1953 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ Т. V, № 1
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Изгиб тонких плит с подкрепленным краем

М. П. Шереметьев

§ 1. Ступенчатые плиты

Пусть край тонкой изотропной плиты или край отверстия плиты подкреплен кольцевой плитой, сделанной из другого материала или обладающей другой цилиндрической жесткостью. Подкрепляющая кольцевая плита спаяна с основной по цилиндрической поверхности соприкосновения так, что срединные плоскости их являются продолжением одна другой и образующая цилиндрической поверхности спая нормальна к срединной плоскости.

Обозначим через L контур соприкосновения срединных плоскостей спаянных плит. При изгибе такой ступенчатой плиты усилиями $p(s)$ и моментами $m(s)$, приложенными по краю перпендикулярно к срединной плоскости кольцевой плиты или по краю неподкрепленного контура пластинки, на контуре L должны выполняться условия

$$M_n = M_n^0 \quad \text{и} \quad N_n + \frac{dH_{nt}}{ds} = N_n^0 + \frac{dH_{nt}^0}{ds}, \tag{1,1}$$

где обозначены M_n, H_{nt}, N_n — изгибающие, крутящие моменты и перерезывающая сила, действующие в плите по контуру L, а M_n^0, N_n^0, H_{nt}^0 — те же величины, но относящиеся к кольцу.

Помимо условия (1,1), на контуре L должны равняться прогибы спаянных плит и нормальные производные от прогибов

$$w = w^0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w_0}{\partial n}. \tag{1,2}$$

Обозначим через S и S^0 соответственно области, занимаемые плитой и кольцом, тогда, как известно, w есть бигармоническая функция в S, а w^0 — в области S^0.

Из граничного условия (1,2), очевидно, следует, что

$$\frac{\partial w}{\partial x} - i\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w^0}{\partial x} - i\frac{\partial w^0}{\partial y}. \tag{1,3}$$

По формуле Гурса прогибы w и w^0 представляются через две аналитические функции $\varphi(z)$ и $\chi(z)$

$$w = \mathrm{Re}\{\varphi(z)\bar{z} + \chi(z)\}, \quad \text{а} \quad w^0 = \mathrm{Re}\{\bar{z}\varphi_1(z) + \chi_1(z)\}. \tag{1,4}$$

Если ввести обозначения $\chi'(z) = \psi(z)$, то условия (1,1) и (1,3), как известно [1], можно записать в функциях φ и ψ следующим образом:

$$D\{(3+\nu)\overline{\varphi(t)} - (1-\nu)[\bar{t}\varphi'(t) + \psi(t)]\} =$$

$$= \{(3+\nu_1)\overline{\varphi_1(t)} - (1-\nu_1)[\bar{t}\varphi_1'(t) + \psi_1(t)]\}D_1, \tag{1,5}$$

$$\overline{\varphi(t)} + \bar{t}\varphi'(t) + \psi(t) = \overline{\varphi_1(t)} + \bar{t}\varphi_1'(t) + \psi_1(t).$$

К пластинке, край которой подкреплен кольцевой плитой и область подкрепляющей кольцевой плиты вместе с областью пластинки отображается на круг или на круговое кольцо рациональной функции, применим, с незначительным изменением, прием решения, изложенный нами в статьях [2], [3].

Мы ограничимся в этом параграфе только выводом некоторых формул, позволяющих находить по известным на контуре спая L усилиям в плите усилия в кольце на том же контуре L и наоборот.

Для этой цели продиференцируем равенство (1,5) по s. В результате будем иметь

$$D\{(3+\nu)\overline{\Phi(t)} - (1-\nu)\Phi(t) + (1-\nu)e^{2i\alpha}[\bar{t}\Phi'(t) + \Psi(t)]\} =$$

$$= D_1\{(3+\nu_1)\overline{\Phi_1(t)} - (1-\nu_1)\Phi_1(t) + (1-\nu_1)e^{2i\alpha}[\bar{t}\Phi_1'(t) + \Psi_1(t)], \tag{1,6}$$

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} - e^{2i\alpha}\{\bar{t}\Phi'(t) + \Psi_1(t)\} =$$

$$= \Phi_1(t) + \overline{\Phi_1(t)} - e^{2i\alpha}\{\bar{t}\Phi_1'(t) + \Psi_1(t)\}, \tag{1,7}$$

где α — угол, образованный нормалью с осью OX и $\Psi(z) = \psi'(z)$, $\Phi(z) = \varphi'(z)$. Умножив равенство (1,7) на $D_1(1-\nu_1)$ и сложив его с равенством (1,6), получим

$$\frac{(3D + D_1 + D\nu - D_1\nu_1)}{4D_1}\overline{\Phi(t)} + \frac{(D_1 - D + D\nu - D_1\nu_1)}{4D_1}\Phi(t) +$$

$$+ \frac{(D - D_1 + D_1\nu_1 - D\nu)}{4D_1}e^{2i\alpha}[\bar{t}\Phi'(t) + \Psi(t)] = \overline{\Phi_1(t)}. \tag{1,8}$$

Из равенства (1,8) теперь следует, что

$$\Phi_1(t) + \overline{\Phi_1(t)} = \frac{D + D_1 + D\nu - D_1\nu_1}{2D_1}[\Phi(t) + \overline{\Phi(t)}] +$$

$$+ \frac{D - D_1 + D_1\nu_1 - D\nu}{4D_1}\{e^{2i\alpha}[\bar{t}\Phi'(t) + \Psi(t)] + e^{-2i\alpha}[t\overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)}]\}. \tag{1,9}$$

Подставляя выражение для $\Phi_1(t)$ и $\overline{\Phi_1(t)}$ из равенства (1,8) в (1,6), будем иметь

$$e^{2i\alpha}[\bar{t}\Phi_1'(t) + \Psi_1(t)] = \frac{D - D_1 + D\nu - D_1\nu_1}{2D_1}[\Phi(t) + \overline{\Phi(t)}] +$$

$$+ \frac{D + 3D_1 + D_1\nu_1 - D\nu}{4D_1}e^{2i\alpha}[\bar{t}\Phi'(t) + \Psi(t)] +$$

$$+ \frac{D - D_1 + D_1\nu_1 - D\nu}{4D_1}e^{-2i\alpha}[t\overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)}]. \tag{1,10}$$

Если воспользоваться известными формулами [1], то (1,9) и (1,10) можно записать и так:

$$\frac{M_x^0+M_y^0}{(1+\nu_1)}=\frac{D+D_1+D\nu-D_1\nu_1}{2D(1+\nu)}(M_x+M_y)-$$

$$-\frac{D-D_1+D_1\nu_1-D\nu}{4D(1-\nu)}\{e^{2i\alpha}[M_y-M_x+2iH_{xy}]+e^{-2i\alpha}[M_y-M_x-2iH_{xy}]\}; \quad (1{,}11)$$

$$\frac{e^{2i\alpha}(M_y^0-M_x^0+2iH_{xy}^0)}{1-\nu_1}=-\frac{D-D_1+D\nu-D_1\nu_1}{2D(1+\nu)}(M_x+M_y)+$$

$$+\frac{D+3D_1+D_1\nu_1-D\nu}{4D(1-\nu)}e^{2i\alpha}(M_y-M_x+2iH_{xy})+$$

$$+\frac{D-D_1+D_1\nu_1-D\nu}{4D(1-\nu)}(M_y-M_x-2iH_{xy})e^{-2i\alpha}. \quad (1{,}12)$$

Введем теперь систему координат n, τ, z. Ось n направим по нормали и ориентируем ее по отношению к оси τ так, как ось x к y. Обозначим через M_n, M_τ и $H_{\tau n}$ изгибающие и крутящие моменты, отнесенные к осям n и τ. Тогда по формулам преобразования [1] будем иметь

$$\begin{aligned}&M_\tau-M_n+2iH_{\tau n}=(M_y-M_x+2iH_{xy})e^{2i\alpha},\\&M_x+M_y=M_n+M_\tau,\end{aligned} \quad (1{,}13)$$

где α имеет прежнее значение.

Подставим равенство (1,13) в (1,12) и (1,11) и после очевидных упрощений получим

$$\frac{M_n^0+M_\tau^0}{1+\nu_1}=\frac{D(1-\nu^2)-D_1\nu(1-\nu_1)}{D(1-\nu^2)}M_n+\frac{D_1(1-\nu_1)}{D(1-\nu_2)}M_\tau; \quad (1{,}14)$$

$$\frac{M_\tau^0-M_n^0+2iH_{n\tau}^0}{1-\nu_1}=-\frac{D-D_1+D\nu-D_1\nu_1}{2D(1+\nu)}(M_n+M_\tau)+$$

$$+\frac{D+3D_1+D_1\nu_1-D\nu}{4D(1-\nu)}(M_\tau-M_n+2iH_{\tau n})+$$

$$+\frac{(D-D_1)+D_1\nu_1-D\nu}{4D(1-\nu)}(M_\tau-M_n-2iH_{n\tau}). \quad (1{,}15)$$

Из равенств (1,14) и (1,15) определяются M_n^0, $H_{n\tau}^0$ и M_τ^0 через M_n, $H_{n\tau}$ и M_τ. Действительно, отделив вещественную и мнимую часть в (1,15), получим

$$\frac{M_\tau^0-M_n^0}{1-\nu_1}=-\frac{D(1-\nu^2)+D_1\nu(1+\nu_1)}{D(1-\nu^2)}M_n+\frac{D_1(1+\nu_1)}{D(1-\nu^2)}M_\tau \quad (1{,}16)$$

и

$$H_{n\tau}^0=\frac{D_1(1-\nu_1)}{D(1-\nu)}H_{n\tau}.$$

Умножив равенство (1,14) на $\frac{1}{1-\nu_1}$, а равенство (1,16) на $\frac{1}{1+\nu_1}$ и сложив их, а затем вычтя, найдем

$$M_t^0 = \frac{D_1(1-\nu_1^2)}{D(1-\nu^2)} M_t + \frac{D\nu_1(1-\nu^2) - D_1\nu(1-\nu_1^2)}{D(1-\nu^2)} M_n \tag{1,17}$$

и, как и следовало ожидать, $M_n^0 = M_n$.

Решая (1,17) относительно M_t, получим

$$M_t = \frac{D(1-\nu^2)}{D_1(1-\nu_1^2)} M_t^0 - \frac{D\nu_1(1-\nu^2) - D_1\nu(1-\nu_1^2)}{D_1(1-\nu_1^2)} M_n. \tag{1,18}$$

Если подкрепляющая кольцевая плита абсолютно жесткая, т. е. $D_1 = \infty$, то из (1,18) и (1,16) получаем $M_t = \nu M_n$ и $H_{nt} = 0$.

Эта формула для отдельных частных примеров была впервые получена С. Г. Лехницким [1].

Из (1,1) в силу второго равенства (1,16) следует, что

$$N_n^0 = N_n + \frac{D(1-\nu) - D_1(1-\nu_1)}{D(1-\nu)} \frac{\partial H_{nt}}{\partial s}. \tag{1,19}$$

Обозначим соответственно через h и h_1 толщину плиты и подкрепляющего кольца. Тогда

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}; \quad D_1 = \frac{E_1 h_1^3}{12(1-\nu_1^2)}.$$

Подставив значения жесткостей D и D_1 в (1,17), (1,16) и (1,19), будем иметь

$$\left.\begin{aligned} M_t^0 &= \frac{E_1 h_1^3}{Eh^3} M_t + \frac{Eh^3\nu_1 - E_1 h_1^3 \nu}{Eh^3} M_n; \\ H_{nt}^0 &= \frac{E_1 h_1^3(1+\nu)}{Eh^3(1+\nu_1)} H_{nt}; \end{aligned}\right\} \tag{1,20}$$

$$N_n^0 = N_n + \frac{Eh^3(1+\nu_1) - E_1 h_1^3(1+\nu)}{(1+\nu)Eh^3}. \tag{1,21}$$

Обозначим соответственно через ε_t и ε_t^0 относительное удлинение в направлении касательной к кривым, получающимся от сечения плиты и подкрепляющей кольцевой плиты плоскостями параллельно срединной плоскости и отстоящей от нее на расстоянии z и z_1.

По известным формулам имеем

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \nu\sigma_n) \qquad \varepsilon_t^0 = \frac{1}{E_1}(\sigma_t^0 - \nu\sigma_n^0).$$

Умножим обе части этих равенств на $z\,dz$ и проинтегрируем в пределах толщины плит

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon_t\,dz = \frac{1}{E}(M_t - \nu M_n) \text{ и } \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \varepsilon_t^0 z_1\,dz_1 = \frac{1}{E_1}(M_t^0 - \nu M_n^0). \tag{1,22}$$

Подставляя значения M_t^0 из (1,20) в равенства (1,22), получим следующую зависимость:

$$h^3 \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \varepsilon_t^0 z\,dz = h_1^3 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon_t z\,dz. \tag{1,23}$$

Аналогично имеем

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon_{tn} z\,dz = \frac{2(1+\nu)}{E} H_{tn} \tag{1,24}$$

и

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon_{tn}^0 z\,dz = \frac{2(1+\nu_1)}{E_1} H_{tn}^0.$$

Подставляя значения H_{tn}^0 из (1,20) в (1,24), найдем

$$h^3 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon_{tn}^0 z\,dz = h_1^3 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon_{tn} z\,dz. \tag{1,25}$$

§ 2. Изгиб пластинки, край которой подкреплен тонким упругим кольцом постоянного сечения

Если подкрепляющее кольцо тонкое или фасонного профиля, то его нельзя принять за кольцевую плиту и напряженное состояние такого кольца нельзя уже определять формулами, вытекающими из теории изгиба тонких плит. В этом случае для описания деформации подкрепляющего кольца применим теорию малых деформаций криволинейных стержней без учета растяжения его оси. При определении напряженного состояния при изгибе пластинки, подкрепленной таким кольцом, будем предполагать, что кольцо спаяно с пластинкой до деформации так, что одна из главных осей поперечного сечения кольца лежит в срединной плоскости пластинки. Срединную плоскость пластинки примем за плоскость XOY, ось Z направим вниз.

Пусть $x = x(s)$, $y = y(s)$ — уравнения оси, подкрепляющей кольцо L. Эту ось и примем за контур соприкосновения кольца с пластинкой. На этом контуре граничные условия (1,1) и (1,2) остаются в силе. Положительное направление отсчета дуг примем таким, при котором оси t и n составляют систему, одноименную с системой OX и OY.

После интегрирования второго условия (1,1) по дуге от некоторой точки контура, принятой за начальную, до переменной точки получим

$$H_{nt} + J = \int_0^s \left(\frac{dH_{nt}^0}{ds} + N_n^0 \right) ds + c, \tag{2,1}$$

где $J = \int_0^s N_n ds$, а c — произвольная постоянная.

Условия (1,1) и (2,1), как показал Лехницкий [1], эквивалентны одному условию, записанному в функциях комплексного переменного φ и ψ,

$$(3+\nu)\varphi_1(t) - (1-\nu)\{\bar{t}\varphi_1'(t) + \psi_1(t)\} = \frac{1}{D} J(s) + ic\bar{t} - c_1, \tag{2,2}$$

где

$$J(s) = \int_0^s \left\{ -M_n^0 + i \int_0^{s_1} \left(\frac{dH_{nt}^0}{ds_2} + N_n^0 \right) ds_2 \right\} \bar{t}\, ds_1,$$

$$\psi = \frac{d\chi}{dz}, \quad w = \mathrm{Re}\{\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)\}, \quad z = x + iy$$

и w — прогиб срединной плоскости плиты, ν — коэфициент Пуассона, D — цилиндрическая жесткость пластинки и t — аффикс точки контура.

При совместной работе пластинки и кольца на контуре соприкосновения L кольца с пластинкой, помимо равенства прогибов срединной плоскости и оси кольца, должно выполняться равенство между углом наклона изогнутой срединной плоскости пластинки к плоскости XOY и углом кручения упругой линии кольца, т. е.

$$w(s) = w^0(s) \quad \text{и} \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \gamma, \tag{2,3}$$

где $w^0(s)$ — прогиб упругой линии, а γ — угол кручения.

Продиференцируем первое из условий (2,3) по s. Теперь имеем

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial s}\cos(xs) + \frac{\partial w}{\partial n}\cos(xn) = \frac{\partial w}{\partial s}\dot{x}(s) - \frac{\partial w}{\partial n}\dot{y}(s)$$

и

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y}\dot{y}(s) + \frac{\partial w}{\partial n}\dot{x}(s).$$

Отсюда легко получаем выражение для $\frac{\partial w}{\partial x} - i\frac{\partial w}{\partial y}$, записанное в таком виде:

$$\frac{\partial w(s)}{\partial x} - i\frac{\partial w}{\partial y} = \left(\frac{dw^0}{ds} - i\gamma \right)(\dot{x} - i\dot{y}). \tag{2,4}$$

Левую часть этих условий, в свою очередь, можно записать в функциях φ и ψ, так что

$$\overline{\varphi_1(t)} + \bar{t}\varphi_1'(t) + \psi_1(t) = \left(\frac{dw^0}{ds} - i\gamma \right)(\dot{x} - i\dot{y}). \tag{2,5}$$

Для решения поставленной задачи выведенных двух граничных условий (2,2) и (2,5) недостаточно. Нужно еще знать зависимость прогиба оси стержня w^0 и угла кручения γ от нагрузки, действующей на подкрепляющее кольцо (упругий стержень).

А. И. Лурье в своей работе [4], опираясь на работу Клебша по этому вопросу, в ясной форме выводит все интересующие нас зависимости, если стержень нагружен силой F, отнесенной к единице длины оси стержня.

В нашем случае, помимо силы, действуют и моменты. Мы будем различать две группы усилий, действующих на кольцо. К первой группе отнесем силы взаимодействия (моменты и перерезывающие силы) между плитой и кольцом; ко второй группе — внешние силы, действующие на кольцо, которые также сводятся к моменту $m(s)$ и перерезывающей силе $p(s)$. Моменты и перерезывающие силы отнесены к единице длины оси стержня.

Возьмем отрезок кольца os и напишем уравнения статики для этого отрезка

$$\vec{V}=\vec{V}_0-\int_0 \vec{F}_n^0\,ds; \tag{2,6}$$

$$\vec{L}=\vec{L}_0-[\vec{r}(s)-\vec{r}_0]_x\times\vec{V}_0+\int_0^s[\vec{r}(s)-\vec{r}(\alpha)]\times\left|N_n^0(\alpha)+\frac{dH_{n\tau}(\alpha)}{d\alpha}\right|\vec{k}\,d\alpha+$$
$$+\int_0^s[\vec{r}(s)-\vec{r}(\alpha)]\times p(\alpha)\vec{k}\,d\alpha-\int_0^s M_n^0(\alpha)\vec{\tau}\,d\alpha-\int_0^s m(\alpha)\vec{\tau}\,d\alpha, \tag{2,7}$$

где

$$\vec{F}_n^0=\left|N_n^0+\frac{dH_{n\tau}^0}{ds}+p(s)\right|\vec{k},$$

$\vec{k}$ — единичный вектор оси OZ, $\vec{\tau}$ — единичный вектор касательной к оси стержня, а α другое обозначение для дуги.

Кроме этого, напишем еще соотношение Кирхгоффа, устанавливающее связь между изгибающими и крутящими моментами и изменениями кривизны и соответственно кручения

$$\delta p=\frac{1}{A}L_\xi,\quad \delta q=\frac{1}{B}L_\eta\quad \text{и}\quad \delta r=\frac{1}{C}L_\zeta,$$

где A, B, C — жесткости на изгибе кручения, оси $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ — подвижные. Ось $O\zeta$ направлена по касательной оси стержня, а оси $O\xi$, $O\eta$ — по главным осям поперечного сечения кольца. Величины δp, δq — изменения кривизны проекции элемента стержня на плоскости $\eta\zeta$ и $\zeta\xi$, а δr — изменения кручения стержня.

Соотношения Кирхгоффа можно записать в виде произведения тензора σ и вектора $\vec{L}$

$$\vec{\varepsilon}=\sigma\vec{L}, \tag{2,8}$$

где

$$\sigma = \begin{vmatrix} \frac{1}{A} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{B} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C} \end{vmatrix}, \quad \varepsilon_\xi = \delta p, \quad \varepsilon_\eta = \delta q, \quad \varepsilon_\zeta = \delta r.$$

В нашем случае ось стержня — плоская кривая, оси $O\zeta$ и $O\xi$ совпадают с осями τ и n, ибо, по предположению, одна из главных осей инерции поперечного сечения кольца лежит в плоскости оси кольца. Составляющие тензора σ в неподвижных осях XYZ будут другие. Их значения получаются по обычным формулам преобразования составляющих тензора

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{A}\dot{y}^2 + \frac{1}{C}\dot{x}^2, \quad \sigma_{yy} = \frac{1}{A}\dot{x}^2 + \frac{1}{C}\dot{y}^2, \quad \sigma_{zz} = \frac{1}{B},$$

$$\sigma_{xy} = \dot{x}\dot{y}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right), \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = 0. \tag{2,9}$$

Обозначим через $\vec{\delta}(s)$ вектор перемещения точек оси кольца, а через $\vec{\theta}(s)$ — вектор поворота координат ξ, η, ζ при деформации кольца.

Между векторами $\vec{\delta}(s)$, $\vec{\theta}(s)$ и $\vec{\varepsilon}(s)$ имеют место известные соотношения, получаемые из соотношений Клебша или из аналогии Мора, утверждающей, что изогнутая ось стержня может рассматриваться как эпюра изгибающих моментов некоторого фиктивного распределения сил и моментов

$$\vec{\theta} = \vec{\theta}_0 + \int_0^s \vec{\varepsilon}\, ds, \tag{2,10}$$

$$\vec{\delta} = \vec{\delta}_0 - (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{\theta}_0 - \int_0^s [\vec{r}(s) - \vec{r}(\alpha)] \times \vec{\varepsilon}(\alpha)\, d\alpha, \tag{2,11}$$

где $\vec{r}(s)$ имеет то же значение, что и в формуле (2,7).

Из (2,11) имеем

$$\frac{d\vec{\delta}}{ds} = -\vec{\tau} \times \vec{\theta} = -\vec{\tau} \times \vec{\theta}_0 - \vec{\tau} \times \int_0^s \vec{\varepsilon}(s)\, ds. \tag{2,12}$$

Из соотношения (2,12) следует

$$\frac{d\delta_z}{ds} = \frac{dw^0}{ds} = \theta_{0x}\dot{y} - \theta_{0y}\dot{x} + \dot{y}\int_0^s \varepsilon_x\, ds - \dot{x}\int_0^s \varepsilon_y\, ds =$$

$$= \left(\theta_{0x} + \int_0^s \varepsilon_x\, ds\right)\dot{y} - \left(\theta_{0y} + \int_0^s \varepsilon_y\, ds\right)\dot{x}. \tag{2,13}$$

Угол кручения

$$\gamma = \theta_\tau = \theta_x \cos(\tau x) + \theta_y \cos(\tau y) = \left(\theta_{0x} + \int_0^s \varepsilon_x\, ds\right)\dot{x} + \left(\theta_{0y} + \int_0^s \varepsilon_y\, ds\right)\dot{y}. \quad (2{,}14)$$

Подставим теперь в (2,5) выражение $\frac{dw^0}{ds}$ из (2,13) и значение угла закручивания γ из (2,14); принимая во внимание, что $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$, получим

$$\varphi_1(t) + \overline{t}\,\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)} = -\left\{\left(\theta_{0x} + \int_0^s \varepsilon_x\, ds\right) i + \theta_{0y} + \int_0^s \varepsilon_y\, ds\right\}. \quad (2{,}15)$$

Из формулы (2,8) следует, что

$$\varepsilon_x = \sigma_{xx} L_x + \sigma_{xy} L_y \quad \text{и} \quad \varepsilon_y = \sigma_{xy} L_x + \sigma_{yy} L_y.$$

Компоненты тензора σ определяются формулой (2,9). Тогда, как легко видеть,

$$\varepsilon_x = \left(\frac{1}{A}\dot{y}^2 + \frac{1}{C}\dot{x}^2\right) L_x + \dot{x}\dot{y}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) L_y$$

и (2,16)

$$\varepsilon_y = \left(\frac{1}{A}\dot{x}^2 + \frac{1}{C}\dot{y}^2\right) L_y + \dot{x}\dot{y}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) L_x,$$

и выражение (2,15) теперь примет другой вид

$$\varphi_1(t) + \overline{t}\,\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi(t)} = -(\theta_{0x} i + \theta_{0y}) -$$

$$-\left\{\int_0^s \left[\left(\frac{1}{A}\dot{y}^2 + \frac{1}{C}\dot{x}^2\right) iL_x + \left(\frac{1}{A}\dot{x}^2 + \frac{1}{C}\dot{y}^2\right) L_y\right] ds + \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)\int \dot{x}\dot{y}\,(iL_y - L_x)\, ds\right\}. \quad (2{,}17)$$

Пусть жесткость на изгиб равна жесткости на кручение, т. е. примем, что $A = C = g$. При этом допущении равенство (2,17) упростится и запишется в следующем виде:

$$\varphi_1(t) + \overline{t}\,\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi(t)} = -(\theta_{0x} i + \theta_{0y}) - \frac{1}{g}\int_0^s (iL_x + L_y)\, ds. \quad (2{,}18)$$

Полученное условие вместе с условием (2,2) являются исходными для решения задачи об изгибе плиты, край которой подкреплен упругим тонким кольцом.

Подвергнем правую часть условия (2,18) дальнейшему преобразованию. Из (2,7) легко находим, что

$$L_y + iL_x = L_{0y} + iL_{0x} + [\overline{t(s)} - t_0]\, V_{0z} -$$

$$-\int_0^s [\overline{t(s)} - \overline{t(\alpha)}]\left[N_n^0 + \frac{dH_{nz}^0}{d\alpha}\right] d\alpha -$$

$$-i\int_0^s \overline{t}\, M_n^0\, d\alpha - \int_0^s [\overline{t(s)} - \overline{t(\alpha)}]\, p(\alpha)\, d\alpha - i\int_0^s \overline{t}\, m(\alpha)\, d\alpha. \quad (2{,}19)$$

Возьмем интеграл

$$A=\int_0^s[\bar{t}(s)-\bar{t}(\alpha)]\left[N_n^0+\frac{dH_{nt}^0}{d\alpha}\right]d\alpha$$

и проинтегрируем его по частям

$$\int_0^s[\bar{t}(s)-\bar{t}(\alpha)]\left[N^0+\frac{dH_{nt}^0}{d\alpha}\right]d\alpha=$$

$$=\bar{t}(s)\int_0^s\left(N_n^0+\frac{dH_{nt}^0}{d\alpha}\right)d\alpha-\bar{t}(s)\int_0^s\left(N_n^0+\frac{dH_{nt}^0}{d\alpha}\right)d\alpha+ \tag{2,20}$$

$$+\int_0^s\bar{t}(\alpha)\left\{\int_0^\alpha\left(N_n^0+\frac{dH_{nt}^0}{d\beta}\right)d\beta\right\}d\alpha=\int_0^s\bar{t}(\alpha)\left\{\int_0^\alpha\left(N_n^0+\frac{dH_{nt}^0}{d\beta}\right)d\beta\right\}d\alpha.$$

Воспользовавшись теперь равенствами (2,19) и (2,20), придадим условию (2,18) следующий вид:

$$\varphi_1(t)+\bar{t}\varphi_1'(t)+\psi(t)=-(\theta_{0y}-i\theta_{0x})-\frac{1}{g}(L_{0y}-iL_{0x}-t_0V_{0z})s-$$

$$-\frac{V_{0z}}{g}\int_0^s t(s_1)\,ds_1-\frac{i}{g}\int_0^s J(s_1)\,ds_1+f(s), \tag{2,21}$$

где $J(s)$ имеет прежнее значение, а

$$f(s)=\frac{1}{g}\int_0^s\left\{\int_0^{s_1}[t(s_1)-t(s_2)]\,p(s_2)\,ds_2\right\}ds_1-\frac{i}{g}\int_0^s\left[\int_0^{s_1}m\bar{t}(s_2)\,ds_2\right]ds_1$$

и является известной функцией при заданных $m(s)$ и $p(s)$.

Для определения постоянных L_{0x}, L_{0y}, V_{0z} воспользуемся тем, что при обходе по замкнутому контуру θ_x и θ_y должны возвращаться к исходному значению так же, как и δ_z.

Из (2,10) следует, что

$$\frac{1}{g}\int_0^l L_x ds=0$$

и

$$\frac{1}{g}\int_0^l L_y ds=0,$$

или

$$\frac{1}{g}\int_0^l (L_y+iL_x)\,ds=0,$$

где l обозначает длину всей замкнутой кривой.

В силу равенства (2,20) имеем

$$\int_0^l (L_y+iL_x)\,ds=(L_{0x}i+L_{0y}-t_0V_{0z})\,l+i\int_0^l J(s)\,ds-f(l)=0. \qquad (2,22)$$

Оси координат выберем в центре тяжести оси кольца. Следовательно, интеграл $\int_0^l \bar{t}(s)\,ds$ равен нулю, и из равенства (2,22) теперь будем иметь

$$iL_{0x}+L_{0y}-\bar{t}_0V_{0z}=\frac{1}{l}f(l)-\frac{i}{l}\int_0^l J(s)\,ds \qquad (2,23)$$

Если $m(s)=p(s)=0$, т. е. если на кольцо внешние силы не действуют, то из (2,23) следует, что

$$L_{0y}+iL_{0x}+\bar{t}_0V_{0z}=-\frac{i}{l}\int_0^l J(s)\,ds. \qquad (2,24)$$

§ 3. Изгиб бесконечной пластинки с круговым отверстием, край которого подкреплен тонким кольцом

При решении этой задачи мы будем предполагать для простоты вычислений, что к подкрепляющему кольцу не приложены внешние силы.

Положим, что $z=R\zeta$. Тогда условия на границе (2,2) и (2,5) примут вид

$$\frac{3+\nu}{1-\nu}\overline{\varphi(\sigma)}-\left\{\frac{1}{\sigma}\varphi'(\sigma)+\psi(\sigma)\right\}=\frac{1}{D(1-\nu)}J(\vartheta)+\frac{1}{1-\nu}\,\frac{RC}{\sigma}-\frac{1}{1-\nu}C_1;$$

$$\overline{\varphi(\sigma)}+\left\{\frac{1}{\sigma}\varphi'(\sigma)+\psi(\sigma)\right\}=-(\theta_{0x}i+\theta_{0y})-\frac{1}{g}(L_{0y}+iL_{0x}-RV_{0z})R\vartheta-$$
$$-\frac{iR}{g}\int_0^{\vartheta}J(\vartheta)\,d\vartheta-\frac{V_{0z}R^2}{g}\,\frac{1}{\sigma}+iR^2V_{0z}, \qquad (3,1)$$

где

$$J(\vartheta)=\int_0^{\vartheta}\left\{-M_n^0+i\int_0^{\vartheta_1}\left(\frac{dH_{nt}^0}{d\beta}+N_n^0\right)d\beta\right\}R\,\bar{t}\,d\vartheta_1.$$

Напряженное состояние на бесконечности возьмем однородным в том смысле, что моменты $M_{x\infty}$, $M_{y\infty}$ и $H_{xy\infty}$ являются ограниченными величинами и главный вектор $p_z=0$. Функции $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$, как известно [5], в этом случае можно представить в таком виде:

$$\varphi(\zeta)=-\frac{AR\zeta}{4D(1+\nu)}+\varphi_0(\zeta),\quad \psi(\zeta)=\frac{BR\zeta}{2D(1-\nu)}+\psi_0(\zeta), \qquad (3,2)$$

где R — радиус упругой линии кольца.

Значения A и B приведены в нижеследующей табличке:

	A	B
$M_{x\infty}=M_{y\infty}=M \quad H_{xy\infty}=0$	$2M$	0
$M_{x\infty}=0$ или $M_y=0 \quad H_{x\infty}=0$	M	$\pm M$
$M_{x\infty}=M_{y\infty}=0 \quad H_{x\infty}=H$	0	$2iH$

где M — изгибающий момент.

Знак при M во второй строке нужно брать $+$, когда $M_x=0$, и знак $-$, когда $M_y=0$.

Подставляя в (3,1) значение функций из (3,2), получим

$$\frac{3+\nu}{1-\nu}\overline{\varphi_0(\sigma)}-\left\{\frac{1}{\sigma}\varphi_0'(\sigma)+\psi_0(\sigma)\right\}=\frac{1}{D(1-\nu)}J(\vartheta)-\frac{1}{1-\nu}\frac{iRC}{\sigma}-$$
$$-\frac{1}{1-\nu}C_1+\frac{AR}{2D(1-\nu)}\frac{1}{\sigma}+\frac{RB\sigma}{2D(1-\nu)};\tag{3,3}$$

$$\overline{\varphi_0(\sigma)}+\left\{\frac{1}{\sigma}\varphi_0'(\sigma)+\psi_0(\sigma)\right\}=-\frac{iR}{g}\int_0^{\vartheta}J(\vartheta)\,d\vartheta-(\theta_{0y}+i\theta_{0x}-iR^2V_{0z})-$$
$$-\frac{1}{g}(L_{0y}+iL_{0x}-RV_{0z})R\vartheta+\frac{AR}{2D(1+\nu)}\frac{1}{\sigma}-\frac{RB\sigma}{2D(1-\nu)}-\frac{iR^2V_{0z}}{g\sigma}.\tag{3,4}$$

Из (3,3) и (3,4) легко находим

$$\frac{3+\nu}{1-\nu}\overline{\varphi_0\left(\frac{1}{\zeta}\right)}=\frac{1}{D(1-\nu)}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma}\frac{J(\vartheta)\,d\vartheta}{\sigma-\zeta}-\frac{1}{1-\nu}C_1+\frac{RB\zeta}{2D(1-\nu)};\tag{3,5}$$

$$\overline{\varphi_0}\left(\frac{1}{\zeta}\right)=-\frac{iR}{g}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\int\limits_0^{\vartheta}J(\vartheta_1)\,d\vartheta_1}{\sigma-\zeta}\,d\sigma-[\theta_{0y}+i(\theta_{0z}-V_{0z}R^2)]-$$
$$-\frac{RB\zeta}{2D(1-\nu)}-\frac{hR}{g}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma}\frac{\vartheta\,d\sigma}{\sigma-\zeta},\tag{3,6}$$

где $|\zeta|<1$ и $h=L_{0y}-RV_{0z}+iL_{0x}$.

Аналогичным образом имеем

$$\frac{1}{\zeta}\varphi_0'(\zeta)+\psi_0(\zeta)=-\frac{AR}{2D(1-\nu)}\frac{1}{\zeta}-\frac{1}{1-\nu}\frac{iRc}{\zeta}+$$
$$+\frac{1}{D(1-\nu)}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{J(\vartheta)\,d\sigma}{\sigma-\zeta};\tag{3,7}$$

$$\frac{1}{\zeta}\varphi_0'(\zeta)+\psi_0(\zeta)=\frac{iR}{g}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\int\limits_0^{\vartheta}J(\vartheta_1)\,d\vartheta}{\sigma-\zeta}\,d\sigma+$$
$$+\frac{hR}{g}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\vartheta\,d\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{AR}{2D(1+\nu)}\frac{1}{\zeta}-\frac{iR^2V_{0z}}{g}\frac{1}{\zeta},\tag{3,8}$$

где $|\zeta|>1$.

Сравнивая одноименные функции (3,5), (3,6) и (3,7) и затем (3,8), будем иметь

$$\frac{1}{D(3+\nu)}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{Jd\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{iR}{g}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\int_0^\vartheta Jd\vartheta_1}{\sigma-\zeta}d\sigma=-\frac{2RB\zeta}{D(1-\nu)(3+\nu)}-$$
$$-\frac{hR}{g}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\vartheta\,d\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{c_1}{3+\nu}-[\theta_{0y}+i(\theta_{0z}-V_{0z}R^2)];\tag{3,9}$$

$$\frac{1}{D(1-\nu)}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{J\,d\sigma}{\sigma-\zeta}-\frac{iR}{g}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\int_0^\vartheta J\,d\vartheta_1}{\sigma-\zeta}d\sigma=\frac{AR}{D(1-\nu^2)}\frac{1}{\zeta}+$$
$$+\frac{1}{1-\nu}\frac{iRC}{\zeta}-\frac{iR^2V_{0z}}{g\zeta}+\frac{hR}{g}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\vartheta\,d\sigma}{\sigma-\zeta}.\tag{3,10}$$

Разложим J в комплексный ряд Фурье

$$J=\sum_1^\infty a_n\sigma^n+\sum_1^\infty b_n\sigma^{-n}+a_0,\tag{3,11}$$

где

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Je^{-in\vartheta}d\vartheta,\quad b_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Je^{in\vartheta}d\vartheta,\quad a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}J(\vartheta)\,d\vartheta.$$

Имея в виду (3.11), получим

$$\int_0^\vartheta J\,d\vartheta=-i\sum_1^\infty\frac{1}{n}(a_n\sigma^n-b_n\sigma^{-n})+a_0\vartheta+C_3,\tag{3,12}$$

где C_3 — некоторая постоянная.

Из (2,23) следует, что

$$L_{0y}+iL_{0x}-RV_{0z}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}J(\vartheta)\,d\vartheta=-ia_0.\tag{3,13}$$

Подставим равенство (3,11) в (3,5), а равенство (3,12) в (3,6); тогда, принимая во внимание, что $\varphi_0(\infty)=0$, найдем

$$\frac{1}{D(1-\nu)}a_0=\frac{1}{1-\nu}C_1\quad\text{и}\quad\frac{iR}{g}C_3=-[\theta_{0y}+i(\theta_{0x}-V_{0z}R^2)].\tag{3,14}$$

Из (3,9) и (3,10) после подстановки вместо J и $\int_0^\vartheta J\,d\vartheta$ их значения из (3,11) и (3,12), имея в виду равенства (3,13) и (3,14), найдем значения коэфициентов разложения a_n и b_n ($n=1, 2, 3\ldots$).

Легко видеть, что только два коэфициента a_1 и b_1 отличны от нуля, все же остальные коэфициенты равны нулю.

$$a_1=\frac{2RBg}{(1-\nu)[g+DR(3+\nu)]};$$

$$b_1=\frac{ARg}{(1+\nu)[g+RD(1-\nu)]}-\frac{iRDg[C-(1-\nu)RV_{0z}]}{g+RD(1-\nu)}.$$

Подставляя теперь значение $J(\vartheta)=a_1\sigma_1+b_1\frac{1}{\sigma}+a_0$ в (3,5), получим

$$\overline{\varphi_0}\left(\frac{1}{\zeta}\right)=\frac{1}{D(3+\nu)}a_1\zeta+\frac{RB\zeta}{2D(3+\nu)}.$$

Отсюда

$$\varphi_0(\zeta)=-\frac{RB[g-RD(1-\nu)]}{2D(1-\nu)[g+RD(3+\nu)]}\frac{1}{\zeta}.$$

Из формулы (3,7) теперь нетрудно определить $\Psi_0(\zeta)$:

$$\Psi_0(\zeta)=-\frac{1}{\zeta}\varphi_0'(\zeta)-\frac{BR}{2D(1-\nu)}\frac{1}{\zeta}-\frac{1}{1-\nu}\frac{iRC}{\zeta}-\frac{1}{D(1-\nu)}\frac{b_1}{\zeta}=$$

$$=-\frac{RB[g-RD(1-\nu)]}{2D(1-\nu)[g+RD(3+\nu)]}\frac{1}{\zeta^3}+ \qquad (3,15)$$

$$+\frac{AR[g-RD(1+\nu)]}{2D(1+\nu)[g+RD(1-\nu)]}\frac{1}{\zeta}-\frac{iR^2(DC+gV_{0z})}{g+RD(1-\nu)}\frac{1}{\zeta}.$$

Таким образом, для искомых функций $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ получим

$$\varphi(\zeta)=-\frac{AR\zeta}{4D(1+\nu)}-\frac{RB[g-RD(1-\nu)]}{2D(1-\nu)[g+RD(3+\nu)]}\frac{1}{\zeta}; \qquad (3,16)$$

$$\psi(\zeta)=\frac{RB\zeta}{2D(1-\nu)}+\frac{AR[g-RD(1+\nu)]}{2D(1+\nu)[g+RD(1-\nu)]}\frac{1}{\zeta}-$$

$$-\frac{iR^2(CD+V_{0z})}{g+RD(1-\nu)}\frac{1}{\zeta}-\frac{RB[g-RD(1-\nu)]}{2D(1-\nu)[g+RD(\zeta+\nu)]}\frac{1}{\zeta^3}. \qquad (3,17)$$

Для определения неизвестных постоянных C и V_{0z} воспользуемся тем обстоятельством, что прогибы должны быть однозначны как в плите, так и в подкрепляющем кольце. Из условия однозначности прогиба в плите следует, что $C=-\frac{1}{D}V_{0z}$. Так как значений этих постоянных нам не потребуется, то второго уравнения мы составлять не будем.

После определения функций $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ моменты M_r, M_ϑ, $H_{r\vartheta}$ и перерезывающие силы определяются по известным формулам

$$
\begin{aligned}
M_\vartheta &= \frac{A[\nu g+RD(1-\nu^2)]}{(1+\nu)[g+RD(1-\nu)]} - \frac{2B[\nu g-RD(1-\nu^2)]}{(1-\nu)[g+RD(\zeta+\nu)]}\cos 2\vartheta;\\
M_r &= \frac{Ag}{(1+\nu)[g+RD(1-\nu)]} - \frac{2Bg}{(1-\nu)[g+RD(3+\nu)]}\cos 2\vartheta;\\
H_{r\vartheta} &= \frac{2BDR}{g+RD(3+\nu)}\sin 2\vartheta;\\
N_r &= \frac{4B[g-RD(1-\nu)]}{R(1-\nu)[g+RD(\zeta+\nu)]}\cos 2\vartheta;\\
N_\vartheta &= \frac{4B[g-RD(1-\nu)]}{R(1-\nu)[g+RD(\zeta+\nu)]}\sin 2\vartheta.
\end{aligned}
\tag{3,18}
$$

Подставляя вместо A и B их значения из таблицы на стр. 70, получим выражения для $M_{\zeta\vartheta}$, M_ζ и $H_{\zeta\vartheta}$ при элементарных деформациях бесконечной пластинки.

Задачу об изгибе бесконечной пластинки с круговым отверстием, край которого подкреплен тонким кольцом, когда $M_x = M_y = M$, решил Н. П. Флейшман [5], используя при этом известную формулу для угла поворота поперечного сечения кольца при равномерно распределенных скручивающих моментах вдоль оси стержня. Наш метод решения не требует предварительного знания напряженного состояния кольца и основан на определении функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ из общих условий на границе (2,2) и (2,5), полученных нами впервые.

Для определения соответствующих моментов в кольце воспользуемся равенствами (1,23) и (1,25), которые будем считать верными и для данной задачи, если подкрепляющее кольцо на спае с плитой ограничено цилиндрической поверхностью, образующая которой нормальна к срединной плоскости пластинки.

Из (1,23) и (1,25) имеем

$$
\begin{aligned}
\frac{h^3}{E_1}(M_\vartheta^\circ-\nu_1 M_r^\circ) &= \frac{h_1}{E}(M_\vartheta-\vartheta M_r),\\
\frac{2h^3(1+\nu_1)}{E_1}H_{r\vartheta}^\circ &= \frac{2h_1^3(1+\nu)}{E}H_{r\vartheta}.
\end{aligned}
\tag{3,19}
$$

Принимая, что M_ϑ, M_r и $M_{r\vartheta}$ в плите на оси кольца и на контуре спая плиты с кольцом мало друг от друга отличаются вследствие того, что кольцо не широко, значения M_ϑ, M_r и $H_{r\vartheta}$ в выражении (3,19) возьмем из (3,18). Таким образом, из (3,19) имеем

$$
M_\vartheta^\circ = \frac{h_1^3}{h}\frac{E_1}{E}M_\vartheta + \frac{\nu_1 Eh-\nu E_1 h_1}{hE}M_r,\quad H_{r\vartheta} = \frac{h_1^3 E_1(1+\nu)}{hE(1+\nu_1)},\quad M_r^\circ = M_r,
$$

где M_ϑ, M_r и $H_{r\vartheta}$, как уже говорилось, определяются формулами (3,18).

§ 4. Изгиб бесконечной анизотропной пластинки с круговым отверстием, край которого подкреплен тонким кольцом

При рассмотрении этой задачи, как и в § 3, предполагается, что подкрепляющее кольцо свободно от воздействия внешних сил и напряженное состояние на бесконечности однородно, т. е. $M_x^{(\infty)}$, $M_y^{(\infty)}$ и $H_{xy}^{(\infty)}$ являются ограниченными величинами. В этом случае функции $\Phi_1(z_1)=\varphi_1'(z_1)$, $\Psi_2(z_2)=\varphi_2'(z_2)$ имеют вид

$$\begin{aligned}\Phi_1(z_1)&=Bz_1+\Phi_1^0(z_1);\\ \Psi_2(z_2)&=(B_2+iC_2)\,z_2+\Psi_2^0(z_2),\end{aligned}\qquad(4,1)$$

где $\Phi_1^0(z_1)$ и $\Psi_2^0(z_2)$ являются функциями вида

$$\Phi_1^0(z_1)=\frac{a_1}{z_1}+\frac{a_2}{z_2^2}+\ldots\qquad \Psi_2^0(z_2)=\frac{a_1'}{z_2}+\frac{a_2'}{z_2^2}+\ldots\qquad(4,2)$$

Постоянные B_1, B_2+iC_2 в (4,2) при заданных $M_x^{(\infty)}$, $M_y^{(\infty)}$, $H_{xy}^{(\infty)}$ определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned}M_x^{(\infty)}&=-2\,\mathrm{Re}\,\{p_1B_1+P_2\,(B_2+iC_2)\},\\ M_y^{(\infty)}&=-2\,\mathrm{Re}\,\{q_1B_1+q_2\,(B_2+iC_2)\},\\ H_{xy}^{(\infty)}&=-2\,\mathrm{Re}\,\{r_1P_1+r_2\,(B_2+iC_2)\},\end{aligned}$$

где p_1, p_2, q_1, q_2, r_1, r_2 — некоторые постоянные, зависящие известным образом от упругих постоянных пластинки [1].

Введем функцию $z=R\zeta$, отображающую внешность отверстия пластинки на внешность единичного круга, тогда

$$z_1=\frac{R}{2}\left[(1-i\mu_1)\,\zeta+(1+i\mu_1)\,\frac{1}{\zeta}\right],\quad z_2=\frac{R}{2}\left[(1-i\mu_2)\,\zeta+(1+i\mu_2)\,\frac{1}{\zeta}\right],\qquad(4,3)$$

$$\begin{aligned}\Phi(z_1)&=\Phi(\zeta)=\frac{1}{2}\,R\,(1-i\mu_1)\,B_1\zeta+\Phi_0(\zeta),\\ \Psi(z_2)&=\Psi(\zeta)=\frac{R}{2}\,(1-i\mu_2)\,(B_2+iC_2)\,\zeta+\Psi_0(\zeta),\end{aligned}\qquad(4,4)$$

где $\Phi_0(\zeta)$ и $\Psi_0(\zeta)$ — голоморфные функции вне единичного круга, включая и бесконечно удаленную точку.

Условия (4), (14) и (15) нашей работы [6] для данной задачи в преобразованной области запишутся следующими четырьмя равенствами:

$$\begin{aligned}&2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{p_1}{\mu_1}\,\Phi(\sigma)+\frac{p_2}{\mu_2}\,\Psi(\sigma)\right\}=R\int\limits_0^{\vartheta}(-M_n^0\cos\vartheta+f\,\sin\vartheta)\,d\vartheta-CR\cos\vartheta+C_1,\\ &2\,\mathrm{Re}\,\{q_1\Phi(\sigma)+q_2\Psi(\sigma)\}=R\int\limits_0^{\vartheta}(M_n\sin\vartheta+f\,\cos\vartheta)\,d\vartheta+CR\sin\vartheta+C_2;\end{aligned}\qquad(4,5)$$

$$2\,\mathrm{Re}\{\Phi(\sigma)+\Psi(\sigma)\}=-\theta_{0y}-$$

$$-\frac{R}{A}\int_0^{\vartheta}\left\{L_{0y}+R[\cos\vartheta_1-1]V_{0z}+R\int_0^{\vartheta_1}(-M_n^0\cos\vartheta+f\sin\vartheta)\right\}d\vartheta_1\Big\},\tag{4,6}$$

$$2\,\mathrm{Re}\{\mu_1\Phi(\sigma)+\mu_2\Psi(\sigma)\}=\theta_{0x}+$$

$$+\frac{R}{A}\int_0^{\vartheta}\left\{L_{0x}-R\sin\vartheta_1V_{0z}+R\int_0^{\vartheta_1}(M_n^0\sin\vartheta+f\cos\vartheta)\right\}d\vartheta_1\Big\},$$

где

$$f=\int_0^s\left(\frac{\partial H_{nt}^0}{\partial\alpha}+N_n^0\right)ds.$$

Умножая обе части равенств (4,5) и (4,6) на $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$ и интегрируя по единичной окружности γ, получим две группы равенств для определения функций Φ_0 и Ψ_0

$$\frac{p_1}{\mu_1}\Phi_0(\zeta)+\frac{p_2}{\mu_2}\Psi_0(\zeta)=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{\overline{p_1}}{\overline{\mu_1}}(1+i\overline{\mu_1})B_1+\frac{\overline{p_2}}{\overline{\mu_2}}(1+i\overline{\mu_2})(B_2-iC_2)\right]\frac{R}{\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{J_1\,d\sigma}{\sigma-\zeta}-\frac{1}{2}C\frac{R}{\zeta};$$

$$q_1\Phi_0(\zeta)+q_2\Psi_0(\zeta)=\tag{4,7}$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\overline{q_1}(1+\overline{\mu_1})B_1+\overline{q_2}(1+i\overline{\mu_2})(B_2-iC_2)\right]\frac{R}{\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{J_2\,d\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{1}{2}iC\frac{R}{\zeta};$$

$$\Phi_0(\zeta)+\Psi_0(\zeta)=-\frac{1}{2}\left[(1+i\overline{\mu_1})B_1+(1+i\overline{\mu_2})(B_2-iC_2)\right]\frac{R}{\zeta}+$$

$$+\frac{R}{A}(L_{0y}-V_{0z}R)\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\vartheta\,d\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{R}{A}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\int_0^{\vartheta}J_1\,d\vartheta}{\sigma-\zeta}d\sigma+\frac{iRV_{0z}}{2A}\frac{R}{\zeta};\tag{4,8}$$

$$\mu_1\Phi_0(\zeta)+\mu_2\Psi_0(\zeta)=-\frac{1}{2}\left[\overline{\mu_1}(1+i\overline{\mu_1})B_1+\overline{\mu_2}(1+i\overline{\mu_2})(B_2-iC_2)\right]\frac{R}{\zeta}-$$

$$-\frac{R}{A}L_{0x}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\vartheta\,d\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{RV_{0z}}{2A}\frac{R}{\zeta}-\frac{R}{A}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\int_0^{\vartheta}J_2\,d\vartheta}{\sigma-\zeta}d\sigma,$$

где

$$J_1=R\int_0^{\vartheta}(-M_n^0\cos\vartheta+f\sin\vartheta)\,d\vartheta,\quad J_2=R\int_0^{\vartheta}(M_n^0\sin\vartheta+f\cos\vartheta)\,d\vartheta.$$

Решив уравнения (4,7) и (4,8) относительно функций Φ_0 и Ψ_0, а затем сравнив полученные выражения при одноименных функциях, будем иметь

$$\frac{(b_1+n_1)R}{\zeta}=\delta_1\frac{R}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\vartheta\,d\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{1}{\mu_2-\mu_1}\frac{R}{A}\left[\mu_2\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\int_0^\vartheta J_1\,d\vartheta}{\sigma-\zeta}d\sigma+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\int_0^\vartheta J_2\,d\vartheta}{\sigma-\zeta}d\sigma\right]+$$

$$+\frac{\mu_1}{2\Delta}\left[-p_2\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{J_2\,d\sigma}{\sigma-\zeta}+q_2\mu_2\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{J_1\,d\sigma}{\sigma-\zeta}\right];\tag{4,9}$$

$$\frac{(b_1'+n_1')R}{\zeta}=-\delta_1\frac{R}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\vartheta\,d\sigma}{\sigma-\zeta}-\frac{1}{\mu_2-\mu_1}\frac{R}{A}\left[\mu_1\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\int_0^\vartheta J_1\,d\vartheta}{\sigma-\zeta}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\int_0^\vartheta J_2\,d\vartheta}{\sigma-\zeta}\right]-\frac{\mu_2}{2\Delta}\left[-p_1\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{J_2\,d\sigma}{\sigma-\zeta}+q_1\mu_1\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{J_1\,d\sigma}{\sigma-\zeta}\right],\tag{4,10}$$

где обозначено:

$$b_1=\frac{1}{(\mu_2-\mu_1)2\mu_1\mu_2\Delta}\{[(\bar\mu_1\bar q_1P_2-P_1\mu_2q_2)\mu_1(\mu_2-\mu_1)+$$

$$+(P_1\mu_2q_2-P_2q_1\mu_1)\bar\mu_1(\bar\mu_2-\bar\mu_1)]\mu_2B_1(1+i\mu_1)+[\mu_1(\bar q_2\bar\mu_2P_2-$$

$$-\bar P_2q_2\mu_2)](\mu_2-\mu_1)-(\bar\mu_2-\mu_1)\bar\mu_2(p_1\mu_2q_2-p_2q_1\mu_1)]\mu_1(B_2-iC_2)(1+i\bar\mu_2)\};$$

$$n_1=\frac{RV_{0z}(1-i\mu_2)}{2A(\mu_2-\mu_1)}-\frac{C\mu_1(\mu_2q_2+ip_2)}{4\Delta},\quad \delta=\frac{1}{\mu_2-\mu_1}\frac{R}{A}[(L_{0y}-RV_{0z})\mu_2+L_{0x}],$$

$$\Delta=p_1\mu_2q_2-p_2\mu_1q_1;\tag{4,11}$$

$$b_1'=\frac{1}{(\mu_2-\mu_1)2\mu_1\mu_2\Delta}\{-\mu_2(\mu_2-\mu_1)(p_1\bar\mu_1\bar q_1-p_1\mu_1q_1)+$$

$$+\bar\mu_1(\bar\mu_1-\mu_1)(p_1\mu_1q_2-p_2\mu_1q_1)]\mu_2(1+i\mu_1)+[(\bar\mu_2-\mu_1)\bar\mu_2(p_1\mu_2q_2-p_2\mu_1q_1)-$$

$$-\mu_2(\mu_2-\mu_1)(\bar\mu_2\bar q_2p_1-p_2\mu_1q_1)]\bar\mu_1(B_2-iC_2)(1+i\bar\mu_2);$$

$$n_1'=\frac{C\mu_2(q_1\mu_1+ip_1)}{4\Delta}-\frac{RV_{0z}(1-i\mu_1)}{2A(\mu_2-\mu_1)},$$

$$\delta_1'=\frac{1}{\mu_2-\mu_1}\frac{R}{A}[(L_{0y}-RV_{0z})\mu_1+L_{0x}].$$

Разложим J_1 и J_2 в комплексный ряд Фурье

$$J_1=\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_k\sigma^k\quad\text{и}\quad J_2=\sum_{-\infty}^{\infty}\beta_k\sigma^k,\tag{4,12}$$

где

$$\sigma^k=e^{ik\vartheta},\quad \alpha^k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}J_1e^{-ik\vartheta}\,d\vartheta,\quad \beta_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}J_2e^{-ik\vartheta}\,d\vartheta.$$

Выпишем теперь условия, обеспечивающие непрерывность углов поворота θ_x, θ_y. Из (2,10) и (2,16) следует, что при $A=C$

$$\theta_x=\theta_{0x}+\frac{1}{A}\int\limits_0^s L_x\,ds,\quad \theta_y=\theta_{0y}+\frac{1}{A}\int\limits_0^s L_y\,ds.$$

Следовательно, непрерывность угла поворота будет выполняться, если

$$\oint\limits_0 L_y\,ds=\oint\limits_1 L_x\,ds=0. \tag{4,13}$$

Если $m(s)$ и $p(s)$ равны нулю, то из (4,13) найдем, что

$$L_{0x}=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} J_2\,d\vartheta=-\beta_0,\quad \text{а}\quad L_{0y}-RV_{0z}=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} J_1\,d\vartheta=-\alpha_0 \tag{4,14}$$

Таким образом,

$$\delta_1=-\frac{1}{\mu_2-\mu_1}\frac{R}{A}(\mu_2\alpha_0+\beta_0)\quad\text{и}\quad \delta_1{}'=-\frac{1}{\mu_2-\mu_1}\frac{R}{A}(\mu_1\alpha_0+\beta_0). \tag{4,15}$$

Подставим в (4,9) и (4,10) вместо δ_1 и $\delta_1{}'$ их значения из (4,15), а вместо J_1 и J_2 соответствующие ряды из (4,12) и, воспользовавшись при этом известными свойствами интеграла типа Коши, приведем равенства (4,9) и (4,10) к следующему виду:

$$\begin{gathered}\frac{(b_1+n_1)R}{\zeta}=-\frac{i\mu_2}{\mu_2-\mu_1}\frac{R}{A}\sum_1^\infty\frac{1}{k}\alpha_k\zeta^{-k}-\\ -\frac{i}{\mu_2-\mu_1}\frac{R}{A}\sum_1^\infty\frac{1}{k}\beta_{-k}\zeta^{-k}+\frac{\mu_1}{2\Delta}\left(p_2\sum_1^\infty\beta_{-k}\zeta^{-k}-\mu_2q_2\sum_1^\infty\alpha_{-k}\zeta^{-k}\right);\\ \frac{(b_1{}'+n_1{}')R}{\zeta}=\frac{i}{\mu_2-\mu_1}\frac{R}{A}\left(\mu_1\sum_1^\infty\frac{1}{k}\alpha_{-k}\zeta^{-k}+\sum_1^\infty\frac{1}{k}\beta_{-k}\zeta^{-k}\right)-\\ -\frac{\mu_2}{2\Delta}\left(p_1\sum_1^\infty\beta_{-k}\zeta^{-k}-\mu_1q_1\sum_1^\infty\alpha_{-k}\zeta^{-k}\right).\end{gathered} \tag{4,16}$$

Сравнение коэффициентов при первой степени ζ в (4,16) дает

$$\begin{gathered}(b_1+n_1)R=-\frac{i}{\mu_2-\mu_1}\frac{R}{A}(\alpha_{-1}\mu_2+\beta_{-1})+\frac{\mu_1}{2\Delta}(p_2\beta_{-1}-\mu_2q_2\alpha_{-1}),\\ (b_1{}'+n_1{}')=\frac{1}{\mu_2-\mu_1}\frac{R}{A}(\alpha_{-1}\mu_1+\beta_{-1})-\frac{\mu_1}{2\Delta}(p_1\beta_{-1}-\mu_1q_1\alpha_{-1}).\end{gathered} \tag{4,17}$$

Детерминант системы (4,17), равный

$$\begin{gathered}\frac{R^2}{A^2}\frac{1}{\mu_2-\mu_1}-\left[\frac{i\mu_1\mu_2}{\Delta(\mu_2-\mu_1)}(q_2-q_1)-\right.\\ \left.-\frac{i}{(\mu_2-\mu_1)\Delta}\right]\frac{R}{A}+\frac{\mu_1\mu_2}{\Delta^2}(\mu_2q_2-\mu_1q_1)\neq 0,\end{gathered} \tag{4,18}$$

отличен от нуля.

При дальнейшем сравнении коэфициентов в равенстве (4,16) при ζ^{-k} $(k=2, 3, \ldots)$ получим однородную систему двух уравнений относительно α_{-k}, β_{-k} с определителем (4,18), отличным от нуля, а следовательно, все $\alpha_{-k}=\beta_{-k}=0$ $(k=2, 3, \ldots)$.

Функции $\Phi_0(\zeta)$ и $\Psi_0(\zeta)$, определенные из (4,7) или (4,8), для данной задачи имеют вид

$$\Phi_0(\zeta)=\frac{N}{\zeta}; \quad \Psi_0(\zeta)=\frac{N_1}{\zeta},$$

где N и N_1 — некоторые константы, еще не вполне определенные, ибо в их выражения линейным образом входят C из (4,5) и V_{0z} из (4,6).

Подставляя значения Φ_0 и Ψ_0 (в 4,4), получим

$$\Phi(\zeta)=\frac{1}{2}RB_1(1-i\mu_1)\zeta+\frac{N}{\zeta}; \quad \Psi(\zeta)=\frac{R}{2}(1-i\mu_2)(B_2+iC_2)\zeta+\frac{N_1}{\zeta}. \qquad (4,19)$$

Для определения C и V_{0z} воспользуемся условием однозначности прогиба как пластинки, так и оси кольца.

Смещение оси кольца определяется формулой (2,11).

Прогиб оси кольца δ_z будет при обходе вдоль оси возвращаться к исходному значению, если будет выполнено условие

$$\int_0^l (xL_y-yL_x)\,ds=\int_0^{2\pi}(\cos\vartheta L_y-\sin\vartheta L_x)\,d\vartheta=0, \qquad (4,20)$$

как это следует из (2,10), L_x и L_y в данном случае могут быть представлены в такой форме:

$$L_x=L_{0x}-RV_{0z}\sin\vartheta+J_2(\vartheta), \quad L_y=L_{0y}-RV_{0z}\cos\vartheta+J_1(\vartheta). \qquad (4,21)$$

Подставляя в равенство (4,20) входящие в него значения L_x и L_y из (4,21), получим

$$\int_0^{2\pi}(\cos\vartheta L_y-\sin\vartheta L_x)=2\pi RV_{0z}+\int_0^{2\pi}(J_1(\vartheta)\cos\vartheta-J_2(\vartheta)\sin\vartheta)\,d\vartheta=0. \quad (4,22)$$

На основании уже сказанного величины J_1 и J_2 можно представить в таком виде:

$$J_1=\sum_0^1 \alpha_k\sigma^k+\frac{\alpha_{-1}}{\sigma}, \quad J_2=\frac{\beta_{-1}}{\sigma}+\sum_0^1 \beta_k\sigma^k. \qquad (4,23)$$

Подставив J_1 и J_2 в (4,22) и выполнив интегрирование, получим

$$\alpha_1+\alpha_{-1}+i(\beta_1-\beta_{-1})=0. \qquad (4,24)$$

Так как J_1 и J_2 — величины вещественные, то $\alpha=\bar{\alpha}_{-1}$ и $\beta=\bar{\beta}_{-1}$, поэтому равенство (4,24) можно записать и так:

$$\bar{\alpha}_{-1}+\alpha_{-1}+i(\bar{\beta}_{-1}-\beta_{-1})=0. \qquad (4,25)$$

Подставляя в (4,25) вместо α_{-1} и β_{-1} их значения, определенные из уравнения (4.17), получим одно из уравнений для определения неизвестных постоянных C и V_{0z}.

Прогиб пластинки, как известно из [1], в данном случае определяется формулой

$$w=2\,\mathrm{Re}\,[\varphi_1(z_1)+\psi_2(z_2)]. \tag{4,26}$$

Если вместо z_1 и z_2 в (4,26) подставить их выражения из (4,3), и ввести обозначения

$$\varphi_1(z_1)=\varphi_1\left\{\frac{R}{2}\left[(1-i\mu_1)\zeta+(1+i\mu_1)\frac{1}{\zeta}\right]\right\}=\varphi(\zeta),$$

$$\psi_2(z_2)=\psi_2\left\{\frac{R}{2}\left[(1-i\mu_2)\zeta+(1+i\mu_2)\frac{1}{\zeta}\right]\right\}=\psi(\zeta),$$

то

$$w=2\,\mathrm{Re}\,[\varphi(\zeta)+\psi(\zeta)]. \tag{4,27}$$

Функция $\varphi_1(z_1)=\int\Phi_1(z_1)\,dz_1+\mathrm{const}$, а следовательно,

$$\begin{aligned}\varphi(\zeta)&=\frac{R}{2}\int\Phi(\zeta)\left[(1-i\mu_1)-(1+i\mu_2)\frac{1}{\zeta^2}\right]d\zeta+\mathrm{const},\\ \psi(\zeta)&=\frac{R}{2}\int\Psi(\zeta)\left[(1-i\mu_2)-(1+i\mu_2)\frac{1}{\zeta^2}\right]d\zeta+\mathrm{const}.\end{aligned} \tag{4,28}$$

Из (4,28) на основании (4,19) имеем

$$\varphi(\zeta)=\left[\frac{R(1-i\mu_1)N}{2}-\frac{1}{4}R^2B_1(1+\mu_1^2)\right]\ln\zeta+\varphi_0(\zeta),$$

$$\psi(\zeta)=\left[\frac{1}{2}RN_1(1-i\mu_2)-\frac{1}{4}R^2(B_2+iC_2)(1+\mu_2^2)\right]\ln\zeta+\psi_0(\zeta),$$

где $\varphi_0(\zeta)$ и $\psi_0(\zeta)$ — однозначные функции.

Таким образом, прогиб в плите будет однозначным, если

$$\begin{aligned}&\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{2}R(1-i\mu_1)N-\frac{1}{4}R^2B_1(1+\mu_1^2)+\right.\\ &\left.+\frac{1}{2}RN_1(1-i\mu_2)-\frac{1}{4}R^2(B_2+iC_2)(1+\mu_2^2)\right\}=0.\end{aligned} \tag{4,29}$$

Это и будет второе уравнение для определения C и V_{0z}. Детерминант уравнений (4,25) и (4,29), из которых постоянные C и V_{0z} должны определяться, не может равняться нулю, ибо в противном случае нарушается теорема единственности, существование которой здесь предполагается.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Г. Лехницкий, Анизотропные пластинки, Гостехиздат, 1947.

2. М. П. Шереметьев, Влияние упругого кольца, впаянного в криволинейное отверстие, на однороднонапряженное плоское поле, Укр. матем. журнал, № 3, 1949.

3. М. П. Шереметьев, Растяжение бесконечной пластинки с впаянным кольцом, область которого вместе с областью пластинки отображается на круг при помощи рациональной функции, Научные записки Львовского гос. ун-та, вып. 3, 1949.

4. А. И. Лурье, О малых деформациях криволинейных стержней, Труды Ленинградского политехнического ин-та, № 3, 1941.

5. Г. Н. Савин, Концентрация напряжений около отверстий, Гостехиздат, 1951.

6. М. П. Шереметьев, Изгиб анизотропных и изотропных плит, ослабленных отверстием, край которого подкреплен упругим, тонким кольцом, ДАН УССР № 6, 1950.

Получена
30.VI 1952 г.
Львов.