Решение одного интегрального уравнения теории ньютоновского потенциала

М. Я. Леонов

1. В настоящей работе дается явное решение интегрального уравнения

$$u(x, y) = \iint\limits_S \frac{p(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}, \tag{1,1}$$

где область интегрирования S представляет собой часть плоскости xoy, лежащей внутри или вне окружности

$$x^2 + y^2 = a^2, \tag{1,2}$$

причем функция $u(x, y)$ задается в той же области S.

К уравнению (1,1) сводится ряд задач математической физики и, в частности, задача об определении нормального давления (p) по заданной осадке (w) на части (S) поверхности упругого полупространства $z \geqslant 0$, причем следует положить

$$w = \frac{1-\nu^2}{\pi E}\, u, \tag{1,3}$$

где E — модуль Юнга, ν — коэфициент Пуассона. При этом предполагается, что упругое полупространство деформируется только под действием давления p. Если пренебрегать трением, то к этому случаю сводится общая задача о давлении под жестким штампом, поперечное сечение которого имеет форму области S.

В настоящей работе уравнение (1,1) решается, минуя известное решение соответствующей задачи Дирихле [1], которая в данном случае является значительно более сложной задачей, чем стоящая перед нами. При этом мы пользуемся только основными понятиями теории ньютоновского потенциала.

2. Условимся обозначать областью S_a часть плоскости xoy, лежащей внутри круга (1,2), а через $\bar{S}_a$ часть этой плоскости вне указанного круга.

Рассмотрим пока случай, когда область S является областью $\bar{S}_a$. Введем в рассмотрение вспомогательную функцию $U(x, y, z)$, которая представляет потенциал масс, распределенных в области S_a с неизвестной плотностью $p(x, y)$. В этой области задано

$$U(x, y, 0) = u(x, y). \tag{2,1}$$

Функция $U(x, y, z)$ является гармонической всюду, кроме области S_a. Эту функцию можно определить через функцию Грина, чем и решается соответствующая задача Дирихле. Мы воспользуемся только определением функции U в области $\bar{S}_a$:

$$U(x, y, 0) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{S_a} u(\xi, \eta) \left. \frac{\partial G(x, y, 0, \xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=+0} d\xi\, d\eta.$$

Функцию $G(x, y, 0, \xi, \eta, \zeta)$ можно интерпретировать как потенциал в точке (ξ, η, ζ) от единичного электрического заряда, расположенного в точке $(x, y, 0)$ в области $\bar{S}_a$, когда в области S_a поддерживается нулевой потенциал за счет индуцированного электричества (заземленная металлическая поверхность).

Плотность индуцированного электричества определяется по известным формулам теории потенциала в виде

$$\mu(\xi, \eta, x, y) = \frac{-1}{2\pi} \left. \frac{\partial G(x, y, 0, \xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=+0}. \tag{2,2}$$

Тогда получим

$$U(x, y, 0) = -\iint\limits_{S_a} u(\xi, \eta)\, \mu(\xi, \eta, x, y)\, d\xi\, d\eta. \tag{2,3}$$

По определению функция $U(x, y, 0)$ является потенциалом масс, распределенных в области S_a плоскости $z=0$. Эти массы могут быть определены [2] по формуле

$$p(X, Y) = \frac{-1}{4\pi^2} \lim_{b\to\infty} \nabla^2_{XY} \iint\limits_{S_b} \frac{U(\xi, \eta, 0)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(X-\xi)^2+(Y-\eta)^2}}, \tag{2,4}$$

где

$$\nabla^2_{XY} = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2},$$

причем область S_b означает часть плоскости xoy, лежащей внутри круга $x^2+y^2=b^2$. Формулу (2,4) можно еще представить иначе в виде

$$-4\pi^2 p(X, Y) = \nabla^2_{XY} \iint\limits_{S_a} \frac{u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(X-\xi)^2+(Y-\eta)^2}} +$$

$$+ \lim_{b\to\infty} \nabla^2_{XY} \iint\limits_{S_b - S_a} \frac{U(x, y, 0)\, dx\, dy}{\sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2}}.$$

Подставляя в последний интеграл формулу (2,3), после очевидных преобразований можем представить

$$4\pi^2 p(X, Y) = \iint\limits_{S_a} u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \iint\limits_{\bar{S}_a} \frac{\mu(\xi, \eta, x, y)\, dx\, dy}{[(X-x)^2+(Y-y)^2]^{\frac{3}{2}}} -$$

$$- \nabla^2_{XY} \iint\limits_{S_a} \frac{u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(X-\xi)^2+(Y-\eta)^2}}. \tag{2,5}$$

Эта формула теряет смысл, когда точка (X, Y) находится в области $\tilde{S}_a$. Но по условию задачи имеем

$$p(X, Y) = 0 \text{ в области } \tilde{S}_a.$$

Когда же точка (X, Y) принадлежит области S_a, где и подлежит определению функция p, применение формулы (2,5) не встречает затруднений.

Функция μ, входящая в формулу (2,5), по существу определена в работе Л. А. Галина [1]. Однако формулу (2,5) можно упростить, не пользуясь этой функцией. Для этого обозначим

$$I(\xi, \eta) = \iint\limits_{\tilde{S}_a} \frac{\mu(\xi, \eta, x, y)\, dx\, dy}{[(X-x)^2+(Y-y)^2]^{\frac{3}{2}}}. \tag{2,6}$$

Будем рассматривать $I(\xi, \eta)$ как функцию, определяющую плотность зарядов в точке (ξ, η) области S_a (где расположена заземленная металлическая поверхность), индуцированных зарядами, непрерывно распределенными по области $\tilde{S}_a$ с плотностью

$$\mu_1(x, y) = [(X-x)^2+(Y-y)^2]^{-\frac{3}{2}}, \tag{2,7}$$

причем точка (x, y) принадлежит области $\tilde{S}_a$, а точка (X, Y) — области S_a.

Интеграл (2,6) определим, введя в рассмотрение гармоническую при $z > 0$ функцию $\varphi(x, y, z)$, исчезающую на бесконечности как $c(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ и удовлетворяющую следующим условиям:

$$\varphi(x, y, 0) = 0, \quad \text{при} \quad x^2+y^2 \leqslant a^2,$$

$$\varphi_z'(x, y, +0) = \frac{-2\pi}{[(X-x)^2+(Y-y)^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad x^2+y^2 > a^2. \tag{2,8}$$

Функция φ определяется перечисленными выше условиями однозначно. Если такая функция будет найдена, то, имея в виду соотношение между нормальной производной потенциала простого слоя и его плотностью, найдем

$$I(\xi, \eta) = \frac{-1}{2\pi} \left.\frac{\partial\varphi(\xi, \eta, z)}{\partial z}\right|_{z=+0} \qquad (\xi^2+\eta^2 \leqslant a^2). \tag{2,9}$$

Эта формула дает возможность вычислить интеграл (2,6), минуя вычисление функции $\mu(\xi, \eta, x, y)$, которое столь же сложно, как и вычисление интеграла (2,6) по формуле (2,9). Заметим только, что вычисление функции μ наиболее удобно производить тем же методом, которым определяется здесь функция I, если исходить из известной плотности распределения зарядов на металлическом круговом диске.

3. Электрические заряды, расположенные внутри окружности

$$(x-u)^2+(y-v)^2 = R^2 \tag{3,1}$$

с плотностью $\varrho = 1$, индуцируют на заземленной металлической поверхности, расположенной вне этой окружности в плоскости $z=0$, заряды с плотностью [3]

$$\varrho(x, y)=\frac{2}{\pi}\left(\arc\sin\frac{R}{\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}}-\frac{R}{\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2-R^2}}\right). \tag{3,2}$$

Рассмотрим потенциал зарядов, распределенных указанным образом в плоскости $z=0$ с плотностью ϱ. Его можно представить следующим образом:

$$V(x, y, z)=\iint\frac{\varrho(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}}, \tag{3,3}$$

где интегрирование распространяется на всю плоскость $z=0$.

Из данного выше определения функции ϱ следует:

$$V(x, y, 0)=0 \quad \text{при} \quad (x-u)^2+(y-v)^2\geqslant R^2, \tag{3,4}$$

а также

$$\lim\left[V(x, y, z)\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right]=0 \quad \text{при} \quad x^2+y^2+z^2\to\infty, \tag{3,5}$$

т. е. функция V правильная на бесконечности.

Кроме того, существует еще связь между нормальной производной функции V и плотностью ϱ:

$$\varrho(x, y)=-\frac{1}{2\pi}V_z'(x, y, +0),$$

которая дает

$$V_z'(x, y, +0)=-2\pi \quad \text{при} \quad (x-u)^2+(y-v)^2<R^2. \tag{3,6}$$

Вне круга (3,1) будем иметь

$$V_z'(x, y, +0)=4\left(\frac{R}{\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2-R^2}}-\right.$$
$$\left.-\arc\sin\frac{R}{\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}}\right). \tag{3,7}$$

4. Рассмотрим еще функцию

$$\Pi(x, y, z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}V\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right). \tag{4,1}$$

По теореме Кельвина функция $\Pi(x, y, z)$ является гармонической при $z>0$. В силу условия (3,4) будем иметь

$$\Pi(x, y, 0)=0 \quad \text{при} \quad \left(\frac{x}{x^2+y^2}-u\right)^2+\left(\frac{y}{x^2+y^2}-v\right)^2\geqslant R^2, \tag{4,2}$$

причем условие (3,5) обеспечивает однозначность функции Π в начале координат.

Далее замечаем, что

$$\Pi_z'(x, y, 0)=\frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}V_z'\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, 0\right) \tag{4,3}$$

или, пользуясь формулой (3,6), находим

$$\Pi_z'(x, y, +0) = \frac{-2\pi}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{при} \quad \left(\frac{x}{x^2+y^2} - u\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2+y^2} - v\right)^2 > R^2. \quad (4,4)$$

Условия (4,2) и (4,4), которым удовлетворяет функция Π, аналогичны условиям (2,8), которыми определяется функция φ, что и позволяет полностью определить функцию I и тем самым упростить формулу (2,5). Для этого нам остается проделать только элементарные выкладки.

5. Заметим, что

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2} - u\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2+y^2} - v\right)^2 - R^2 =$$

$$= \frac{u^2+v^2-R^2}{x^2+y^2}\left[\left(x - \frac{u}{u^2+v^2-R^2}\right)^2 + \left(y - \frac{v}{u^2+v^2-R^2}\right)^2 - \frac{R^2}{(u^2+v^2-R^2)^2}\right]. \quad (5,1)$$

Введя обозначения

$$a = \frac{R}{R^2-u^2-v^2}, \quad X = \frac{u}{R^2-u^2-v^2}, \quad Y = \frac{v}{R^2-u^2-v^2} \quad (5,2)$$

и замечая, что

$$a^2 - X^2 - Y^2 = \frac{1}{R^2-u^2-v^2}, \quad (5,3)$$

перепишем формулы (5,2) иначе:

$$R = \frac{a}{a^2-X^2-Y^2}, \quad u = \frac{X}{R^2-X^2-Y^2}, \quad v = \frac{Y}{a^2-X^2-Y^2}. \quad (5,4)$$

Пользуясь формулами (5,3) и (5,1), получим

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2} - u\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2+y^2} - v\right)^2 - R^2 = \frac{a^2-(x+X)^2-(y+Y)^2}{(x^2+y^2)(a^2-X^2-Y^2)}. \quad (5,5)$$

Аналогично находим

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2} - u\right)^2 + \left(\frac{y}{x^2+y^2} - v\right)^2 =$$

$$= \frac{[a^2-(x+X)^2-(y+Y)^2](a^2-X^2-Y^2) + a^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)(a^2-X^2-Y^2)^2}. \quad (5,6)$$

Пользуясь формулами (5,5) и (4,2) и считая, что

$$R^2 > u^2 + v^2, \quad (5,7)$$

найдем

$$\Pi_z'(x, y, +0) = \frac{-2\pi}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{при} \quad (x+X)^2 + (y+Y)^2 > a^2. \quad (5,8)$$

Аналогично формулы (4,2), (4,3), (3,7), (5,5) и (5,6) определяют

$$\Pi_z'(x, y, +0) = \frac{4a}{x^2+y^2}\frac{1}{\sqrt{(a^2-X^2-Y^2)[a^2-(x+X)^2-(y+Y)^2]}} -$$

$$-\frac{4}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \arcsin\sqrt{\frac{a^2(x^2+y^2)}{(a^2-x^2-Y^2)[a^2-(x+X)^2-(y+Y)^2] + a^2(x^2+y^2)}}, \quad (5,9)$$

$$\Pi(x, y, 0) = 0 \quad \text{при} \quad (x+X)^2 + (y+Y)^2 \leqslant a^2.$$

6. Последнее из условий (5,9) и условие (5,8) показывают, что, приняв

$$\varphi(x, y, z) = \Pi(x - X, y - Y, z), \tag{6,1}$$

мы удовлетворим условиям (2,8) и условию на бесконечности, которыми однозначно определяется функция φ. Таким образом, формула (2,9) даст

$$I(\xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \Pi_z'(\xi - X, \ \eta - Y, \ +0). \tag{6,2}$$

Отсюда получаем

$$\iint\limits_{\bar{S}_a} \frac{\mu(\xi, \eta, x, y)\, dx\, dy}{[(X-x)^2+(Y-y)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{-2a}{(\xi-X)^2+(\eta-Y)^2} \frac{1}{\pi\sqrt{(a^2-X^2-Y^2)(a^2-\xi^2-\eta^2)}} + \tag{6,3}$$

$$+\frac{2}{\pi[(\xi-X)^2+(\eta-Y)^2]^{\frac{3}{2}}} \arcsin \frac{a\sqrt{(\xi-X)^2+(\eta-Y)^2}}{\sqrt{(a^2-X^2-Y^2)(a^2-\xi^2-\eta^2)+a^2[(\xi-X)^2+(\eta-Y)^2]}}.$$

Напоминаем, что здесь точка (X, Y) и (ξ, η) принадлежит области S_a.

Подставляя последнее в формулу (2,5), мы получим решение интегрального уравнения (1,1), когда область S представляет часть плоскости xoy, лежащей внутри окружности (1,2), т. е. когда $S = S_a$.

7. Рассуждая аналогичным образом, можно построить решение интегрального уравнения (1,1), когда область S представляет плоскость $z = 0$ с круговым отверстием радиуса a, центр которого совпадает с центром координат $(S = \bar{S}_a)$. При этом вместо формулы (2,5) будем иметь

$$4\pi^2 p(X, Y) = \iint\limits_{\bar{S}_a} u(\xi, \eta) \iint\limits_{S_a} \frac{\tilde{\mu}(\xi, \eta, x, y)\, dx\, dy}{[(X-x)^2+(Y-y)^2]^{\frac{3}{2}}} -$$

$$-\lim_{b\to\infty} \nabla^2_{XY} \iint\limits_{S_b - S_a} \frac{u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(X-\xi)^2+(Y-\eta)^2}}. \tag{7,1}$$

Здесь $\tilde{\mu}(\xi, \eta, x, y)$ представляет плотность индуцированного электричества в точке $(\xi, \eta, 0)$ на заземленной металлической поверхности, расположенной в области $\bar{S}_a$, когда в точке $(x, y, 0)$ в области S_a находится единичный заряд. Такая интерпретация позволяет определить интеграл

$$\tilde{I}(\xi, \eta) = \iint\limits_{S_a} \frac{\tilde{\mu}(\xi, \eta, x, y)\, dx\, dy}{[(X-x)^2+(Y-y)^2]^{\frac{3}{2}}}, \tag{7,2}$$

как плотность зарядов в точке $(\xi, \eta, 0)$ на заземленной металлической поверхности, расположенной в области $\bar{S}_a$, когда на остальной части плоскости $z = 0$ распределены заряды с плотностью

$$\tilde{\mu}_1(x, y) = [(X-x)^2+(Y-y)^2]^{-\frac{3}{2}}. \tag{7,3}$$

Дальнейшие рассуждения по определению функции $\tilde{I}$ таковы же, как и при определении функции I вплоть до условия (5,7), которое для данного случая должно быть заменено обратным условием

$$R^2 < u^2 + v^2, \tag{7,4}$$

что означает, что начало координат (центр инверсии) находится вне окружности (3,1). Ввиду этой перемены знак неравенств в формулах (5,8) и (5,9) изменится на обратный. В дальнейшем в рассуждениях по определению $\bar{I}$ не появляется ничего нового.

В результате всего сказанного находим, что функция $\bar{I}$ является своего рода аналитическим продолжением функции I в область $\bar{S}_a$ по всем четырем переменным ξ, η, X, Y, т. е. оказывается, что функция $\bar{I}$ имеет такое же аналитическое представление, как и функция I.

8. Решение интегрального уравнения (1,1), когда область S лежит внутри или вне окружности (1,2), может быть представлено одной формулой

$$p(x, y) = \iint\limits_S K(x, y, \xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta - L(x, y), \tag{8,1}$$

где

$$\begin{gathered} K(x, y, \xi, \eta) = \frac{-a}{2\pi^2 \sqrt{(a^2-x^2-y^2)(a^2-\xi^2-\eta^2)}} \frac{1}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2} + \\ + \frac{1}{2\pi^2 [(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{\frac{3}{2}}} \arcsin \frac{a\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}{\sqrt{(a^2-x^2-y^2)(a^2-\xi^2-\eta^2)+a^2[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]}}, \end{gathered} \tag{8,2}$$

а функция L представляется следующим образом:

1) если область S лежит внутри окружности (1,2), то

$$L(x, y) = \frac{-1}{4\pi^2} \nabla_{xy}^2 \iint\limits_S \frac{u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}; \tag{8,3}$$

2) если область S' лежит вне окружности (1,2), то

$$L(x, y) = \frac{-1}{4\pi^2} \lim_{b\to\infty} \nabla_{xy}^2 \iint\limits_{S_b - S_a} \frac{u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}, \tag{8,4}$$

причем области S_a и S_b лежат внутри окружностей радиуса a и b, центр которых совпадает с началом координат.

Формулы (8,3) и (8,4) объединяются следующим образом:

$$L(x, y) = \frac{-1}{4\pi^2} \lim_{\Sigma\to S} \nabla_{xy}^2 \iint\limits_{\Sigma} \frac{u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}, \tag{8,5}$$

причем предполагается, что в качестве областей Σ берутся области, ограниченные окружностями.

Заметим, что в случае, когда область S является внешностью окружности (1,2), для того чтобы интеграл имел смысл необходимо считать, что функция $p(x, y)$ убывает на бесконечности быстрее, чем $(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$. Однако формула (8,1) может определять функции p, не удовлетворяющие этому условию. В этом случае решения интегрального уравнения (1,1) может не существовать (интеграл расходится), а формула (8,1) все же имеет смысл как решение некоторого интегрального уравнения с более общим ядром. Смысл этого обобщения указан в статье [2] для более простой задачи.

Раскрывая неопределенность в формуле (8,2) при $(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=0$, можно убедиться в ограниченности ядра K всюду, кроме точек, лежащих на окружности (1,2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Галин, Пространственные контактные задачи теории упругости для штампов, круговой формы в плане, Прикл. математика и механика, 1946, № 4.

2. М. Я. Леонов, Некоторые задачи и приложения теории потенциала, Прикл. математика и механика, 1940, № 5—6.

3. М. Я. Леонов, К теории упругих оснований, Прикл. математика и механика, 1939, № 2.

Получена
11.I 1951 г.
Львов.