наиболее непосредственным образом усмотреть, что подобно самому множеству $\mathfrak{G}$ его выпуклая оболочка $\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}$ обладает свойством *комплексно-центральной симметрии* относительно начала координат, т. е. из $Q \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}$ всегда следует $Qe^{\varphi i} \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}$ $(0 < \varphi < 2\pi)$.

Поскольку при замене $Q = (a, l) \in \mathfrak{G}_0^*$ на $Qe^{\varphi i} = (ae^{\varphi i}, \ le^{\varphi i}) \in \mathfrak{G}_\varphi^*$ величина уклонения $\delta = \delta(Q, \ z)$ приобретает лишь множителем $e^{\varphi i}(|e^{\varphi i}| = 1)$, то подлежащую минимизации величину $L = L(z)$ в (13) можно также представить в виде

$$L = L(z) = \max_{Q \in \mathfrak{G}} |\delta|. \tag{16}$$

Учитывая же, далее, линейную зависимость $\delta = \delta(Q, z)$ (см. (12)) от Q, мы на основе той же теоремы о барицентрических представлениях непосредственно убеждаемся в справедливости такой окончательной формулировки подлежащей нашему исследованию чебышевской задачи:

$$\max_{Q \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}} |\delta| = L = L(z) = \min. \tag{17}$$

§ 6. Прежде чем переходить к геометрическому решению задачи, посмотрим еще, какой факт в пространстве R_{2n+2} явится следствием принятого выше предположения линейной независимости комплексных величин $a_1, \ldots, a_n, \ l$ на множестве $\mathfrak{G}_0$. Для некоторой системы $n+1$ точек $Q_1, \ldots, Q_{n+1} \in \mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_0^*$ окажется лишенною собственных (нетривиальных) решений система линейных, однородных относительно неизвестных $k_\nu = c_\nu - i\partial_\nu$ $(\nu = \overline{1, \ n+1})$ уравнений

$$\sum_{\nu=1}^{n} (a_{\nu j} k_\nu + l_j k_{n+1}) = 0 \qquad (j = \overline{1, n+1}) \tag{18}$$

или, что то же — система $2n+2$ действительных линейных однородных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{n} (x_{\nu j} c_\nu + y_{\nu j} \partial_\nu) + \xi_j c_{n+1} + \eta_j \partial_{n+1} = 0 \qquad (j = \overline{1, n+1}) \\ &\sum_{\nu=1}^{n} (y_{\nu j} c_\nu - x_{\nu j} \partial_\nu) + \eta_j c_{n+1} - \xi_j \partial_{n+1} = 0 \qquad (j = \overline{1, n+1}) \end{aligned}\right\}. \tag{19}$$

В силу хорошо известного детерминантного критерия это означает, что

$$D = \begin{vmatrix} x_{11} & y_{11} & \cdots & x_{n1} & y_{n1} & \xi_1 & \eta_1 \\ y_{11} & -x_{11} & \cdots & y_{n1} & -x_{n1} & \eta_1 & -\xi_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{1, n+1} & y_{1, n+1} & \cdots & x_{n, n+1} & y_{n, n+1} & \xi_{n+1} & \eta_{n+1} \\ y_{1, n+1} & -x_{1, n+1} & \cdots & y_{n, n+1} & -x_{n, n+1} & \eta_{n+1} & -\xi_{n+1} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{20}$$

Но если мы обратим внимание на то, что

$$\left.\begin{aligned} y_{\nu j}-ix_{\nu j}&=(x_{\nu j}+iy_{\nu j})e^{\frac{3\pi}{2}i} \qquad (\nu=\overline{1,n};\quad j=\overline{1,n+1}) \\ \eta_j-i\xi_j&=(\xi_j+i\eta_j)e^{\frac{3\pi}{2}i} \qquad (j=\overline{1,n+1}) \end{aligned}\right\}, \tag{21}$$

то немедленно убедимся, что условие (20) означает линейную независимость $2n+2$ действительных величин $x_1, y_1; \ldots; x_n, y_n; \xi, \eta$ на множестве G, так как четные строки определителя D содержат не что иное, как действительные координаты точек $\Phi(Q_j e^{\frac{3\pi}{2}i}) \in G^*_{\frac{3\pi}{2}}$ $(j=\overline{1,n+1})$; мы эти точки обозначим через Q_{j+n+1} $(j=\overline{1,n+1})$.

Из установленного только что обстоятельства вытекает немедленно следующий важный для дальнейшего факт: *выпуклое тело* $K_G=K$ *содержит начало координат в качестве внутренней точки*[1]. Действительно, установленный только что результат означает, что $2n+2$ точки $Q_1, \ldots, Q_{2n+2}$ не лежат в одной плоскости с началом координат $O(x_1=y_1=\ldots=x_n=y_n=\xi=\eta=0)$. Поэтому, если обозначить через U какую-нибудь (произвольно взятую) плоскость, проходящую через O, то по крайней мере одна из точек $Q_s(s=\overline{1,2n+2})$ окажется расположенною вне U. Значит, симметричная с нею точка $-Q_s=\Phi(Q_s e^{\pi i})$, которая также, наверное, принадлежит $G\subset K$, окажется расположенною по другую сторону от U. Стало быть, любая плоскость U, проходящая через O, является секущею для K. Это же и означает, что начало координат O является внутреннею точкою выпуклого тела $K=K_G$.

Глава III

Геометрическое решение задачи наилучшего (чебышевского) приближения в комплексной области. Чебышевские подсистемы и чебышевские точки уклонения. Аналоги теорем Чебышева-Маркова и Валле Пуссена

§ 7. Начнем с выяснения непосредственного геометрического значения величины максимума модуля уклонения

$$L=L(z)=\max_{Q\in\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}}\left|l-\sum_{k=1}^{n}z_k a_k\right| \tag{17'}$$

при произвольно выбранном (не наилучшем, вообще) наборе $z=\{z_k\}$.

Учитывая, что абсолютная величина уклонения $|\delta|=|\delta(Q,z)|=\left|l-\sum_{k=1}^{n}z_k a_k\right|$ $(z=\text{const})$ при лучевом удалении точки Q от начала координат в любом фиксированном направлении[2] всегда возрастает

[1] Аналогичное справедливо, разумеется, и для $\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}$.

[2] Иначе говоря, при $Q=t\bar{Q}$, где $\bar{Q}=\text{const}$, а положительный параметр t возрастает.

(предполагая $\delta \neq 0$ на этом направлении) прямо пропорционально возрастанию расстояния рассматриваемой точки от начала координат, — легко понять, что значение (17′) (при данном z) всегда достигается лишь в таких точках $Q \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}$, которые, во всяком случае, лежат на поверхности тела $\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}$.

Если при данном z, в некоторой точке $Q_0 = (a_0, l_0) \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}$ имеем $\delta = l_0 - \sum_{k=1}^{n} z_k a_{k0} = Le^{i\alpha}$, где $L = L(z)$, то в комплексно-симметричных точках $Q_0 e^{i\psi} = (a_0 e^{i\psi}, le^{i\psi})$ $(0 < \psi \leqslant 2\pi)$ величина δ принимает все значения $Le^{i\varphi}$ $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$. В частности, при $\psi = 2\pi - \alpha$ мы будем иметь

$$\delta = l - \sum_{k=1}^{n} z_k a_k = L. \tag{22}$$

Положим надалее вообще для конкретизации обозначений

$$z_k = z_k' - iz_k'' \qquad (k = 1, n).$$

При $z = (z_1, \ldots, z_n) = \text{const}$ и при переменных $a_1, \ldots, a_n, l$ все линейные образы

$$l - \sum_{k=1}^{n} z_k a_k = Le^{i\varphi} \qquad (L = L(z);\ \varphi = \text{const} \in [0, 2\pi)) \tag{23}$$

будут, очевидно, опорными (гл. I, § 1) для $\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}$. Уравнение же (22) при любом фиксированном z и при $L = L(z)$ является, как легко убедиться, нормальным уравнением одного из таких опорных линейных образов: действительный компонент этого комплексного уравнения

$$\xi - \sum_{k=1}^{n} (z_k' x_k + z_k'' y_k) = L \tag{24}$$

представляет опорную плоскость к K_G, как это непосредственно усматривается на основе совершенно аналогичного соображения относительно возрастания абсолютной величины левой части (24) при лучевом удалении точки Q от начала координат и еще того очевидного соображения, что $|\delta|$ не меньше упомянутой величины. При этом окончательно выясняется и поставленный в начале этого параграфа вопрос:

Число $L = L(z)$ геометрически выражает длину отрезка, отсекаемого опорною плоскостью (24) на положительном луче ξ-оси $(x_1 = y_1 = \ldots = x_n = y_n = \eta = 0,\ \xi > 0)$.

§ 8. Установленные только что факты почти непосредственно подсказывают уже подход к геометрическому решению рассматриваемой задачи наилучшего приближения.

Обозначим через P точку пересечения поверхности выпуклого тела K_G, содержащего (§ 6) внутри себя начало координат O, с положительным направлением оси $O\xi$, через ξ_p — значение координаты ξ для этой точки:

$$P = (0, 0; \ldots; 0, 0; \xi_p, 0). \tag{25}$$

Из результата, установленного в конце § 7, следует, что, при любом выборе z, $L(z) \geqslant \xi_P$, — стало быть, также

$$\inf_z L(z) = \varrho \geqslant \xi_P. \tag{26}$$

Проведем в точке P какую-нибудь[1] опорную плоскость T к выпуклому телу K_G; уравнение ее наверное можно будет записать[2] в виде

$$\xi + u\eta - z_{10}'x_1 - z_{10}''y_1 - \ldots - z_{n0}'x_n - z_{n0}''y_n = \xi_P. \tag{27}$$

Нетрудно убедиться, что при этом $u = 0$. Действительно, пересекая двухмерным линейным многообразием $x_1 = y_1 = \ldots = x_n = y_n = 0$ выпуклое тело K_G и плоскость T, мы в соответствующей двухмерной плоскости (ξ, η), с одной стороны, получим (учитывая комплексно-центральную симметрию относительно O) круг $\xi^2 + \eta^2 \leqslant \xi_P^2$, а с другой стороны, прямую $\xi + u\eta = \xi_P$. В случае $u \neq 0$ эта прямая непременно пересекла бы круг и, следовательно, плоскость T пересекла бы K_G, что заведомо исключено.

Таким образом, уравнение (27) опорной плоскости T конкретизируется в следующем виде:

$$\xi - z_{10}'x_1 - z_{10}''y_1 - \ldots - z_{n0}'x_n - z_{n0}''y_n = \xi_P \quad (\text{пл. } T). \tag{27'}$$

Соответствующий комплексный опорный линейный образ (§ 1) к телу $\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}$ будет иметь своим нормальным уравнением

$$\begin{gathered} l - z_{10}a_1 - z_{20}a_2 - \ldots - z_{n0}a_n = \xi_P \\ (z_{k0} = z_{k0}' - iz_{k0}'', \quad k = \overline{1, n}). \end{gathered} \tag{28}$$

Мы утверждаем: 1) *что* $\xi_P = \varrho$ *(величина наилучшего приближения) и* 2) *что система* z_0 *значений комплексных коэфициентов* $z_1 = z_{10}, \ldots, z_n = z_{n0}$ *представляет решение (т. е., по крайней мере, одно из решений) самой задачи наилучшего приближения.*

Чтобы в этом убедиться, достаточно, очевидно, показать, что

$$L(z_0) = \xi_P; \tag{29}$$

это по сопоставлении с (26) и доставит немедленно оба нужных заключения.

Доказывая от противного, допустим, что равенство (29) несправедливо. Тогда в какой-нибудь точке $\tilde{Q} \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}$ мы должны иметь $|\delta(\tilde{Q}, z_0)| > \xi_P$, т. е., полагая $\tilde{Q} = (\tilde{a}, \tilde{l})$,

$$\tilde{l} - \sum_{k=1}^{n} z_{k0}\tilde{a}_k = \xi_P \cdot qe^{\alpha i} \quad (q > 1;\ 0 \leqslant \alpha < 2\pi). \tag{30}$$

В таком случае в точке $Q = q^{-1}e^{-\alpha i}\tilde{Q}$, принадлежащей также выпук-

[1] Эта формулировка учитывает, что P может оказаться и особою точкою поверхности тела K_G.

[2] Следует учесть, что T, проходя через точку P, заведомо не содержит, с другой стороны, начала координат.

лому телу $\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}$ и заведомо внутренней для него[1], должно выполняться равенство

$$l - \sum_{k=1}^{n} z_{k_0} a_k = \xi_p,$$

но это невозможно, так как линейный образ (28), являясь опорным для $\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}$, не может содержать ни одной внутренней точки последнего. Этим завершается доказательство (29), а вместе с тем, следовательно, и обоих наших утверждений.

Мы, таким образом, получили геометрическое решение поставленной в § 4—5 задачи наилучшего приближения (13)—(17). Решение оказывается единственным или бесконечно-многозначным, смотря по тому, является ли точка P регулярною или особою точкою поверхности выпуклого тела $K = K_G$.

Если P — особая точка, то пусть будет

$$\xi - (z_{1s}' x_1 + z_{1s}'' y_1 + \ldots + z_{ns}' x_n + z_{ns}'' y_n) = \xi_p \quad (s = \overline{1, \lambda}) \qquad (31)$$

какая-нибудь полная система линейно независимых опорных плоскостей выпуклого тела K в точке P; это значит, что левые части уравнений этих λ плоскостей линейно независимы между собой, в то время как для любой другой опорной плоскости тела K, проходящей через эту же точку P, левая часть аналогично записанного уравнения является линейною комбинацией левых частей рассматриваемых λ плоскостей. Тогда совокупность всех $\infty^{\lambda-1}$ решений задачи наилучшего приближения (13)—(17) может быть параметрически выражена формулами

$$z_k = \sum_{s=1}^{\lambda-1} \vartheta_s z_{ks} + \left(1 - \sum_{s=1}^{\lambda-1} \vartheta_s\right) z_{k\lambda} \qquad (k = \overline{1, n};\ z_{ks} = z_{ks}' - i z_{ks}'',\ s = \overline{1, \lambda}), \quad (32)$$

где „точка" $\theta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{\lambda-1})$ пробегает некоторую выпуклую и замкнутую область E в соответствующем $(\lambda - 1)$-мерном (действительном) евклидовском пространстве, которая, во всяком случае, содержит в себе $(\lambda - 1)$-мерный симплекс с вершинами

$$\left.\begin{aligned} &\theta^{(0)} = (0, 0, 0, \ldots, 0), \quad \theta^{(1)} = (1, 0, 0, \ldots, 0) \\ &\theta^{(2)} = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \theta^{(\lambda-1)} = (0, 0, 0, \ldots, 1) \end{aligned}\right\}. \qquad (33)$$

Нетрудно убедиться еще в том, что область E ограниченная. Для этого достаточно учесть, с одной стороны, линейную независимость

---

[1] Точка $e^{-i\alpha}\bar{Q} = \bar{\bar{Q}}$, наверное, принадлежит еще телу $\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}$, — следовательно, во всяком случае принадлежит ему и точка $Q = q^{-1}\bar{\bar{Q}}$, как промежуточная между O и $\bar{\bar{Q}}$. — Перенесем наши рассмотрения в пространство $R_{2n+2} = \Phi(\mathfrak{R}_{n+1})$. Всякая плоскость U пространства R_{2n+2}, проходящая через точку $\underline{Q}$, либо пересекается отрезком $O\bar{\underline{Q}}$ и в силу этого является секущею плоскостью также и для тела $K = K_G$, либо содержит в себе весь отрезок $O\bar{\underline{Q}}$ и, в таком случае, проходя через внутреннюю точку O тела K, опять-таки заведомо является секущею плоскостью для него. Но если всякая плоскость, проходящая через точку Q, — секущая, то это и значит, что точка эта — внутренняя для тела K, а ее одноименный прообраз Q является внутренней точкой для $\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}$.

левых частей уравнений (31), а с другой стороны — факт ограниченности искомых значений самих параметров $z_k = z_{k0}$, для которых существование некоторых (поддающихся оценке) границ

$$|z_{k0}| \leqslant M_k \qquad (k=\overline{1, n}) \tag{34}$$

наперед предопределяется уже фактом линейной независимости комплексных величин $a_1, \ldots, a_n$ на $\mathfrak{G}_0$ (ср. [3], стр. 131, 141), а также может быть более наглядным образом установлено и геометрически: из того, что внутренняя для выпуклого тела $K \equiv K_G$ точка O — начало координат содержится в нем вместе с некоторой гиперсферой радиуса ε и центра O, очень легко вывести существование требуемых границ в виде

$$|z_{k0}'|, \quad |z_{k0}''| \leqslant \frac{\varrho}{\varepsilon} = \frac{\xi_P}{\varepsilon}, \quad |z_{k0}| \leqslant \frac{\varrho}{\varepsilon}\sqrt{2} \qquad (k=\overline{1, n}). \tag{35}$$

Вводя теперь обозначение H_0 для совокупности $\{z_0\}$ всех решений $z_0 = (z_{10}, \ldots, z_{n0})$ задачи (13), мы, на основе сказанного, можем отметить факт ограниченности, выпуклости и замкнутости самого точечного множества H_0 в унитарном пространстве $\mathfrak{R}_n$.

§ 9. Чтобы извлечь дальнейшие факты фундаментального значения из рассматриваемой геометрической картины решения чебышевской задачи, отметим прежде всего, что в силу одного известного общего предложения теории выпуклых множеств ([14], п. 8; см. также [5], стр. 119, 122) точечное множество $K_G \cap T$ является выпуклою оболочкою множества $G \cap T$ — разумея под T какую-нибудь (любую) из опорных плоскостей (27′). Применяя к точке P, заведомо принадлежащей $K_G \cap T$, теорему о барицентрических представлениях (§ 2), мы приходим в первую очередь к следующему предварительному результату, который в последней (количественной) части своей формулировки подвергнется ниже дальнейшему уточнению:

В пространстве $R_{2n+2} \supset K_G$ существует по крайней мере один неособенный r-вершинный ($(r-1)$-мерный) симплекс, который содержит точку P внутри (в строгом смысле), и все вершины которого расположены на G и в то же время на всякой опорной плоскости T к K_G в точке P, — следовательно, и на общем пересечении всех таких опорных плоскостей, если их имеется более чем одна; при этом число r во всяком случае подчинено неравенствам $1 \leqslant r \leqslant 2n+2$, если P — регулярная пограничная точка выпуклого тела K_G, и $1 \leqslant r \leqslant 2n+3-\lambda$, если через точку P (особую) проходит λ линейно независимых опорных плоскостей к телу K_G.

Для полного доказательства этого предложения нам придется, наряду с общей теоремой о барицентрических представлениях точек выпуклой оболочки (§ 2), учесть еще одно свойство особых пограничных точек выпуклых множеств, отмеченное нами в свое время ([5], стр. 122) при исследовании аналогичного вопроса, относящегося к чебышевской задаче в действительной области. Именно, допустим, что через рассматриваемую нами точку P проходит, кроме опорной плоскости T, о которой говорилось в начале изложения данного параграфа, еще другая опорная плоскость U к телу K_G. Упомянутая общая теорема (§ 2) обеспечивает существование некоторого неособенного симплекса $Q^{(1)}Q^{(2)}\dots Q^{(r)}$, имеющего все вершины на $G\cap T$ и содержащего точку P внутри себя (в строгом смысле). Требуется еще лишь обосновать утверждение, что этот же симплекс содержится также и в плоскости U. Но плоскость U проходит через точку P — центр тяжести r положительных масс, помещенных в $Q^{(1)},\dots,Q^{(r)}$. Если бы эта плоскость U не содержала в себе всех названных r точек, то она непременно должна была бы разделять их[1], и в таком случае она не могла бы быть опорною плоскостью, в противоречии с нашим предположением. Тем самым доказана справедливость нашего утверждения, и вместе с тем доказательство всего предложения в целом может считаться законченным.

Установленные в доказанном только что предложении, в качестве предварительной оценки, верхние границы для числа r в действительности допускают во всех случаях снижение по крайней мере на единицу — в силу следующего, уточняющего рассматриваемую картину, обстоятельства[2], которое имеет весьма существенное значение для всего дальнейшего.

Все точки множества G или даже K_G, которые лежат на какой-нибудь опорной плоскости T ((27′)), принадлежат также линейному многообразию $t=\Phi(\mathrm{t})\subset T$, где t обозначает соответствующий **(комплексный)** *опорный линейный образ* (28):

$$K_G\cap T=K_G\cap t. \tag{36}$$

Последнее легко доказывается от противного: допуская существование какой-нибудь точки Q, принадлежащей только левой части соотношения (36), но не принадлежащей правой его части, мы будем иметь в соответствующей точке $\Phi^{-1}(Q)$

$$l-\sum_{k=1}^{n} z_{k0}a_k=\xi_P+i\gamma \qquad (\gamma\neq 0)$$

и, значит, $|\delta|>\xi_P$, что, как мы уже знаем, ни в одной точке $Q\in\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}$ не может иметь места, поскольку $\xi_P=L(z_0)$.

В силу установленного сейчас уточняющего обстоятельства и выясняется немедленно, что *число r вершин указанного в формулировке предварительного результата неособенного симплекса — в действительности всегда заключено в несколько более узких пределах $1\leqslant r\leqslant 2n+1$ и, соответственно, $1\leqslant r\leqslant 2n+3-\lambda'$, где $\lambda'>\lambda$.*

В самом деле, представляется непосредственно ясным, что к уравнениям линейно независимых опорных плоскостей (31), которые все не содержат координаты η, наверное можно будет добавить, при любом

[1] Это становится ясным, если взять плоскость U за одну из координатных плоскостей и учесть инвариантность определения центра тяжести рассматриваемых масс относительно аффинных преобразований координат (ср. [5], стр. 117, 122).

[2] Следует, вместе с тем, существенным образом иметь в виду, что речь идет здесь, вообще, о существовании симплекса с данными свойствами не для всякого *значения* r в указываемых пределах, но хотя бы для одного.

значении λ, в качестве линейно независимого от них — по крайней мере одно из уравнений, доставляемых мнимыми компонентами нормальных уравнений соответствующих опорных плоскостей.

Можно заметить, с другой стороны, что при $\lambda > 2$ уже возможны линейные зависимости между уравнениями, которые доставляются мнимыми и действительными компонентами упомянутых нормальных уравнений. Ближайшее исследование, на котором мы тут не остановимся, приводит к установлению таких значений для λ':

$$\lambda' = \lambda + 1 \text{ при } \lambda \text{ нечетном,}$$
$$\lambda' = \lambda + 2 \quad ,, \quad \lambda \text{ четном.}$$

Для последующих наших рассмотрений нам достаточно будет заметить себе, что, согласно нашим заключениям, двустороннее неравенство

$$1 \leqslant r \leqslant 2n + 1 \tag{37}$$

является обеспеченным во всех случаях. В следующей главе IV мы увидим (§ 15), что число r фактически может принимать (в различных конкретных задачах) все значения в указанных пределах (37), причем (ср. § 14) крайний случай $r = 2n + 1$ может в известном смысле даже рассматриваться как основной.

Пусть будет $\tilde{Q}_1 \tilde{Q}_2 \ldots \tilde{Q}_r$ один из указанных симплексов,

$$\tilde{Q}_j = (\tilde{x}_{1j}, \tilde{y}_{1j}; \ldots; \tilde{x}_{nj}, \tilde{y}_{nj}; \tilde{\xi}_j, \tilde{\eta}_j), \qquad j = \overline{1, r}. \tag{38}$$

Тогда (§ 2), при надлежащем разложении единицы в сумму r положительных слагаемых

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_r = 1,$$

мы будем иметь следующую систему равенств:

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 \tilde{x}_{k1} + \mu_2 \tilde{x}_{k2} + \ldots + \mu_r \tilde{x}_{kr} = 0 \qquad (k = \overline{1, n}) \\ \mu_1 \tilde{y}_{k1} + \mu_2 \tilde{y}_{k2} + \ldots + \mu_r \tilde{y}_{kr} = 0 \qquad (k = \overline{1, n}) \end{aligned}\right\}, \tag{39}$$

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 \tilde{\xi}_1 + \mu_2 \tilde{\xi}_2 + \ldots + \mu_r \tilde{\xi}_r = \xi_P \\ \mu_1 \tilde{\eta}_1 + \mu_2 \tilde{\eta}_2 + \ldots + \mu_r \tilde{\eta}_r = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{39'}$$

Вводя в рассмотрение r действительных линейных форм

$$\tilde{F}_j(z', z'') \equiv \tilde{x}_{1j} z_1' + \tilde{y}_{1j} z_1'' + \ldots + \tilde{x}_{nj} z_n' + \tilde{y}_{nj} z_n'' \qquad (j = 1, r), \tag{40}$$

мы в силу (39) имеем между ними линейную зависимость

$$\mu_1 \tilde{F}_1 + \mu_2 \tilde{F}_2 + \ldots + \mu_r \tilde{F}_r = 0. \tag{41}$$

Нетрудно убедиться, что она является линейною зависимостью в узком смысле (§ 3).

Действительно, условием барицентрической независимости r точек (38) — вершин неособенного симплекса — является линейная независимость r форм Ψ_j от z_0, z_ν', z_ν'' $(\nu = \overline{1, n+1})$,

$$\Psi_j = z_0 + \tilde{x}_{1j} z_1' + \tilde{y}_{1j} z_1'' + \ldots + \tilde{x}_{nj} z_n' + \tilde{y}_{nj} z_n'' + \tilde{\xi}_j z_{n+1}' + \tilde{\eta}_j z_{n+1}'' \quad (j = \overline{1, r}), \tag{42}$$

или, принимая во внимание наряду с (27′) также (28) и (36), — линейная независимость r укороченных форм Ω_j (от переменных z_0, z_k', z_k''; $k=\overline{1, n}$),

$$\Omega_j = z_0 + \tilde{x}_{1j} z_1' + \tilde{y}_{1j} z_1'' + \ldots + \tilde{x}_{nj} z_n' + \tilde{y}_{nj} z_n'' \qquad (j=\overline{1, r}). \tag{43}$$

Но если бы линейная зависимость (41) форм (40) $\tilde{F}_j$ не была линейною зависимостью в узком смысле, то ранг матрицы их коэфициентов не мог бы, очевидно, превышать $r-2$, и, следовательно, ранг матрицы коэфициентов форм (43) не мог бы превышать $r-1$, что противоречило бы, в силу сказанного выше, факту барицентрической независимости r точек (38).

Если точка $\Phi^{-1}(\tilde{Q}_j)$ $(j=\overline{1, r})$, которую мы (согласно принятому нами общему условию) также обозначим через $\tilde{Q}_j$, принадлежит множеству $\mathfrak{S}_{Q_j}^{*}$, тогда в „замыкании“ (11*) заданной первоначально системы несовместных линейных уравнений (11) ей соответствует (при естественных обозначениях $\tilde{x}_{kj} + i\tilde{y}_{kj} = \tilde{a}_{kj}$, $\xi_j + i\eta_j = \tilde{l}_j$ уравнение

$$f(\tilde{Q}_j e^{-i\varphi_j} \mid z) \equiv \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_{kj} e^{-i\varphi_j} z_k = \tilde{l}_j e^{-i\varphi_j}. \tag{44}$$

Разумея под z_0 какое-нибудь (произвольно взятое) из решений задачи (13)—(17) и полагая

$$\tilde{a}_{kj} e^{-i\varphi_j} = a_{kj}, \quad \tilde{l}_j e^{-i\varphi_j} = l_j, \quad \tilde{Q}_j e^{-i\varphi_j} = Q_j,$$

$$f(\tilde{Q}_j \mid z) = \tilde{f}_j(z), \quad f(Q_j \mid z) = f_j(z); \quad \delta(\tilde{Q}_j, z_0) = \tilde{\delta}_{j0}, \quad \delta(Q_j, z_0) = \delta_{j0},$$

мы, прежде всего, в силу самого способа выбора точек $\tilde{Q}_j$, имеем (ср. (36), (28) и (29))

$$\tilde{\delta}_{j0} = \xi_j = L(z_0) = \varrho \qquad (j=\overline{1, r}). \tag{45}$$

Система уравнений (44) при $j=\overline{1, r}$ перепишется в виде

$$f_j(z) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} z_k = l_j \qquad (j=\overline{1, r}). \tag{44′}$$

Соответствующие же этим уравнениям уклонения при $z=z_0$, по абсолютной величине также равные $L(z_0)=\varrho$, будут выражаться комплексными числами

$$\delta_{j0} = \tilde{\delta}_{j0} e^{-i\varphi_j} = \varrho e^{-i\varphi_j} = \varrho \operatorname{sgn} \delta_{j0} = L(z_0) \operatorname{sgn} \delta_{j0} \qquad (j=\overline{1, r}). \tag{46}$$

Заметим надалее, что самые множители $e^{i\varphi_j}$ $(j=\overline{1, r})$, которые служат для (обратного) перехода от Q_j, $f_j(z)$, δ_{j0} соответственно к $\tilde{Q}_j$, $\tilde{f}_j(z)$, $\tilde{\delta}_{j0}$, выражаются отсюда в виде

$$e^{i\varphi_j} = \operatorname{sgn} \delta_{j0} \qquad (j=\overline{1, r}). \tag{47}$$

Линейной зависимости (41) между действительными формами $\tilde{F}_j(z', z'')$ соответствует, очевидно, линейная зависимость с такими же положительными коэфициентами μ_j между комплексными линейными формами $\tilde{f}_j(z)$ $(j=\overline{1, r})$:

$$\mu_1 \tilde{f}_1(z)+\mu_2 \tilde{f}_2(z)+\ldots+\mu_r \tilde{f}_r(z)\equiv 0. \tag{48}$$

Но отсюда непосредственно вытекает и для левых частей $f_j(z)$ соответствующих уравнений (44′) системы (11*) следующая *линейная зависимость с ориентированными комплексными коэфициентами*:

$$\mu_1 \operatorname{sgn} \bar{\delta}_{10} \cdot f_1(z) + \mu_2 \operatorname{sgn} \bar{\delta}_{20} \cdot f_2(z) + \ldots + \mu_r \operatorname{sgn} \bar{\delta}_{r0} f_r(z) = 0. \tag{49}$$

$$(\mu_j > 0,\ j=\overline{1, r})$$

То отмеченное нами ранее обстоятельство, что соотношение (41) являлось линейною зависимостью в узком смысле, оказывается теперь эквивалентным следующему факту: линейная зависимость с ориентированными комплексными коэфициентами (49) является здесь *неприводимою* в том смысле, что между комплексными формами $f_j(z) \cdot \operatorname{sgn} \bar{\delta}_{j0}$ $(\equiv \tilde{f}_j(z))$ заведомо не существует никакой другой линейной зависимости с действительными коэфициентами k_j при меньшем числе членов — уже независимо от знаков k_j (но, разумеется, при условии $\Sigma k_j^2 > 0$)[1].

Подсистемы уравнений (44′) *замкнутой системы* (11*), *левые части которых связаны неприводимой линейной зависимостью (с ориентированными комплексными коэфициентами) вида* (49) *при*

$$|\delta_{j0}| \equiv |\delta(Q_j, z_0)| \equiv |l_j - f_j(z_0)| = L(z_0) \qquad (j=\overline{1, r})^{2}, \tag{50}$$

мы называем (ср. [4]) *неприводимыми чебышевскими подсистемами*.

Более общим образом мы говорим о *чебышевских подсистемах* (не обязательно неприводимых) замкнутой системы (11*), когда точки $\Phi(\tilde{Q}_j)$, где $\tilde{Q}_j = Q_j \cdot \operatorname{sgn} \bar{\delta}_{j0}$ $(j=\overline{1, r})$, представляют собой не обязательно совокупность вершин неособенного симплекса, а любую конечную совокупность точек, принадлежащих какому-нибудь множеству

$$G \cap T = G \cap t \tag{51}$$

(ср. (27′) и (36)), через которые точка P ((25)) представима барицентрически формулами вида (39)—(39′) с существенно положительными коэфициентами μ_j. *Аналитически чебышевская подсистема уравнений системы* (11*) *характеризуется*[3] *опять-таки тем, что левые*

---

[1] Едва ли необходимо разъяснять, что здесь речь отнюдь не идет о линейной зависимости в узком смысле (§ 3) между комплексными формами $\tilde{f}_j(z)$, так как числовые множители $k_j \operatorname{sgn} \bar{\delta}_{j0}$, при фиксированных δ_{j0} $(j=\overline{1, r})$ не являются произвольными комплексными числами.

[2] Это условие (50) является сжатою записью совокупности двух условий (56) и (57) (см. ниже).

[3] Мы этим хотим сказать, что указываемые в нижеследующей формулировке текста условия, где под z_0 в (50) разумеется какое-нибудь данное решение задачи (13), являются также и достаточными для того, чтобы составленная из рассматриваемых r уравнений подсистема была чебышевскою: в этом нетрудно убедиться, учитывая (27′), (28), (29) наряду с (39)—(39′).

части составляющих ее r уравнений[1] *связаны линейной зависимостью с ориентированными коэфициентами вида* (49) *при тех же условиях* (50), — *только эта зависимость в общем случае не должна быть непременно неприводимою.* Как мы далее увидим (§ 10, пункт *ж*), эта аналитическая характеристика может рассматриваться как само определение чебышевских подсистем, если даже заранее не считать известным, что z_0 является решением задачи (13). Пока мы, однако, на этот последний факт не будем опираться.

Условимся еще всякую точку $Q \in \mathfrak{G}_0^*$, изображающую уравнение системы (11*), принадлежащее к какой-нибудь чебышевской подсистеме (при некотором задании решения z_0), называть *чебышевскою точкою уклонения* задачи (13).

В ближайшем параграфе (§ 10) мы выясним некоторые важнейшие свойства чебышевских подсистем и чебышевских точек уклонения, включая установление аналога теоремы Чебышева-Маркова.

§ 10. а) Прежде всего следует отметить, что *определение чебышевских подсистем (уравнений системы* (11*)) *и чебышевских точек уклонения не зависит от частного выбора опорной плоскости T* ((27)) *или, иначе говоря, от частного выбора решения задачи наилучшего приближения* (13).

Для доказательства этого важного факта нам придется лишь повторить почти дословно соответствующее краткое рассуждение, уже примененное нами, при условиях лишь несущественно отличающихся от данных, в начале § 9: любая плоскость U, проходящая через точку P ((25)) — центр тяжести положительных масс μ_j, помещенных в точках $\Phi(Q_j \operatorname{sgn} \delta_{j0}) = \tilde{Q}_j \in G \cap T = G \cap t$ $(j=\overline{1, r})$, — должна либо содержать и все упомянутые точки $\tilde{Q}_j$, либо разделять их, но в последнем случае она не может быть опорною плоскостью тела K_G.

В связи с этим мы замечаем также, что *уклонение* $\delta_{j0} = \delta(Q_j, z_0)$ $(j = \overline{1, r})$, *соответствующее какому-нибудь уравнению чебышевской подсистемы, является, независимо от частного выбора решения z_0, вполне определенным не только по модулю* $(|\delta_{j0}| = \varrho)$, *но и по аргументу* $(\operatorname{sgn} \delta_{j0} = e^{-i\varphi_j}$, *если* $\tilde{Q}_j \in G^*_{\varphi_j})$.

б) Из соображения, с помощью которого было обосновано первое утверждение предыдущего пункта *а*, следует, между прочим, что через точку P не может быть проведена никакая собственная опорная плоскость (§ 1) к выпуклой оболочке системы r точек $\{\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \ldots, \tilde{Q}_r\}$. Следовательно, точка P является внутреннею точкою упомянутой выпуклой оболочки — относительно наименьшего вмещающего ее подпространства $R_{(2n+2)-r}$. Но в таком случае применение указанной в § 2 уточненной теоремы о барицентрических представлениях внутренних точек выпуклой оболочки приводит немедленно к следующему дальнейшему результату: *уравнение, изображаемое какою-нибудь чебышевскою точкою уклонения Q_j задачи* (13), *где* $Q_j \in \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_r\}$, *всегда принадлежит по крайней мере к одной неприводимой чебышевской под-*

[1] Тут число r уже, конечно, отнюдь не подлежит ограничению $r \leqslant 2n + 1$ ((37)).

системе, составленной из некоторых r' ($r' \leqslant r$) уравнений рассматриваемой чебышевской подсистемы r уравнений $\{Q_1, Q_2, \ldots, Q_r\}$.

Обратно, любое конечное число чебышевских точек уклонения задачи (13) всегда можно рассматривать как относящееся к одной чебышевской подсистеме уравнений: для этого достаточно объединить соответствующие рассматриваемым точкам (неприводимые) чебышевские подсистемы в одну (уже, вообще, „приводимую") подсистему путем объединения соответствующих им линейных соотношений вида (49) в единое соотношение того же вида, имеющее своей левой частью среднее арифметическое (обыкновенное или взвешенное) левых частей отдельных соотношений, умноженное, если угодно, на произвольную положительную постоянную.

в) Результаты пункта a показывают, что все чебышевские точки уклонения задачи (13) принадлежат к числу *фиксированных точек уклонения* этой задачи: последнее название мы дасм всякой точке $Q = (a_1, \ldots, a_n, l) \in \mathfrak{G}_0^*$, удовлетворяющей тому условию, что соответствующее ей уклонение $\delta(Q, z_0)$ принимает для всех решений z_0 задачи (13) одно и то же, по модулю максимальное, значение $\varrho e^{\varphi i} = L(z_0) e^{\varphi i}$; что касается при этом значения аргумента φ, то, не завися, по смыслу данного определения, от возможного частного выбора решения z_0, оно для разных фиксированных точек уклонения будет, вообще, различным. — Добавим, что в случае единственности решения задачи (13) мы в формальном согласии с этим определением можем все точки уклонения трактовать как фиксированные, и к этому побуждает нас то обстоятельство, что понятие чебышевских точек уклонения, без каких-либо оговорок, полностью сохраняет силу и в этом случае.

Наряду с фиксированными точками уклонения для различных решений z_0 задачи (13) мы можем иметь (ср., например, [3], стр. 139, а также некоторые примеры в главе IV, § 13 и 15 данной работы) и какие-нибудь *„подвижные"* точки уклонения Q, удовлетворяющие условию $|\delta(Q, z_0)| = \varrho$ лишь для некоторых решений z_0 задачи (13) — притом, возможно, при непостоянном (зависящем и от выбора z_0) $\operatorname{sgn} \delta$.

Из фактов, связанных с общим понятием фиксированных точек уклонения, можно, прежде всего, отметить следующий: *если хотя бы для одного решения $z_0 = \hat{z}_0$ число точек уклонения (т. е. точек $Q \in \mathfrak{G}_0^*$, для которых $|\delta(Q, \hat{z}_0)| = \varrho$) оказывается конечным, то между решениями z_0 найдется и такое, для которого совокупность всех точек уклонения исчерпывается одними фиксированными (являясь, таким образом, по своему составу минимальным)*[1].

Чтобы в этом убедиться, достаточно учесть, что, если для решения $\hat{z}_0$ имеются в числе точек уклонения и подвижные, то эти последние могут быть устранены конечным числом операций последовательного образования средних арифметических (обыкновенных или взвешенных) между различными решениями: образуя среднее арифметическое, ска-

[1] Вопросы этого рода, впервые выдвинутые в известном сочинении В. А. Маркова [16], для некоторых частных задач апроксимации в действительной области рассматривались подробнее Я. А. Шохатом [17] (см. также [18]).

жем, исходного решения $\hat{z}_0$ и какого-нибудь другого решения, для которого хотя бы одна из подвижных точек уклонения, соответствующих решению $\hat{z}_0$, утрачивается или фигурирует с другим значением $\operatorname{sgn} \delta$, мы приходим к новому решению $\hat{\hat{z}}_0$, уже освобожденному от некоторых точек уклонения; с ним поступаем аналогично и т. д.

На основе аналогичных соображений очень легко устанавливается также тот факт, что при рассматриваемом условии *подмножество упомянутых решений, для которых отсутствуют подвижные точки уклонения, имеет всегда такую же мощность, как и множество всех решений данной чебышевской задачи* (13). Это значит, что либо задача (13) вообще имеет лишь одно решение, либо решения без подвижных точек уклонения уже сами по себе составляют совокупность мощности континуума.

Определенное нами в предыдущем параграфе (§ 9) понятие чебышевских точек уклонения выделяет ту основную и наиболее важную по своим свойствам категорию фиксированных точек уклонения, которую, в частности, легче всего распознавать — на основе условий, характеризующих чебышевские подсистемы.

В следующей главе IV (§ 13) мы будем иметь случай в двух пунктах дополнить по существу настоящие наши рассмотрения: во-первых, установлением того факта, что для конечных систем (11) с вещественными данными чебышевскими точками уклонения исчерпывается вся совокупность возможных фиксированных точек уклонения, и, во-вторых, указанием примеров фиксированных, но не чебышевских точек уклонения — для задач, относящихся к бесконечной системе (11) или же к конечной, но с комплексными данными.

г) С чебышевскими точками уклонения, поскольку они заведомо являются фиксированными, оказываются тесно связанными некоторые факты, относящиеся к вопросам единственности решения чебышевской задачи (13).

Если в числе чебышевских точек уклонения задачи (13) *можно найти n точек Q_j, $j = \overline{1, n}$* (относящихся, возможно, и не к одной и той же неприводимой чебышевской подсистеме) *таких, что левые части соответствующих уравнений системы* (11*) *линейно независимы между собой* (т. е. детерминант, составленный из соответствующих чисел a_{kj}, где $k = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$, отличен от нуля), *то решение чебышевской задачи* (13), *очевидно, является, наверное, единственным.* К этому можно добавить, что в случае конечной системы (11) с вещественными данными это условие является и необходимым (ср. конец предыдущего пункта и соответствующий результат в § 13, а также пункт *з* данного параграфа) [1].

Если, в частности, известно, что в системе (11*) (конечной или бесконечной и с какими угодно, вообще комплексными, данными) любые n

[1] В случае системы (11) бесконечной или с комплексными данными указанное условие отнюдь не является необходимым: см. пример (54) в этом же пункте и второй из двух примеров конечных систем (11) с комплексными данными в § 13 (гл. IV).

уравнений имеют левые части линейно независимые между собой (это соответствует условию Хаара-Колмогорова [6, 9] для полиномиальной задачи апроксимации непрерывных функций), тогда единственность решения является наверное обеспеченною (без дальнейшего учета значений правых частей уравнений): действительно, в этом случае для любой чебышевской подсистемы, с одной стороны, число линейных форм, связанных соответствующим соотношением (49), не может, очевидно, быть меньшим, чем $n+1$ [1], а, с другой стороны, — любые n из них являются заведомо линейно независимыми.

Еще заслуживают быть отмеченными случаи, когда для задачи (13) общего типа число уравнений в какой-нибудь неприводимой чебышевской подсистеме оказывается равным $2n+1$ или $2n$. Тогда, поскольку ранг соответствующей системы действительных линейных форм (40) [2] здесь равен $2n$ или $2n-1$, ранг системы соответствующих комплексных форм $\sum_{k=1}^{n} a_{kj} z_k$ $(j=\overline{1, 2n+1},$ или $1, 2n)$, как нетрудно видеть, не может быть меньше n [3] (т. е. должен быть равен n), — следовательно, выполняется условие, обеспечивающее единственность решения задачи (13). То же самое в этих случаях следует и непосредственным образом из геометрических соображений, поскольку $2n$-мерный или $(2n-1)$-мерный неособенный симплекс пространства R_{2n+2} очевидным образом не может лежать на изображениях двух различных комплексных опорных линейных образов t (ср. (36) и последующие абзацы в § 9).

С другой стороны, следует заметить, что *в задаче* (13) *общего типа единственность решения может иметь место (независимо от значения числа n) при наличии даже всего лишь одной точки уклонения.* Так,

---

[1] Следовательно, для таких чебышевских задач, типа классической полиномиальной, в соответствующих неравенствах (37) для числа r (уравнений в неприводимой чебышевской подсистеме) нижняя граница 1 может быть заменена на $n+1$.

[2] Под *рангом системы линейных форм* (действительных или комплексных) мы, вообще, разумеем ранг матрицы коэфициентов этих форм.

[3] Более общим образом, если из m форм $f_j(z) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} z_k$ $(j=\overline{1, m})$, где для простоты записи берем характеристики f без черточки, предположим первые s форм линейно независимыми, а остальные представимыми в виде их линейных комбинаций (с комплексными коэфициентами), тогда, как легко видеть, соответствующие m действительных форм

$$\operatorname{Re} f_j(z) = F_j(z', z'') = \sum_{k=1}^{n} (x_{kj} z_k' + y_{kj} z_k'') \qquad (j=\overline{1, m}) \tag{52}$$

выражаются линейными комбинациями (с действительными коэфициентами) первых s форм (52) и s сопряженно связанных с ними форм $\sum_{k=1}^{n} (y_{kj} z_k' - x_{kj} z_k'')$ $(j=\overline{1, s})$ — откуда непосредственно усматривается, что ранг s' системы m действительных форм (52) должен удовлетворять неравенствам

$$s \leqslant s' \leqslant 2s. \tag{53}$$

например, в случае множества $\mathfrak{G}_0=\mathfrak{G}_0^*$, определяемого условиями

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\leqslant 1\\ &l=\sqrt{1-\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2}\ \text{(арифметический корень)}\end{aligned}\right\}, \tag{54}$$

единственным решением задачи (13) будет $z_0=(0, 0, \ldots, 0)=\theta$ при $\varrho=1$ и при одной лишь чебышевской точке уклонения $a_1=a_2=\ldots=a_n=0$, $l=1$: для любого другого набора значений параметров $z\neq\theta$ мы, как легко убедиться, будем иметь $L(z)>1$. Действительно предполагая, для некоторого значения k $(1\leqslant k\leqslant n)$, $z_k\neq 0$, мы в точке $a_k=-\varepsilon\operatorname{sgn}\bar{z}_k$, $a_1=\ldots=a_{k-1}=a_{k+1}=\ldots=a_n=0$, $l=\sqrt{1-\varepsilon^2}$ будем иметь $l-f(z)=\sqrt{1-\varepsilon^2}+\varepsilon|z_k|>1$ при достаточно малом $\varepsilon>0$.

д) Дальнейшее выяснение фактов, в наибольшей мере определяющих особо важное значение чебышевских подсистем, будет связано, в первую очередь, со следующим предложением, которое можно рассматривать как одну из возможных формулировок аналога теоремы Чебышева-Маркова для изучаемой нами задачи:

Всякое решение $z=z_0$ задачи наилучшего приближения (13) *для заданной системы несовместных уравнений* (11) *является одновременно решением аналогичной задачи наилучшего приближения для любой — и, значит, по меньшей мере для одной — чебышевской подсистемы, притом с таким же самым значением величины наилучшего приближения ϱ. Число уравнений в упомянутой подсистеме, если угодно, всегда может быть предположено не превышающим $2n+1$.*

Справедливость последнего добавления к теореме непосредственно вытекает, разумеется, из известного уже нам факта существования неприводимых чебышевских подсистем.

Доказательство самой теоремы, на основе установленной в предыдущих параграфах геометрической картины вопроса, не составит труда и будет указано в следующем пункте *е*. — Предварительно напомним, резюмируя данное выше определение, что под чебышевской подсистемой разумеем любую конечную подсистему уравнений замкнутой системы (11*)

$$f_j(z)=f(Q_j\,|\,z)=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}z_k=l_j\qquad (j=\overline{1, r}), \tag{55}$$

левые части которых связаны линейной зависимостью вида

$$\sum_{j=1}^{r}\mu_j\operatorname{sgn}\delta_{j0}\cdot f_j(z)=0\qquad (\mu_j>0,\ j=\overline{1, r}) \tag{49}$$

при

$$\delta_{j0}=\delta(Q_j, z_0)=l_j-f_j(z_0)\qquad (j=\overline{1, r}) \tag{56}$$

и при условии

$$|\delta_{10}|=|\delta_{20}|=\ldots=|\delta_{r0}|=L(z_0). \tag{57}$$

По точному смыслу резюмированного здесь определения (ср. § 9, конец) мы под z_0 в (56)—(57) должны разуметь какое-нибудь из решений задачи (13) (существование же решения было уже доказано в § 8). Но ниже (пункт *ж*) мы убедимся в том, что при выполнении соотношений (49), (56) и (57) набор значений параметров $z = z_0 = (z_{10}, \ldots, z_{n0})$ непременно представит собою решение данной задачи (13), если даже этого заранее и не предполагать — и это практически весьма важное обстоятельство будет явным образом отражено в формулировке второго — наиболее прямого аналога теоремы Чебышева-Маркова, которая будет дана в пункте *ж*. Внимательное сличение обоих аналогов позволит без труда убедиться в том, что они логически весьма близко связаны между собой, не будучи в то же время ни эквивалентными, ни подчиненными один другому.

Для первого аналога теоремы Чебышева-Маркова мы ниже, в пункте *з*, будем иметь возможность отметить еще другой вариант его формулировки, который в некоторых рассмотрениях может оказаться предпочтительным.

е) Доказательство первого аналога теоремы Чебышева-Маркова. Заметим прежде всего, что, если $z = z_0$ является решением данной задачи (13), то согласно результатам § 9 найдется в замкнутой системе уравнений (11*) по крайней мере одна чебышевская подсистема (55), геометрически изображаемая системою r точек $\{Q_1, \ldots, Q_r\} = \mathfrak{G}_0^{(0)} \subset \mathfrak{G}_0^*$: если угодно, подсистему (55) можно даже всегда предположить неприводимою, но это для нашего рассуждения несущественно.

Для этого точечного множества $\mathfrak{G}_0^{(0)}$ мы можем построить соответствующие множества $\mathfrak{G}_\varphi^{(0)}$, $\mathfrak{G}^{(0)} = \bigcup_{\varphi=0}^{2\pi} \mathfrak{G}_\varphi^{(0)}$, $\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}^{(0)}}$, и в качестве их образов в R_{2n+2} множества $G_\varphi^{(0)}$, $G^{(0)}$, $K_{G^{(0)}}$, — подобно тому, как это было сделано в § 2 для множества $\mathfrak{G}_0^*$. Выпуклое множество $K_{G^{(0)}}$ здесь уже не будет обязательно $(2n+2)$-мерным. Пусть будет $R' = R'_{2n+2-\nu}$ наименьшее содержащее его подпространство. Заметим притом, что, очевидно, $K_{G^{(0)}} \subset K_G$. Подобно тому, как в § 6, мы легко убедимся, что начало координат O является внутренней точкой множества $K_{G^{(0)}}$ относительно R' [1]. С другой стороны, этому множеству заведомо будет принадлежать, и притом в качестве пограничной (относительно R') точки его, та же точка P ((25)), как центр тяжести положительных масс μ_j, распределенных в соответствующих r точках $\tilde{Q}_j = \Phi(Q_j \operatorname{sgn} \bar{\delta}_{j0}) \in K_{G^{(0)}}$ $(j = \overline{1, r})$. Опорная плоскость T (27′) к выпуклому телу K_G в точке P, поскольку она заведомо не содержит начала координат, наверное, является собственною (§ 1) опорною плоскостью и для $K_{G^{(0)}}$. Следовательно, соответствующий комплексный линейный образ (28) является опорным линейным образом и для $\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}^{(0)}}$. Рассуждение, примененное в § 7 и 8 к телу $\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}$ в связи с задачей (13), в своем существенном содержании остается полностью в силе и для выпуклого множества $\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}^{(0)}}$, в связи с аналогичной задачей наилучшего

---

[1] В данном случае достаточно учесть (ср. § 1), что через O не может проходить никакая собственная опорная плоскость к $K_{G^{(0)}}$, этот же факт устанавливается непосредственно.

приближения для рассматриваемой нами чебышевской подсистемы (55), и, следовательно, значения коэфициентов z_{k0} при комплексных координатах a_k $(k=\overline{1, n})$ в (28) доставляют решение (или одно из решений) и для этой последней задачи.

Поскольку все сказанное справедливо для всякой опорной плоскости (27′) к телу K_G в точке P и соответствующего опорного линейного образа (28) к $\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}$, и поскольку величина наилучшего приближения $\varrho = \xi_P$ остается одна и та же для системы (11*) в целом и для любой рассматриваемой подсистемы (55), то мы видим, что предложение полностью доказано.

ж) **Второй аналог теоремы Чебышева-Маркова.** Когда дается некоторый, требующий еще исследования, набор значений параметров $z_0 = (z_{10}, \ldots, z_{n0})$, один из основных вопросов должен заключаться как раз в умении определить, является ли он решением задачи (13). Как следует из предыдущего, необходимым признаком для того, чтобы z_0 было решением, является существование в системе (11*) хотя бы одной подсистемы уравнений (55), для которых соответствующие формы $f_i(z)$ связаны линейною зависимостью вида (49) при условиях (56)—(57). Но этот же признак является и достаточным. Действительно, переходя и здесь также от точек Q_j к $\tilde{Q}_j = \Phi(Q_j \operatorname{sgn} \delta_{j0})$ $(j=\overline{1, r})$ и учитывая, наряду с (49)—(48), выражения для $\tilde{\xi}_j, \tilde{\eta}_j$, получаемые с помощью действительного и мнимого компонентов равенств $\tilde{l}_j - \tilde{f}_j(z_0) = L(z_0) = L$ (вытекающих из сопоставления (56) и (57)), мы убеждаемся, что точка $(0, 0; \ldots; 0, 0; L, 0)$, как центр тяжести системы r положительных масс μ_j, помещенных в точках $\tilde{Q}_j$, наверное должна принадлежать выпуклому телу K_G. Из этого же, на основании общего геометрического результата § 7, непосредственно следует для рассматриваемой задачи (13) неравенство $\varrho \geqslant L = L(z_0)$, которое возможно лишь при $L(z_0) = \varrho$, что и доказывает достаточность признака. Нами, таким образом, установлена следующая теорема (аналог теоремы Чебышева-Маркова).

Для того чтобы набор значений параметров $z = z_0 = (z_{10}, \ldots, z_{n0})$ давал решение задачи наилучшего приближения (13), *необходимо и достаточно, чтобы система* (11*) *содержала хотя бы одну подсистему r уравнений* (55), *левые части которых связаны линейною зависимостью вида* (49) *при условиях* (56)—(57). *Число r (как и в формулировке пункта д) может быть всегда подчинено неравенствам* $1 \leqslant r \leqslant 2n+1$[1].

з) Сопоставление результатов предыдущих двух пунктов *е* и *ж* естественно приводит к постановке такого вопроса: допустим, что, применяя критерий, установленный в пункте *ж*, мы при $z = z_0$ обнаружили в системе (11*) наличие некоторой чебышевской подсистемы (55); требуется найти совокупность всех решений задачи наилучшего приближения для самой подсистемы уравнений (55), зная a priori одно решение z_0. Значение этого

[1] В частности, для задач типа классической полиномиальной (ср. пункт *е*) будем иметь более тесные границы $n+1 \leqslant r \leqslant 2n+1$.

вопроса определяется тем, что среди этих решений будут находиться все искомые решения задачи (13) для заданной системы уравнений (11) — согласно теореме пунктов *д—е*.

Ответ на поставленный вопрос получается непосредственно, если учесть (ср. следующий абзац), что, в силу той же теоремы пунктов *д—е*, соответствующие r точек Q_j являются чебышевскими (следовательно, фиксированными) точками уклонения также и для задачи, которая сейчас поставлена для самой подсистемы (55). Разумея под δ_{j0} $(j = \overline{1, r})$ значения (56), определенные с помощью известного здесь заранее решения z_0, мы должны лишь разрешить относительно $z_1, \ldots, z_n$ систему линейных уравнений

$$l_1 - f_1(z) = \delta_{10}, \ldots, l_r - f_r(z) = \delta_{r0}, \tag{58}$$

которой заведомо точно удовлетворяет один уже известный набор значений $z = z_0$. Система имеет $\infty^{n-\varkappa}$ решений, где $\varkappa$ — ранг матрицы $\| a_{kj} \|$, $k = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, r}$ $(\infty^{n-n} = 1$ при $\varkappa = n)$. Они и дают требуемую совокупность всех решений задачи наилучшего приближения для системы (55) (ср. [4], п. 4°).

Попутно мы установили еще одно заслуживающее внимания свойство чебышевских подсистем: *всякая чебышевская подсистема r уравнений* (55) *системы* (11*) *является также и для себя самой чебышевскою подсистемою (несобственною)*. „Для себя самой" означает здесь — для задачи типа (13), при замене в самой формулировке последней множества $\mathfrak{G}_0^*$ его подмножеством r точек Q_j, соответствующих уравнениям (55). В этом смысле мы всякую чебышевскую подсистему (55), рассматриваемую самостоятельно как систему несовместных линейных уравнений, можем называть также *чебышевскою системою*. Последнее название сохраняет смысл и в том случае, если эта же система (55) окажется включенной в другую „замкнутую" систему уравнений типа (11*), с бо́льшим значением ϱ, для которой, следовательно, (55) уже не будет чебышевской подсистемой.

Пользуясь определенным только что понятием, можно дать новый вариант первого аналога теоремы Чебышева-Маркова в такой формулировке:

Величина наилучшего приближения ϱ для задачи (13) *совпадает с наибольшим значением величины наилучшего приближения $\varrho' = \varrho'[\{Q_j\}]$ для аналогичных задач, относящихся к различным неприводимым чебышевским системам $f_j(z) = f(Q_j | z) = l_j$ $(j = \overline{1, r};\ 1 \leqslant r \leqslant 2n+1$ [1]$)$, которые могут быть выделены из системы* (11*).

Это предложение характеризует, очевидно, более точным образом тот факт, который в частном случае действительной области составлял содержание известных формулировок „δ-варианта" теоремы Чебышева (см. Введение).

и) В связи с разрешенным только что вопросом естественно выдвигается еще следующий близко связанный с ним. Допустим, что из си-

[1] $n+1 \leqslant r \leqslant 2n+1$ в случае задач типа классической полиномиальной (ср. пункт *г*).

стемы (11*) взята наудачу некоторая (несовместная) подсистема

$$f_j(z) = f(Q_j|z) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} z_k = l_j \qquad (j = \overline{1, r}), \tag{55'}$$

о которой заранее неизвестно даже, является ли она чебышевскою — так же, как не дано заранее и никакого набора значений параметров $z = z_0$, который можно было бы рассматривать как возможное (подлежащее исследованию) решение задачи (13) для системы (11*) или аналогичной задачи для самой данной подсистемы (55'). Нельзя ли попытаться и при таких условиях, обобщая, насколько возможно, примененный нами в предыдущем пункте з алгебраический образ действий, найти совокупность решений задачи наилучшего приближения типа (13) для данной системы r несовместных уравнений (55'), рассматриваемой самостоятельно взамен целой системы (11*)? Если при этом подтвердится, что эта система (55') является чебышевскою (ср. конец пункта з), то в качестве дальнейшей — более легкой, вообще говоря, задачи мы могли бы разрешить и вопрос о том, является ли она чебышевскою подсистемою для системы уравнений (11*) в целом — с очевидным в таком случае использованием для окончательного разрешения задачи (13).

Необходимым условием для того, чтобы данная система (55') могла оказаться чебышевскою, является, очевидно, наличие какой-нибудь линейной зависимости с комплексными (не подчиненными заранее требованию какой-либо специальной „ориентации“) множителями c_j:

$$\sum_{j=1}^{r} c_j f_j(z) = 0 \qquad (c_j \neq 0, \;\; j = \overline{1, r}). \tag{59}$$

Допустим, что такая линейная зависимость имеет место. Результат решения вопроса, рассмотренного в пункте з, естественно подсказывает в таком случае ввести в рассмотрение систему алгебраических уравнений (линейных относительно $\{z_k\}$)

$$l_j - f_j(z) = L' \operatorname{sgn} \bar{c}_j \qquad (j = 1, r), \tag{60}$$

где в силу (59), как легко видеть, должно положить

$$L' = \frac{\sum\limits_{j=1}^{r} c_j l_j}{\sum\limits_{j=1}^{r} |c_j|}. \tag{61}$$

Одно из уравнений (60), например, последнее, можно будет при этом рассматривать как следствие остальных в силу (59). Возможность дальнейших положительных заключений существеннейшим образом зависит от того, окажется ли система уравнений (60) совместною. Эта система заведомо будет совместною, если соотношение (59) является линейною зависимостью в узком смысле (§ 3).

Всякий раз, когда система уравнений (60) является совместною, мы из тождества (относительно z)

$$\sum_{j=1}^{r} c_j\delta_j = \sum_{j=1}^{r} c_j[l_j - f_j(z)] \equiv \sum_{j=1} c_j l_j = \text{const}, \tag{62}$$

являющегося прямым следствием соотношения (59), без труда усматриваем, что величина наилучшего приближения для данной системы (55′) как раз равна

$$|L'| = \frac{\left|\sum\limits_{j=1}^{r} c_j l_j\right|}{\sum\limits_{j=1}^{r} |c_j|}, \tag{61′}$$

причем искомая совокупность самих решений задачи наилучшего приближения типа (13) для рассматриваемой системы несовместных уравнений (55′) точно совпадает с совокупностью решений системы совместных алгебраических уравнений (60): при нарушении уравнений (60) неизбежно окажется, в силу (62), $|\delta_j| > |L'|$ хотя бы для одного из значений $j = 1, 2, \ldots, r$. Поскольку соотношение (59) не нарушается, если помножим все коэфициенты c_j на один и тот же множитель $\operatorname{sgn} \overline{L}'$, мы легко убеждаемся теперь (сличая (59), (60) с (49), (56), (57)), что в случае совместности уравнений (60) рассматриваемая система несовместных линейных уравнений (55′) является чебышевскою системою, причем совокупность всех решений соответствующей этой системе задачи наилучшего приближения мы в данном случае оказываемся в состоянии найти, не зная наперед ни одного из ее решений (но имея в своем распоряжении нужный набор значений множителей c_j в (59), обеспечивающий одновременно и совместность уравнений (60)).

Условимся систему несовместных уравнений вида (55′), левые части которых связаны линейным соотношением вида (59), называть *элементарною* (ср. [4]), если это соотношение является линейною зависимостью в узком смысле (§ 3). Элементарные системы (55′), согласно предыдущему, всегда являются чебышевскими (системами, но, конечно (ср. конец пункта з) еще необязательно чебышевскими подсистемами для $(11^*) \supset (55')$). При этом элементарные системы — единственные, для которых набор значений c_j (отличных от нуля), обеспечивающий тождественное выполнение соотношения (59), является однородно-определенным (т. е. определенным с точностью до общего множителя) и, будучи вычислен с помощью рациональных алгебраических операций по заданным коэфициентам уравнений (55′), заведомо обеспечивает уже и совместность уравнений (60).

Для „неэлементарной“ системы (55′) соответствующая система уравнений (60) оказывается, вообще, противоречивою — даже в том случае, когда система (55′) в действительности является чебышевскою, но набор значений множителей c_j, обеспечивающий лишь выполнение соотношения (59), взят наудачу (ср., однако, нижеследующий абзац). Источник основных усложнений для задачи (13) в комплексной области заключается как раз в том, что здесь, в отличие от аналогичной задачи в действительной области, класс неприводимых чебышевских систем существенно шире класса элементарных систем — в то время как в действительной области оба класса точно совпадают.

Для системы r несовместных уравнений (55′), которая является чебышевскою, не будучи элементарною, составление соответствующей системы (60) — совместной и решающей чебышевскую задачу для (55′) — получается непосредственно и „автоматически", именно — полагая $\operatorname{sgn} \bar{c}_j = \operatorname{sgn} \delta_{j0}$, если каким бы то ни было образом нам станут известны „комплексные знаки" $\operatorname{sgn} \delta_{j0} = \operatorname{sgn}[l_j - f_j(z_0)]$ уклонений, обнаруживаемых данными уравнениями $f_j(z) = l_j$ $(j = \overline{1, r})$ при подстановке в них вместо z решения z_0 задачи типа (13) для самой системы (55′). С первого взгляда это замечание могло бы показаться практически бесполезным, но его придется несколько поиному оценить, если рассматривать систему (55′) как часть системы (11*), в связи с применением какого-нибудь заведомо сходящегося процесса последовательных приближений для фактического построения решения самой задачи (11)—(13) (ср. [2], а также § 14 данной работы). Если данная чебышевская система (55′), обладая наибольшим возможным значением $\varrho'[\{Q\}]$ (ср. пункт *з*), является неприводимою чебышевскою подсистемою для (11*) в целом, это, вообще говоря, обнаружится [1] в рассматриваемом вычислительном процессе (ср. § 14), причем значения $\delta_j = l_j - f_j(z^{(N)}) = \delta_{jN}$, где $\{z^{(N)}\}$ $(N = 1, 2, 3, \ldots)$ — последовательные приближенные решения задачи (13) в упомянутом процессе, будут стремиться в пределе к δ_{j0} $(j = \overline{1, r})$. — Беря $\operatorname{sgn} \bar{c}_j = \operatorname{sgn} \delta_{jN}$, при „достаточно больших" значениях N, мы будем иметь приближенно-совместные уравнения (60) наряду с выполняемым точно (при $r = 2n + 1$) или приближенно (при $r < 2n + 1$) соотношением (59) (ср. опять-таки § 14). При этих условиях приближенное решение системы (60) хотя, конечно, и не доставит, вообще говоря, сразу точного значения z_0, но может рассматриваться как одно из возможных средств для ускорения процесса последовательных приближений. Этот последний факт сам по себе требует более обстоятельного рассмотрения, и на нем автор надеется остановиться более детально в одном из своих ближайших исследований.

§ 11. Аналог теоремы Валле Пуссена. Слегка обобщая рассуждение, примененное в пункте *ж* предыдущего параграфа, мы теперь без труда можем получить предложение о нижней границе величины наилучшего приближения, относящееся к предложению упомянутого пункта *ж* (§ 10) так же, как известная теорема Валле Пуссена [19] в теории полиномиальных приближений относится к фундаментальной теореме Чебышева-Маркова:

---

[1] Для большей определенности мы могли бы здесь иметь в виду основной в некотором смысле (ср. [24]) случай конечной системы (1).

Допустим, что при $z = \underline{z} = (\underline{z}_1, \ldots, \underline{z}_n)$[1] *уклонения* $\delta_j = \delta(Q_j, \underline{z}) = l_j - f_j(\underline{z})$ *уравнений* Q_j $(j = \overline{1, r})$ *системы* (11*) *все отличны от нуля, причем соответствующие* r *форм* $f_j(z)$ *связаны тождественным линейным соотношением вида, аналогичного* (49),

$$\sum_{j=1}^{r} \mu_j \operatorname{sgn} \delta_j \cdot f_j(z) \equiv 0 \qquad \left(\mu_1, \ldots, \mu_r > 0, \quad \sum_{j=1}^{r} \mu_j = 1\right). \tag{63}$$

Тогда имеет место неравенство

$$\min\{|\delta_1|, |\delta_2|, \ldots, |\delta_r|\} \leqslant \varrho. \tag{64}$$

Для доказательства достаточно учесть, что при данных условиях тело K_G вместе с точками $\tilde{Q}_j = \Phi(Q_j \operatorname{sgn} \delta_j)$ $(j = \overline{1, r})$ содержит и точку

$$\sum_{j=1}^{r} \mu_j \tilde{Q}_j = M \equiv (0, 0; \ldots; 0, 0; \mu, 0), \tag{65}$$

где

$$\mu = \sum_{j=1}^{r} \mu_j |\delta_j| \qquad \left(\mu_1, \ldots, \mu_r > 0, \quad \sum_{j=1}^{r} \mu_j = 1\right), \tag{66}$$

откуда непосредственно и следует

$$\varrho\,(=\xi_p) \geqslant \mu \geqslant \min\{|\delta_1|, |\delta_2|, \ldots, |\delta_r|\}. \tag{67}$$

Глава IV

Понятие лимитирующей системы уклонений. Некоторые аспекты его теоретических и практических приложений

§ 12. Установленное в конце предыдущей главы предложение — аналог теоремы Валле Пуссена — как нетрудно дать себе отчет, не допускает обращения. Причина этого заключается в недостаточно совершенном (если можно так выразиться) характере формулировки как самой полиномиальной теоремы Валле Пуссена, так и установленного в конце предыдущего параграфа аналога ее. В действительности заключение этой теоремы может быть усилено — при одновременном некотором даже ослаблении ее условия, и в таком виде она станет обратимою. Для этой цели нам придется ввести основное для дальнейшего понятие — *лимитирующей системы уклонений*.

Пусть, при некотором фиксированном $z = (z_1, \ldots, z_n)$, уклонения $\delta_j = l_j - f_j(z)$ $(j = \overline{1, r})$ уравнений $Q_1, \ldots, Q_r$ системы (11*) все отличны от нуля. Мы скажем, что они образуют *лимитирующую систему уклонений*, если ни при каком выборе поправки $\Delta z = (\Delta z_1, \ldots, \Delta z_n) = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ к данному набору значений параметров $z = (z_1, \ldots, z_n)$ все r величин $|\delta_i|$ не могут быть одновременно уменьшены. Такая система уклонений непосредственно доставляет, конечно, и нижнюю границу для величины наилучшего приближения

$$\varrho \geqslant \min\{|\delta_1|, |\delta_2|, \ldots, |\delta_r|\}. \tag{64'}$$

[1] Здесь $\underline{z}$, вообще, вовсе не предполагается решением задачи (13).

Умножая обе части каждого из уравнений Q_j на $\operatorname{sgn}\bar{\delta}_j$, что не изменит модулей их уклонений при любом z, мы получаем уравнения $\tilde{Q}_j = Q_j \operatorname{sgn}\bar{\delta}_j$, которым при рассматриваемом фиксированном z соответствуют действительные и положительные уклонения $\tilde{\delta}_j = |\delta_j|$ $(j=\overline{1, r})$. Оказывается справедливым следующее предложение:

Достаточное и необходимое условие для того, чтобы заданная система уклонений

$$\delta_j = l_j - f_j(z) = l_j - f(Q_j \mid z) \qquad (j=\overline{1, r}) \tag{68}$$

была лимитирующей, заключается в существовании такого разложения единицы на r неотрицательных частей μ_j $(j=\overline{1, r})$, при котором выполняется тождество

$$\sum_{j=1}^{r} \mu_j \tilde{f}_j(\zeta) \equiv 0, \text{ где } \zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n), \ \tilde{f}_j(\zeta) = f_j(\zeta) \cdot \operatorname{sgn}\bar{\delta}_j, \tag{69}$$

что означает, очевидно, для первоначально заданных линейных форм f_i $(j=\overline{1, r})$ наличие такой линейной зависимости с (комплексными) ориентированными коэфициентами:

$$\sum_{j=1}^{r} \mu_j \operatorname{sgn}\bar{\delta}_j \cdot f_j(\zeta) \equiv 0 \qquad \left(\mu_j \geqslant 0, \ \sum \mu_j = 1\right). \tag{70}$$

Доказательство. Отождествляя ζ с поправкой Δz,

$$\zeta_k = \Delta z_k, \quad \zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = (\Delta z_1, \ldots, \Delta z_n), \tag{71}$$

и полагая

$$\Delta \tilde{f}_j(z) = \tilde{f}_j(z+\Delta z) - \tilde{f}_j(z) = \tilde{f}_j(\zeta) = \tilde{\tau}_j \qquad (j=\overline{1, r}), \tag{72}$$

мы обратим внимание на очевидное тождество

$$|\tilde{\delta}_j - \tilde{\tau}_j|^2 = (\tilde{\delta}_j - \operatorname{Re}\tilde{\tau}_j)^2 + (\operatorname{Im}\tilde{\tau}_j)^2 \qquad (j=\overline{1, r}). \tag{73}$$

Оно непосредственно позволяет сделать следующие два заключения:

1. Если $\operatorname{Re}\tilde{\tau}_j$ $(j=\overline{1, r})$ ни при каком выборе поправки $\Delta z = \zeta$ не могут быть сделаны все одновременно положительными, то заданная система уклонений $\{\delta_j\}$ $(j=\overline{1, r})$ является лимитирующей.

2. Если, наоборот, все $\operatorname{Re}\tilde{\tau}_j$ $(j=\overline{1, r})$ могут быть сделаны одновременно положительными при некотором выборе $\Delta z = \zeta$, то, по крайней мере, при замене ζ на $\varepsilon\zeta$ и, следовательно, $\tilde{\tau}_j$ на $\varepsilon\tilde{\tau}_j$ $(j=\overline{1, r})$ с достаточно малым $\varepsilon > 0$, — абсолютные значения δ_j, равные $\tilde{\delta}_j$ $(j=\overline{1, r})$, могут быть одновременно уменьшены, и, значит, рассматриваемая система уклонений $\{\delta_j\}$ $(j=\overline{1, r})$ в таком случае не является лимитирующей.

Заметим теперь, что соотношение (69), которое должно выполняться тождественно относительно ζ, равносильно системе $2n$ равенств (ср. (39))

$$\sum_{j=1}^{r} \mu_j \tilde{x}_{kj} = 0, \quad \sum_{j=1}^{r} \mu_j \tilde{y}_{kj} = 0 \qquad \left(k=\overline{1, n}; \ \mu_j \geqslant 0, \ \sum_{j=1}^{r} \mu_j = 1\right), \tag{74}$$

если придерживаться обозначений

$$\tilde{f}_j(\zeta)=\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_{kj}\zeta_k=\sum_{k=1}^{n}(\tilde{x}_{kj}+i\tilde{y}_{kj})(\zeta_k'-i\zeta_k''). \tag{75}$$

Но, в силу отмеченной в § 2 теоремы Каратеодори-Штейница (см. также дополнительное замечание к ней), система равенств (74) выражает не что иное, как необходимое и достаточное условие принадлежности начала координат $x_k=y_k=0$ $(k=\overline{1, n})$ пространства R_{2n} к выпуклой оболочке системы r точек

$$\tilde{A}_j=(\tilde{x}_{1j},\ \tilde{y}_{1j};\ldots;\ \tilde{x}_{nj},\ \tilde{y}_{nj}) \qquad (j=\overline{1, r}) \tag{76}$$

этого пространства.

Следовательно, если тождество вида (69) имеет место, то через начало координат в R_{2n} не проходит никакая $(2n-1)$-мерная плоскость, оставляющая по одну сторону от себя все r точек (76) [1], а это означает как раз, что r значений

$$\operatorname{Re}\tilde{\tau}_j=\zeta_1'\tilde{x}_{1j}+\zeta_1''\tilde{y}_{1j}+\ldots+\zeta_n'\tilde{x}_{nj}+\zeta_n''\tilde{y}_{nj} \tag{77}$$

не могут быть сделаны все одновременно положительными ни при каком выборе $\Delta z=\zeta$.

Если же, наоборот, тождество вида (69) не имеет места, то через начало координат в R_{2n}, не принадлежащее в этом случае к выпуклой оболочке системы r точек (76), наверное может быть проведена плоскость, оставляющая по одну сторону от себя все эти r точек, и коэфициенты уравнения этой плоскости (надлежаще ориентированной), будучи взяты за компоненты поправок $\zeta_k'-i\zeta_k''=\zeta_k=\Delta z_k$ $(k=\overline{1, n})$, позволят сделать все r величин (77) положительными.

Сопоставляя эти факты с двумя заключениями, которые уже были сделаны нами в начале доказательства, видим, что предложение полностью доказано.

Д о б а в л е н и е. Условимся называть лимитирующую систему уклонений *неприводимою,* если в соответствующем линейном соотношении вида (70) все $\mu_j>0$ и если число членов не может быть уменьшено даже при допущении для действительных коэфициентов μ_j значений произвольного знака (ср. с х о д н о е определение неприводимых ч е б ы ш е в с к и х п о д с и с т е м в гл. III, § 9). В таком случае *в составе любой лимитирующей системы уклонений* (68) *найдется хотя бы одна н е п р и в о д и м а я лимитирующая система уклонений* $\delta_{j_1}, \delta_{j_2},\ldots, \delta_{j_{r'}}$, $(r'\leqslant r;\ 1\leqslant r'\leqslant 2n+1)$[2]. *Точнее говоря, если уже для первоначально взятой лимитирующей системы уклонений* (68) *все* $\mu_j>0$, *то л ю б о е*

[1] Применяемый здесь способ рассуждения по сути заключается в действенном сопоставлении двух (восходящих к уже цитированной нами несколько раз работе Каратеодори [14]) различных по содержанию, но логически эквивалентных определений выпуклой оболочки точечного множества. Сущность этого приема, неоднократно находившего применение в различных исследованиях, связанных с рассмотрением систем неравенств, была наиболее отчетливо выяснена в одном реферате Динеса [20].

[2] И здесь также (ср. § 10, пункт г) мы в случае задач типа классической полиномиальной будем иметь точнее $n+1\leqslant r'\leqslant 2n+1$.

из соответствующих уклонений δ_j $(j=\overline{1,\ r})$ *войдет хотя бы в одну из неприводимых лимитирующих подсистем системы* (68).

Доказательство получается непосредственно применением теоремы Каратеодори-Штейница (§ 2) в уточненной нами формулировке к выпуклой оболочке системы точек (76).

§ 13. Установленная только что основная теорема о лимитирующих системах уклонений вместе с добавлением к ней выражает один из наиболее глубоко лежащих фактов теории чебышевских приближений в комплексной области. Беря эту теорему за исходный пункт, можно было бы чисто аналитическими средствами получить иной вывод ряда установленных в предыдущей главе результатов, как это было указано в нашем кратком сообщении [4] [1]. В частности, из доказанной только что теоремы непосредственно получается доказательство аналога теоремы Чебышева-Маркова (обоих вариантов, пункты *ж* и *е* в § 10) для случая конечной системы уравнений (11), учитывая (ср. аналогичное предложение в [21]), что всякое решение z_0 задачи (13) для конечной системы (11), как очень легко можно убедиться, является, наверное, решением аналогичной задачи для подсистемы всех тех уравнений Q, для которых $\delta(Q,\ z_0)=L(z_0)$. Для дальнейшего распространения доказательства и на бесконечные системы (11)—(11*) достаточно, очевидно, установить тот факт, что наилучшее приближение для бесконечной системы (11*) всегда является наилучшим приближением, с тем же значением ϱ, для некоторой конечной подсистемы из $2n+1$ уравнений. Установление же этого факта без труда может быть выполнено с помощью надлежащего применения леммы Бореля-Лебега о конечном покрытии к области типа (34) — совершенно подобно тому, как это было сделано нами в свое время в аналогичном вопросе для действительной области ([3], стр. 141—142).

Во всех этих рассмотрениях мы исходим из того очевидного факта, что всякая чебышевская (в частности, — неприводимая) подсистема уравнений доставляет непосредственно лимитирующую (соответственно — неприводимую лимитирующую) систему уклонений, удовлетворяющую при этом специальному условию $|\delta_j|=|\delta_{j_0}|=L(z_0)=\varrho\,(j=\overline{1,\ r})$

При практическом или теоретическом трактовании вопросов, связанных с чебышевскими подсистемами, часто окажется целесообразным использовать соответствующие множества точек (76) с относящимися к ним геометрическими рассмотрениями.

Мы хотим здесь еще, используя частью аппарат, примененный в предыдущем § 12, остановиться дополнительно на освещении вопросов, относящихся к сопоставлению объемов двух определенных в § 9 и 10 (гл. III) понятий — чебышевских и фиксированных точек уклонения.

В первую очередь мы хотим показать, что в одном специальном, но важном случае, именно — *в случае конечной системы* (11)—(11*), *притом с вещественными данными — чебышев-*

[1] Кстати, там отмечена была возможность чисто аналитического вывода и самой теоремы о лимитирующих системах уклонений.

скими точками уклонения исчерпывается вся совокупность фиксированных точек уклонения.

Действительно, пусть заданная конечная система несовместных линейных уравнений с вещественными данными, для которой решается задача типа (13), имеет вид

$$f_j(z) \equiv f(Q_j \mid z) \equiv \sum_{k=1}^{n} a_{kj} z_k \equiv x_{kj} z_k = l_j \equiv \xi_j \qquad (j = \overline{1, m}), \qquad (11^{(0)})$$

и допустим, что z_0 является решением с минимальным числом r точек уклонения (§ 10, пункт *г*). Это решение можно всегда предположить действительным, так как, обозначая для комплексно-числового набора z через $\bar{z}$ набор сопряженных чисел $(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$, мы для любой точки $Q = (a_1, \ldots, a_n, l) \in \mathfrak{G}_0$, в рассматриваемом случае вещественного множества $\mathfrak{G}_0$, имеем, очевидно, $\left| \delta\left(Q, \frac{z + \bar{z}}{2}\right) \right| \leqslant |\delta(Q, z)|$. Пусть, для простоты обозначений, максимальное абсолютное значение соответствующего уклонения $\delta(Q, z_0)$, равное $L(z_0) = \varrho$, достигается в точках $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r$, которые и составят совокупность всех фиксированных точек уклонения данной задачи (§ 10, цит. место). Мы будем иметь

$$\delta_{j0} = \delta(Q_j, z_0) = L(z_0) \operatorname{sgn} \delta_{j0} = \varrho \operatorname{sgn} \delta_{j0} \qquad (j = \overline{1, r}), \qquad (78)$$

причем здесь $\operatorname{sgn} \delta_{j0} = \operatorname{sgn} \bar{\delta}_{j0} = \pm 1$.

Согласно упомянутому выше общему факту набор $z = z_0$ должен быть одновременно решением аналогичной задачи наилучшего приближения для подсистемы рассматриваемых r уравнений Q_j, а это означает, что уклонения (78) должны составлять лимитирующую систему. Переходя от данных вещественных точек Q_j $(j = 1, r)$ к соответствующим (также вещественным) точкам

$$\tilde{Q}_j = Q_j \operatorname{sgn} \delta_{j0} = \pm Q_j = (\tilde{x}_{1j}, \tilde{x}_{2j}, \ldots, \tilde{x}_{nj}, \tilde{\xi}_j) \qquad (j = \overline{1, r}),$$

мы в силу (69)—(74) заключаем, что в данном случае начало координат o' $(x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0)$ n-мерного вещественного пространства R_n принадлежит к выпуклой оболочке $\tilde{K}$ системы r соответствующих точек

$$\tilde{A}_j' = (\tilde{x}_{1j}, \tilde{x}_{2j}, \ldots, \tilde{x}_{nj}) \qquad (j = \overline{1, r}). \qquad (79)$$

Если при этом точка o' — внутренняя для наименьшего $R'_{n-\nu}$ (§ 1), содержащего $\tilde{K}$, то применение теоремы о барицентрических представлениях (§ 2) в уточненной нами формулировке позволяет немедленно заключить, что все r точек Q_j $(j = 1, r)$ являются чебышевскими точками уклонения данной задачи — в полном соответствии с доказываемым утверждением. Остается, следовательно, лишь убедиться в том, что точка o' в данном случае непременно будет внутренней для $\tilde{K}$ относительно $R'_{n-\nu}$. Но если бы, напротив, точка o' оказалась пограничною для $\tilde{K}$ (относительно $R'_{n-\nu}$), то через нее проходила бы хотя бы одна собственная $(n-1)$-мерная опорная плоскость к $\tilde{K}$ (§ 1), уравнение которой мы записали бы в виде

$$\sum_{k=1}^{n} \zeta_k' x_k = 0, \qquad (80)$$

и которая заведомо содержала бы лишь часть точек $\tilde{A}_j'$ $(j=\overline{1, r})$. В таком случае, полагая $(\zeta_1', \ldots, \zeta_n') = \zeta$, мы с помощью поправки вида $\Delta z = \pm \varepsilon\zeta$, при надлежащем выборе знака и при достаточно малом $\varepsilon > 0$, пришли бы к набору $z_0 + \Delta z$, который также давал бы решение задачи, но при меньшем числе точек уклонения — в противоречии с исходным предположением. Тем самым доказательство утверждения закончено.

Во вторую очередь мы хотели показать, что *в более общем случае комплексно-числовых данных, даже для задачи* (13), *относящейся к конечной системе* (11), *возможны фиксированные точки уклонения, отличные от чебышевских.*

Это может быть доказано следующим простым примером системы четырех несовместных линейных уравнений:

$$\left.\begin{array}{c} f_1(z) \equiv z_1 - z_3 = -i, \quad f_2(z) \equiv z_3 - z_2 = 1+i, \quad f_3(z) \equiv z_2 - z_1 = 2, \\ f_4(z) \equiv iz_1 - iz_2 = 1-i \end{array}\right\}. \tag{81}$$

Легко проверить, что набор $z_0 = (-1, 0, i)$ доставляет решение задачи, для которого все четыре точки Q_j являются точками уклонения: $\delta_{10} = \delta_{20} = \delta_{30} = \delta_{40} = 1$, причем первые три уравнения (81) образуют неприводимую чебышевскую подсистему $\left(\text{в качестве значений множителей в соотношении (49)—(48) можно взять } \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \frac{1}{3}\right)$. Совокупность всех решений задачи типа (13) для этой подсистемы (ср. § 10, пункт *з*), выражаемая формулами

$$z_1 = -1 + a, \quad z_2 = a, \quad z_3 = i + a,$$

где a — произвольное комплексное число, дает здесь вместе с тем и совокупность решений для всей системы (81). Точка $Q_4 = (i, -i, 0, 1-i)$, как легко убедиться непосредственно, оказывается также фиксированною точкою уклонения, не будучи, очевидно, чебышевскою, чем и устанавливается справедливость нашего утверждения.

В рассмотренном примере форма $\bar{f}_4(z) = \bar{f}(Q_4 \mid z)$, соответствующая фиксированной, но не чебышевской точке уклонения Q_4, линейно зависит от форм, соответствующих чебышевским точкам уклонения (именно — от $\bar{f}_3(z)$). Мы можем однако привести второй пример, где это обстоятельство уже не имеет места:

$$f_1(z) \equiv z_1 = 1, \quad f_2(z) \equiv -z_1 = 1, \quad f_3(z) \equiv z_2 = 1, \quad f_4(z) \equiv iz_1 - 2z_2 = 1. \tag{82}$$

Здесь при $z_1 = z_2 = 0$, т. е. $z = (0, 0) = z_0$, первые два уравнения образуют (неприводимую) чебышевскую подсистему $(\varrho = L(z_0) = 1)$, но и точки Q_3, Q_4 являются, как легко понять, фиксированными точками уклонения, не будучи чебышевскими, притом каждая из двух форм $\bar{f}_3(z)$ и $\bar{f}_4(z)$ является линейно независимою от первых двух форм.

Эти два простых примера делают довольно прозрачною алгебраическую картину тех условий (на их формулировке мы тут не остановимся), которыми и определяется возможность фиксированных точек уклонения, не являющихся чебышевскими, в случае конечных систем (11) с комплексными данными.

Наконец, в третью очередь, мы хотим показать еще одним простым примером, что *для бесконечных систем* (11) *даже в случае вещественных данных опять-таки возможны фиксированные точки уклонения, отличные от чебышевских.*

Пусть при $n=3$ множество $\mathfrak{G}_0$ составляется, во-первых, из совокупности точек $0<a_1\leqslant 1$, $l=1-a_1^2$, $a_2=0$, $a_3\equiv 1$ и, во-вторых, еще из двух точек: $a_1=a_2=l=0$, $a_3=1$ и $a_1=l=0$, $a_2=a_3=1$. Замыкание $\mathfrak{G}_0^*$ будет дополнительно содержать еще предельную точку $a_1=a_2=0$, $l=a_3=1$. Нетрудно убедиться, прежде всего, что набор $z=\left(0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)=z_0$ доставляет одно из решений. В самом деле, абсолютная величина соответствующего уклонения $\delta(Q,\ z_0)$ достигает наибольшего значения $L(z_0)=\frac{1}{2}$ в четырех точках

$$\left.\begin{aligned} &Q_1=(0,\ 0,\ 1,\ 0) \text{ при } \delta_{10}=0-\frac{1}{2}\cdot 1=-\frac{1}{2}\\ &Q_2=(0,\ 0,\ 1,\ 1) \text{ при } \delta_{20}=\frac{1}{2}\\ &Q_3=(1,\ 0,\ 1,\ 0) \text{ при } \delta_{30}=-\frac{1}{2}\\ &Q_4=(0,\ 1,\ 1,\ 0) \text{ при } \delta_{40}=-\frac{1}{2} \end{aligned}\right|. \tag{83}$$

Таким образом, $\operatorname{sgn}\delta_1=\operatorname{sgn}\delta_3=\operatorname{sgn}\delta_4=-1$, $\operatorname{sgn}\delta_2=+1$. Точки Q_1 и Q_2 составляют неприводимую чебышевскую подсистему:

$$\frac{1}{2}\operatorname{sgn}\delta_{10}\cdot f_1(z)+\frac{1}{2}\operatorname{sgn}\delta_{20}\cdot f_2(z)\equiv-\frac{1}{2}z_3+\frac{1}{2}z_3\equiv 0, \tag{84}$$

при $|\delta_{10}|=|\delta_{20}|=\frac{1}{2}=L(z_0)$.

Рассматриваем еще в пространстве $R_{2\cdot 3}=R_6$ четыре соответствующие точки (76)

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{A}_1=(0,\ 0;\ 0,\ 0;\ -1,\ 0),\quad \tilde{A}_2=(0,\ 0;\ 0,\ 0;\ 1,\ 0),\\ &\tilde{A}_3=(-1,\ 0;\ 0,\ 0;\ -1,0),\quad \tilde{A}_4=(0,\ 0;\ -1,\ 0;\ -1,\ 0) \end{aligned}\right\}. \tag{85}$$

Их выпуклая оболочка, заключенная в трехмерном подпространстве R'_{6-3}, определяемом уравнениями $y_1=y_2=y_3=0$, представляет собой тетраэдр, причем начало координат $o=(0,0;\ 0,0;\ 0,0)$ находится в середине ребра $\tilde{A}_1\tilde{A}_2$. Барицентрическое представление точки o через точки $\tilde{A}_j$ $(j=\overline{1,\ 4})$ возможно, очевидно, только в виде

$$o=\frac{1}{2}\tilde{A}_1+\frac{1}{2}\tilde{A}_2, \tag{86}$$

т. е. других чебышевских точек уклонения, кроме Q_1 и Q_2, не имеем.

Но найденное решение $z=\left(0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$ не является единственным: ту же величину $L(z)=\frac{1}{2}$ имеем еще для действительных наборов $z=\left(0,\ u,\ \frac{1}{2}\right)$, где $-1\leqslant u\leqslant 0$, а также для всех комплексных наборов того же вида, где α может пробегать множество точек круга $\left|\alpha+\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$. Точка уклонения Q_4, не будучи чебышевскою, не является и фиксированною: она служит точкою уклонения лишь при нахождении α на окружности указанного круга. Точка же Q_5 является фиксированною точкою уклонения, не будучи чебышевскою.

Замечание о бесконечных лимитирующих системах. Само понятие лимитирующей системы уклонений можно распространить и на случай бесконечных подсистем системы (11*), именно — допуская к рассмотрению наряду с конечными точечными множествами $\{Q_j\}$ ($Q_j \in \mathfrak{G}_0^*$, $j=\overline{1, r}$) также и бесконечные замкнутые подмножества $\mathfrak{A}$ точечного множества $\mathfrak{G}_0^*$, подчиненные тому требованию, что (предполагаемые все отличными от нуля) модули уклонений $\delta(Q, z)$, $Q \in \mathfrak{A}$, $z=\text{const}$, не могут быть все одновременно уменьшены ни при каком выборе поправки $\Delta z=\zeta$. В качестве необходимого и достаточного условия для того, чтобы система соответствующих точкам $Q \in \mathfrak{A}$ (при данном фиксированном наборе z) уклонений $\delta(Q, z)$ была лимитирующей, останется, как нетрудно убедиться, условие принадлежности начала координат $o(x_k=y_k=0,\ k=\overline{1, n})$ пространства R_{2n} — выпуклой оболочке замкнутого и ограниченного множества точек $\bar{A}$ типа (76), соответствующего рассматриваемому множеству $\mathfrak{A}$ при данном фиксированном z. Отсюда опять получится, как и в конце § 12, устанавливаемый непосредственным применением теоремы о барицентрических представлениях (§ 2) кардинальный факт, заключающийся в существовании, в составе любой лимитирующей системы уклонений, хотя бы одной неприводимой лимитирующей подсистемы r' уклонений $(1 \leqslant r' \leqslant 2n+1)$ — с возможными дальнейшими уточнениями этого факта в соответствующих случаях.

Последний факт можно было бы взять также за исходную точку для получения еще одного (третьего по счету) доказательства аналога теоремы Чебышева-Маркова [1], учитывая при этом одну общую теорему А. Н. Колмогорова ([9], теорема 1; ср. также для классического случая полиномиальных приближений соответствующий результат Тонелли [22]). Останавливаться на более подробном развитии этих рассмотрений мы здесь, однако, не имеем надобности.

§ 14. Наиболее существенные приложения понятия лимитирующей системы уклонений в действительности следует искать в области вопросов, связанных с его применениями к установлению нижней границы величины ϱ на основе исследования наборов $z \neq z_0$. Мы здесь остано-

---

[1] Сходный до некоторой степени подход к доказательству обобщенной теоремы Чебышева-Маркова используется, если не ошибаюсь, в только что вышедшей статье В. К. Иванова (ср. сноску в конце Введения), но без указания на то, что сама теорема уже была в наиболее точном виде установлена мною в опубликованном намного раньше сообщении [4].

вимся на одном фундаментальном вопросе этого рода, связанном с приближенным построением решений задачи (13).

В силу общих фактов, установленных в конце § 10 предыдущей главы, фактическое решение задачи (13) в комплексной области даже в случае конечной системы (11), вообще, не может быть осуществлено точно путем конечного числа эффективно реализуемых независимых проб, связанных с калькулятивно-доступным решением задачи того же типа (13) для простейших подсистем системы (11) — (11*), как это представляется возможным (практически или хотя бы теоретически) в случае аналогичных задач в действительной области. Остается возможность изыскания путей построения решений задачи (13) путем последовательных приближений. Сходящийся процесс последовательных приближений, весьма общего характера, для этой цели был в свое время нами в действительности указан [2] при соответствующем конкретном оформлении задачи (13) (ср. начало Введения).

Применение процессов последовательных приближений существеннейшим образом предполагает возможность оценки степени достигнутого приближения к искомому решению. В разрешении этого вопроса понятие лимитирующей системы уклонений будет для нас иметь фундаментальное значение — вместе с понятием *квазилимитирующей системы уклонений,* которое здесь окажется необходимым в качестве его дополнения и дальнейшего развития.

Допустим, что в некотором процессе последовательных приближений для задачи (13) получаются приближенные решения $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(N)}, \ldots,$ удовлетворяющие предельному равенству

$$\lim L(z^{(N)}) = \varrho \text{ при } N \to \infty. \tag{87}$$

В таком случае сама точка $z^{(N)} = (z_{1N}, z_{2N}, \ldots, z_{nN})$ в соответствующем унитарном пространстве $\Re_n$, как нетрудно убедиться путем обобщения соответствующего рассуждения, примененного нами ([3], стр. 93—94) для полиномиального случая, будет при $N \to \infty$ бесконечно приближаться к точечному множеству $H_0 = \{z_0\}$ (§ 8), представляющему совокупность всех решений $z_0 = (z_{10}, \ldots, z_{n0})$ задачи (13). Пусть $\{Q_j\}$ $(j = \overline{1, r})$ обозначает какую-нибудь неприводимую чебышевскую подсистему уравнений системы (11*). В силу установленных в § 10 (в частности пункт a) общих свойств чебышевских точек уклонения, мы для соответствующих уклонений δ_{jN} $(j = \overline{1, r};\ N = 1, 2, 3, \ldots)$ будем, очевидно, иметь

$$\lim_{N\to\infty} \delta_{jN} = \delta_{j0} = \delta(Q_j, z_0) \qquad (j = \overline{1, r}), \tag{88}$$

где $\delta_{j0} = \varrho e^{-i\varphi_{j0}}$ обозначает фиксированную, как по модулю, так и по аргументу, комплексную величину $\delta(Q_j, z_0)$, не зависящую от частного выбора $z_0 \in H_0$. Разумея под μ_{j0} $(j = \overline{1, r})$ значения положительных коэфициентов μ_j в линейном соотношении (49) $\equiv$ (49$_0$), связывающем формы $f_j(z) = f(Q_j | z)$ $(j = \overline{1, r})$ при $\operatorname{sgn} \bar{\delta}_{j0} = e^{i\varphi_{j0}} = \cos\varphi_{j0} + i \sin\varphi_{j0}$, мы будем иметь систему $2n$ линейных действительных уравнений

$$\left.\begin{aligned}\sum_{j=1}^{r}(x_{kj}\cos\varphi_{j0}-y_{kj}\sin\varphi_{j0})\,\mu_j=0 \qquad (k=\overline{1,\ n})\\ \sum_{j=1}^{r}(x_{kj}\sin\varphi_{j0}+y_{kj}\cos\varphi_{j0})\,\mu_j=0 \qquad (k=\overline{1,\ n})\end{aligned}\right\}^{1)}, \tag{89}$$

определяющих эти положительные коэфициенты с точностью до общего множителя. Для полной определенности мы будем считать значения μ_{j0} $(j=\overline{1,\ r})$ нормированными условием $\sum\limits_{j=1}^{r}\mu_{j0}=1$. — Заменяя в $(89)\equiv(89_0)$ φ_{j0} на φ_{jN} — аргумент комплексного числа $\operatorname{sgn}\bar{\delta}_{jN}=e^{i\varphi_{jN}}$ $(j=\overline{1,\ r};\quad N=1,\ 2,\ldots)$ (получаемую в результате такой замены систему уравнений мы обозначим через (89_N)), мы должны выяснить с у щ е с т в е н н о в а ж н ы й в о п р о с: в какой мере неприводимым (§ 9) чебышевским соотношением (49) предопределяется, при больших значениях N, выполнение аналогичного соотношения вида $(70)\equiv(70_N)$ с п о л о ж и т е л ь н ы м и множителями $\mu_j=\mu_{jN}$, характеризующего $\{\delta_{jN}\}$ $(j=\overline{1,\ r})$ как лимитирующую систему уклонений?

Рассмотрение условий, определяющих в детерминантной форме соответствующий характер решений системы уравнений (89), с учетом неприводимости чебышевской подсистемы $\{Q_i\}$ (ср. § 9 и § 3), показывает, прежде всего, что в с л у ч а е $r=2n+1$ (в известном смысле о с н о в н о м, поскольку он н е т р е б у е т о б р а щ е н и я в н у л ь к а к и х - н и б у д ь о п р е д е л и т е л е й м а т р и ц ы к о э ф и ц и е н т о в у р а в н е н и й (89)) для системы уравнений (89_N), при достаточно больших значениях N, будут обеспечены такие же условия, в силу которых эта система уравнений будет иметь положительное собственное решение. Это означает, что в рассматриваемом случае $(r=2n+1)$ уклонения δ_{jN} $(j=\overline{1,\ r};$ N больше некоторой фиксированной величины) будут составлять л и м и т и р у ю щ у ю с и с т е м у (наверное, неприводимую), позволяющую непосредственно установить в форме (64′), при достаточно больших значениях N, сколь угодно точную нижнюю границу для ϱ; это одновременно означает, конечно, и возможность, по сопоставлении с $L(z_N)>\varrho$, сколь угодно точно оценить и разность

$$L(z_N)-\varrho<L(z_N)-\min_j\{|\delta_{jN}|\}, \tag{91}$$

которою мы измеряем степень точности достигнутого приближения.

В случаях же $r<2n+1$ выполнение неприводимого соотношения (49) предполагает, в первую очередь, в качестве п е р в о й г р у п п ы у с л о в и й, как раз обращение в нуль $\binom{2n}{r}$ определителей порядка r матрицы коэфициентов системы уравнений (89) и наряду с этим в качестве д о п о л н и т е л ь н о г о у с л о в и я — отличие от нуля определи-

[1] Эти уравнения мы могли бы и короче записать в виде, аналогичном (74):

$$\sum_{j=1}^{r}\tilde{x}_{kj}\mu_j=0 \quad (k=\overline{1,\ n}),\qquad \sum_{j=1}^{r}\tilde{y}_{kj}\mu_j=0 \quad (k=\overline{1,\ n}). \tag{90}$$

телей порядка $r-1$, составленных из коэфициентов некоторых $r-1$ уравнений этой же системы, скажем уравнений с номерами $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{r-1} \in \overline{1, 2n}$, — вместе с условием относительно чередования знаков этих определителей, обеспечивающим положительность значений μ_{j0} $(j=\overline{1, r})$. Но первая часть этих условий для соответствующей системы уравнений (89_N) уже не будет, вообще, выполняться, в силу чего эта система, вообще говоря, не будет иметь собственных решений. Однако, с другой стороны, определяемые, скажем, из упомянутых $r-1$ уравнений системы (89_N) (с номерами $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{r-1}$) нормированные значения μ_{jN}^* $(j=\overline{1, r})$, близкие к μ_{j0} $(j=\overline{1, r})$ и наверное положительные (при достаточно больших значениях N) будут удовлетворять близкому к $(70)\equiv(70_N)$ соотношению вида

$$\sum_{j=1}^{r}\mu_{jN}^* \operatorname{sgn}\overline{\delta}_{jN} f_j(\zeta) = o\quad(\|\zeta\|) = o(1) \quad \text{при} \quad N\to\infty, \tag{92}$$

где $\|\zeta\|$ — норма ([10], стр. 221—222) поправки $\zeta=\Delta z$, которую в силу (34) мы в настоящих рассмотрениях вправе считать наперед ограниченною. Переписывая (92) в виде

$$\sum_{j=1}^{r}\mu_{jN}^* \tilde{\tau}_{jN} = o(1) \quad \text{при} \quad N\to\infty, \tag{93}$$

где $\tilde{\tau}_{jN}=\operatorname{sgn}\overline{\delta}_{jN}\cdot f_j(\zeta)$ $(j=\overline{1, r})$ обозначают соответствующие значения поправок (72), мы видим, что, *если при большом N предположить все r величин* $\operatorname{Re}\tilde{\tau}_{jN}$ *положительными (ср. § 12), то они должны быть бесконечно малы при* $N\to\infty$. Мы выразим этот факт, сказавши, что и при $r<2n+1$ уклонения δ_{jN} $(j=\overline{1, r})$ составляют, во всяком случае, *квазилимитирующую систему уклонений* — с обеспечением выполнения неравенства вида (64) с точностью до поддающейся оценке бесконечно малой (при $N\to\infty$) величины $o(\|\zeta\|)$. Это, в конечном счете, опять приводит к сколь угодно точным оценкам для ϱ и для $L(z_N)-\varrho$ при $N\to\infty$. — Как бы то ни было, мы здесь имеем еще один (ср. конец § 10) принципиальный пункт различия по сравнению с задачей наилучшего приближения в действительной области, где в силу постоянства величин $\operatorname{sgn}\delta_{jN}$ при $\delta_{jN}\to\delta_{j0}$ мы при достаточно больших значениях N непременно имеем лимитирующую систему уклонений в точном смысле.

Чтобы учесть более полным образом значение отмеченных здесь результатов с точки зрения эффективных методов решения задачи (13), следует еще иметь в виду возможность их калькулятивного использования в аспекте ускорения самого процесса последовательных приближений — на основе соображений, указанных в конце пункта u § 10.

§ 15. В точных формулировках ряда основных фактов теории чебышевского приближения в данной работе играли существенную роль понятия неприводимой чебышевской подсистемы (или системы) уравнений (гл. III, § 9 и 10) и неприводимой лимитирующей системы уклонений (настоящая глава). В этом параграфе мы хотим, прежде всего, указать простой способ построения примеров, устанавливающих тот факт, что *число* r уравнений в неприводимых чебышевских системах или уклонений в неприводимых лимитирующих системах *может фактически принимать все значения в пределах* $1 \leqslant r \leqslant 2n+1$, которые были теоретически для него установлены.

Полагая

$$a_{kj} = x_{kj} + iy_{kj} = s_{2k-1,\,j} + is_{2k,\,j} \qquad (k=\overline{1,\,n};\ j=\overline{1,\,r}), \tag{94}$$

мы для любого из значений r в пределах $1 \leqslant r \leqslant 2n+1$ имеем, в первую очередь, определить r вещественных $2n$-членных числовых наборов

$$A_j = (s_{1j},\ s_{2j}, \ldots,\ s_{2n,\,j}) \qquad (j=\overline{1,\,r}), \tag{95}$$

так чтобы линейные формы (ср. (40))

$$F_j(z',\ z'') = \sum_{k=1}^{n} (s_{2k-1,\,j}\, z_k' + s_{2k,\,j}\, z_k'') \qquad (j=\overline{1,\,r}) \tag{96}$$

были связаны линейною зависимостью в узком смысле (§ 1) с положительными коэффициентами μ_j $(j=\overline{1,\,r})$.

Для этого, оставляя пока в стороне случай $r=1$ и предоставляя для конкретности, скажем, числам $1,\ 2, \ldots,\ r-1$ роль чисел $\nu_1,\ \nu_2, \ldots,\ \nu_{r-1}$ в соответствующем рассмотрении предыдущего параграфа, зададим матрицу чисел $s_{\nu j}$ при $\nu=\overline{1,\,r-1}$, $j=\overline{1,\,r}$ хотя бы в виде

$$\left\| \begin{matrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & \ldots & s_{1,\,r-1} & s_{1r} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & \ldots & s_{2,\,r-1} & s_{2r} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & \ldots & s_{3,\,r-1} & s_{3r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{r-1,\,1} & s_{r-1,\,2} & s_{r-1,\,3} & \ldots & s_{r-1,\,r-1} & s_{r-1,\,r} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \end{matrix} \right\| \tag{97}$$

и затем, при $r < 2n+1$, положим еще

$$s_{\nu j} = \sum_{\rho=1}^{r-1} k_{\rho\nu}\, s_{\rho j} \qquad (j=\overline{1,\,r};\ \ \nu=\overline{r,\,2n}), \tag{98}$$

где $k_{\rho\nu}$ — произвольно выбранные $(r-1)(2n-r+1)$ вещественных чисел. Определенные таким образом наборы (95) удовлетворяют, очевидно, поставленному требованию, при $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_r = \dfrac{1}{r}$.

Что касается оставленного в стороне случая $r=1$, то здесь мы также удовлетворим поставленному требованию, положивши $s_{11} = s_{21} = \ldots = s_{2n,\,1} = 0$.

Если мы теперь зададим еще совершенно произвольно r положительных чисел l_j $(j=\overline{1,\,r})$, то соответствующие несовместные уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\, z_k = l_j \qquad (j=\overline{1,\,r}) \tag{99}$$

при $z = (z_1, \ldots,\ z_n) = (0, \ldots,\ 0) = \theta$ доставляют неприводимую лимитирующую систему уклонений $\delta_j = l_j$ $(j=\overline{1,\,r})$.

Если же возьмем числа l_j равными между собой, например, $l_1 = l_2 = \ldots = l_r = 1$, то те же уравнения (99) составят неприводимую чебышевскую систему, для которой одним из решений служит набор $z = 0$. Мы можем, с другой стороны, включить эту чебышевскую систему уравнений в состав какой-нибудь более широкой, конечной или бесконечной, системы (11), подчинив правые части добавляемых уравнений, например, условию $|l| < \text{const} < 1$. Тогда рассматриваемая чебышевская система (99) окажется для расширенной системы неприводимою чебышевскою подсистемою. Непосредственно подтверждается (ср. § 10, пункт c), что отмеченное решение $z = 0$ здесь окажется единственным не только в случае $r = 2n + 1$, но также и в случае $r = 2n$, в котором n уравнений чебышевской подсистемы (99) с нечетными номерами $1, 3, \ldots, 2n - 1$ имеют еще, независимо от выбора чисел $k_{p,\,2n}$ $(p = \overline{1,\ 2n-1})$, левые части линейно независимые. При всех же других значениях $r = 1, 2, \ldots, 2n - 1$, если, например, возьмем здесь все числа $k_{p\nu} = 0$, то некоторые из параметров $z_n, z_{n-1}, \ldots$ фактически не войдут в уравнения (99), и тогда мы будем очевидным образом иметь и другие решения наряду с $z = 0$.

Указанный здесь способ построения примеров может быть легко видоизменяем с тем, чтобы, например, в качестве исходного решения для системы (99) иметь вместо $z = 0$ любой другой набор $z_0 = (z_{10}, \ldots, z_{n0})$ при любом значении ϱ $\left(\text{полагая, разумеется, } l_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} z_{k0} + \varrho\right)$ и т. д.

На основе указанного построения можно, между прочим, получить весьма простые опровергающие примеры для некоторых, принципиального характера, утверждений, содержащихся в одной только что опубликованной статье (В. К. Иванов, Математический сборник, 30 : 3 (1952), 543—559). Возьмем для примера несовместную систему с двумя неизвестными

$$\begin{aligned} &f_1(z) \equiv z_1 = 1, \quad f_2(z) \equiv iz_1 = 1, \\ &f_3(z) \equiv -(1+i)\, z_1 = 1, \quad f_4(z) \equiv z_2 = i, \end{aligned} \tag{100}$$

для которой первые три уравнения составляют неприводимую чебышевскую подсистему при $z_0 = (0{,}0)$ и при $\varrho = 1$. Согласно утверждению теоремы 9 в статье В. К. Иванова, в данной системе (100) найдется подсистема из $n + 1 = 3$ уравнений, которая должна иметь ранг $n = 2$ относительно z_1, z_2 и для которой величина наилучшего приближения ϱ' должна иметь то же значение, равное 1, как и для системы (100) в целом. Легко видеть, что это неверно. Действительно, в силу первого требования придется непременно включить 4-ое уравнение $z_2 = i$ в искомую подсистему. Пусть добавляемые к нему еще два уравнения имеют в системе (100) номера $j_1, j_2 \in \overline{1, 3}$. Второе требование означает, что уклонения δ_{j_1}, δ_{j_2}, δ_4 должны составлять лимитирующую систему. Однако, требуя тождественного выполнения соотношения вида (70) при $\operatorname{sgn} \delta_{j_1} = \operatorname{sgn} \delta_{j_2} = 1$, $\operatorname{sgn} \delta_4 = i$ и хотя бы при вещественных μ_{j_1}, μ_{j_2}, μ_4, мы сразу получаем $\mu_4 = 0$ и, вслед затем, также

$\mu_{j_1}=\mu_{j_2}=0$. Условие $\Sigma\mu_j=1$ не выполняется, что и опровергает упомянутую теорему.

Немного варьируя этот пример и беря, скажем, при $n=4$ систему

$$\left.\begin{aligned} &f_j(z)\equiv z_j=1 \quad (j=1,2,3), \quad f_{j'}(z)\equiv iz_{j'-3}=1 \quad (j'=4,5,6) \\ &f_7(z)\equiv -(1+i)(z_1+z_2+z_3)=1, \quad f_8(z)\equiv z_4=i, \end{aligned}\right\} \tag{101}$$

мы точно таким же образом получаем прямое опровержение другого аналогичного (для $r>n+1$) утверждения В. К. Иванова (п. 11 той же статьи).

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Я. Ремез, О приближениях средних степенных, равномерных (чебышевских) и квазиравномерных, ДАН СССР, т. 60, 1948, № 2.

2. Є. Я. Ремез, Про визначення функцій, що мають найменший середньостепеневий відхил від нуля, Ювіл. збірник АН УРСР, 1944, 268—291; см. также предварительное сообщение в Працях січневої сесії АН УРСР, 1942.

3. Є. Я. Ремез, Про методи найкращого, в розумінні Чебишева, наближеного представлення функцій, вид. АН УРСР, Київ, 1935.

4. Е. Я. Ремез, О чебышевских приближениях в комплексной области, ДАН СССР, т. 77, 1951, № 6.

5. Є. Я. Ремез, Про деякі властивості конвексної оболонки точкової множини та про задачу мінімального наближення, Збірник праць Ін-ту математики АН УРСР, 1938, № 1, 115—129.

6. A. Haar, Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen, Math. Annalen, Bd. 78, 1917—1918, 294—311.

7. Л. Г. Шнирельман, О равномерных приближениях, ИАН СССР, сер. мат., 1938, № 1, 53—60.

8. C. de la Vallée Poussin, Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, Paris, 1919, Chap. VI.

9. А. Н. Колмогоров, Замечание по поводу многочленов П. Л. Чебышева, наименее уклоняющихся от заданной функции, Успехи мат. наук, т. III, 1948, № 1, 216—221.

10. А. И. Мальцев, Основы линейной алгебры, ГТТИ, 1948.

11. T. Bonnesen und W. Fenchel, Theorie der konvexen Körper, Berlin, 1934.

12. M. Fréchet, Les éspaces abstraits, Paris, 1928.

13. E. Helly, Über Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, Monatsh. für Math. u. Physik, Bd. 31, 1921.

14. C. Carathéodory, Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiv. harm. Funkt., Rendiconti di Palermo, t. 32, 1911, 193—217.

15. E. Steinitz, Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme, Journ. für die reine u. angew. Math., Bd. 143, 1913, 128—157; Bd. 144, 1914, 1—23.

16. В. А. Марков, О функциях наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке, СПБ, 1892.

17. Я. А. Шохат, Исследование одного класса многочленов, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке, Екатеринбург, 1918.

18. Б. А. Рымаренко, О некоторых вопросах теории приближения функций посредством полиномов, Ленинград, 1951.

19. C. de la Vallée Poussin, Sur les polin. d'approx. et la reprexcl. approchée d'un angle, Bull. Acad. Belg., 1910, N 12.

20. L. Dines, Convex extension and linear inequalities, Bull. Amer. math. soc., v. 42, 1936, 353—365.

21. C. de la Vallée Poussin, Sur les polin. d'approx. à une variable complexe, Bull. Acad. Belg., 1911, 199–211.

22. L. Tonelli, J polinomi d'approssimazione di Tchebychef, Annali di Matematica pura ed appl., 1908.

23. Н. Ахиезер и М. Крейн. О некоторых вопросах теории моментов, Харьков, 1938.

24. Е. Я. Ремез, ДАН СССР, т. 58, № 9, 1947.

Получена
4.VIII 1952 г.