DOI: 10.37863/umzh.v74i5.6836

УДК 517.5

В. О. Кофанов, Т. В. Олександрова (Дніпр. нац. ун-т ім. О. Гончара)

ТОЧНІ НЕРІВНОСТІ ТИПУ РЕМЕЗА, ЩО ОЦІНЮЮТЬ L_q-НОРМУ ФУНКЦІЇ ЧЕРЕЗ ЇЇ L_p-НОРМУ

For any $q \geq p > 0,\ \alpha = (r+1/q)/(r+1/p),\ f_p \in [0,\infty],\ \beta \in [0,2\pi)$, we prove the sharp Remez type inequality

$$\|x\|_q \leq \frac{\|\varphi_r + c\|_q}{\|\varphi_r + c\|^{\alpha}_{L_p([0,2\pi]\setminus B_{y(\beta)})}} \|x\|^{\alpha}_{L_p([0,2\pi]\setminus B)} \|x^{(r)}\|^{1-\alpha}_{\infty}$$

for 2π-periodic functions $x \in L^r_\infty$ that have zeros and satisfy the condition

$$\|x_+\|_p \, \|x_-\|_p^{-1} = f_p, \tag{1}$$

where φ_r is Euler's perfect spline of order r; the number c is chosen in such a way that the function $x = \varphi_r + c$ satisfies the condition (1); B is an arbitrary measurable set such that $\mu B \leq \beta \left(\|\varphi_r + c\|_p \left\| x^{(r)} \right\|_\infty \|x\|_p^{-1} \right)^{-1/(r+1/p)}$, the set $B_{y(\beta)}$ is defined by $B_{y(\beta)} := \{t \in [0,2\pi] : |\varphi_r(t) + c| > y(\beta)\}$, and moreover, $\mu B_{y(\beta)} = \beta$.

We also establish sharp Remez type inequalities of various metrics for trigonometric polynomials and for polynomial splines satisfying (1).

Для довільних $q \geq p > 0,\ \alpha = (r+1/q)/(r+1/p),\ f_p \in [0,\infty],\ \beta \in [0,2\pi)$ доведено точну нерівність типу Ремеза

$$\|x\|_q \leq \frac{\|\varphi_r + c\|_q}{\|\varphi_r + c\|^{\alpha}_{L_p([0,2\pi]\setminus B_{y(\beta)})}} \|x\|^{\alpha}_{L_p([0,2\pi]\setminus B)} \|x^{(r)}\|^{1-\alpha}_{\infty}$$

для 2π-періодичних функцій $x \in L^r_\infty$, що мають нулі і задовольняють умову

$$\|x_+\|_p \, \|x_-\|_p^{-1} = f_p, \tag{1}$$

де φ_r- ідеальний сплайн Ейлера порядку r, а число c вибрано так, що функція $x = \varphi_r + c$ задовольняє рівність (1), B — довільна вимірна за Лебегом множина, така що $\mu B \leq \beta \left(\|\varphi_r + c\|_p \left\| x^{(r)} \right\|_\infty \|x\|_p^{-1} \right)^{-1/(r+1/p)}$, а множину $B_{y(\beta)}$ означено рівністю $B_{y(\beta)} := \{t \in [0,2\pi] : |\varphi_r(t) + c| > y(\beta)\}$, причому $\mu B_{y(\beta)} = \beta$.

Також отримано точні нерівності різних метрик типу Ремеза для тригонометричних поліномів і поліноміальних сплайнів, що задовольняють умову (1).

1. Вступ. Нехай G — вимірна за Лебегом підмножина числової осі, а $L_p(G)$ — простір вимірних за Лебегом функцій $x\colon G \to \mathbf{R}$, що мають скінченну норму (квазінорму)

$$\|x\|_{L_p(G)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_G |x(t)|^p dt \right)^{1/p}, & \text{якщо} \quad 0 < p < \infty, \\ \operatorname{vrai\,sup}\limits_{t \in G} |x(t)|, & \text{якщо} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Через I_d позначимо коло, реалізоване у вигляді відрізка $[0,d]$ з ототожненими кінцями. Замість $\|x\|_{L_p(I_{2\pi})}$ для скорочення будемо писати $\|x\|_p$.

Для $r \in \mathbf{N},\ G = \mathbf{R}$ або $G = I_d$ через $L^r_\infty(G)$ позначимо простір усіх функцій $x \in L_\infty(G)$, що мають локально абсолютно неперервні похідні до $(r-1)$-го порядку і задовольняють умову $x^{(r)} \in L_\infty(G)$.

Символом $\varphi_r(t),\ r \in \mathbf{N}$, позначимо зсув r-го 2π-періодичного інтеграла з нульовим середнім значенням на періоді від функції $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn} \sin t$, який задовольняє умову $\varphi_r(0) = 0$. Для $\lambda > 0$ покладемо $\varphi_{\lambda,r}(t) := \lambda^{-r} \varphi_r(\lambda t)$.

В роботі [1] доведено таку теорему.

Теорема A. *Нехай $r \in \mathbf{N}$, $q > p > 0$. Для довільної функції $x \in L^r_\infty(I_{2\pi})$, що має нулі, виконується точна на класі $L^r_\infty(I_{2\pi})$ нерівність*

$$\|x\|_q \le \sup_{c\in[0,K_r]} \frac{\|\varphi_r + c\|_q}{\|\varphi_r + c\|_p^\alpha} \|x\|_p^\alpha \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha}, \tag{1.1}$$

де $\alpha = \dfrac{r+1/q}{r+1/p}$, $K_r := \|\varphi_r\|_\infty$ *— стала Фавара.*

При доведенні нерівності (1.1) в роботі [1] встановлено, що якшо для заданої функції $x \in L^r_\infty(I_{2\pi})$, яка має нулі, число $c \in [-K_r, K_r]$ вибрати так, щоб виконувалась умова

$$\frac{\|x_+\|_p}{\|x_-\|_p} = \frac{\|(\varphi_r + c)_+\|_p}{\|(\varphi_r + c)_-\|_p},$$

то виконується нерівність

$$\|x_\pm\|_q \le \frac{\|(\varphi_r + c)_\pm\|_q}{\|(\varphi_r + c)_\pm\|_p^\alpha} \|x_\pm\|_p^\alpha \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha}. \tag{1.2}$$

Аналог нерівності (1.1), в якому L_q-норма періодичної функції оцінюється через її локальну L_p-норму, отримано в роботі [2]. В роботі [3] одержано достатні умови, за яких точна верхня грань в нерівності (1.1) досягається для $c = 0$.

У даній роботі нерівності (1.1), (1.2) узагальнено на класи функцій із заданою функцією порівняння, причому в цих узагальненнях міститься „ефект Ремеза”. Наведемо необхідні означення.

Функція $f \in L^1_\infty(\mathbf{R})$ називається функцією порівняння для функції $x \in L^1_\infty(\mathbf{R})$, якщо існує таке $c \in \mathbf{R}$, що

$$\min_{t\in\mathbf{R}} f(t) + c \le x(t) \le \max_{t\in\mathbf{R}} f(t) + c, \quad t \in \mathbf{R},$$

і з рівності $x(\xi) = f(\eta) + c$, де $\xi, \eta \in \mathbf{R}$, випливає нерівність $|x'(\xi)| \le |f'(\eta)|$, якщо вказані похідні існують.

Непарну 2ω-періодичну функцію $\varphi \in L^1_\infty(I_{2\omega})$ назвемо S-функцією, якщо вона має такі властивості: φ парна щодо $\omega/2$, $|\varphi|$ опукла догори на $[0,\omega]$ і строго монотонна на $[0,\omega/2]$.

Для 2ω-періодичної S-функції φ через $S_\varphi(\omega)$ позначимо клас функцій $x \in L^1_\infty(I_d)$, для яких φ є функцією порівняння. Зазначимо, що класи $S_\varphi(\omega)$ розглядались у роботах [4, 5]. Прикладами класів $S_\varphi(\omega)$ є соболєвські класи $L^r_\infty(I_d)$ з функцією порівняння $\varphi_{\lambda,r}$, а також обмежені підмножини просторів T_n (тригонометричних поліномів порядку не вищого за n) з функцією порівняння $\sin nt$ і $S_{n,r}$ (2π-періодичних сплайнів порядку r дефекту 1 з вузлами в точках $k\pi/n$, $k \in \mathbf{Z}$) з функцією порівняння $\varphi_{n,r}$.

В теорії наближення важливу роль відіграють нерівності типу Ремеза

$$\|T\|_{L_\infty(I_{2\pi})} \le C(n,\beta)\|T\|_{L_\infty(I_{2\pi}\setminus B)} \tag{1.3}$$

на класі T_n, де B — довільна вимірна за Лебегом множина $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \le \beta$.

Цю тематику започаткував Є. Ремез в роботі [6] в якій він знайшов точну сталу $C(n,\beta)$ в нерівності вигляду (1.3) для алгебраїчних многочленів. В нерівності (1.3) для тригонометричних поліномів у низці робіт отримано двосторонні оцінки для точних сталих $C(n,\beta)$. Крім того, відома асимптотична поведінка сталих $C(n,\beta)$ при $\beta \to 2\pi$ [7] і $\beta \to 0$ [8]. Бібліографію робіт з даної тематики можна знайти в [7 – 10]. В роботі [8] доведено нерівність

$$\|T\|_{L_\infty(I_{2\pi})} \le \left(1 + 2\,\mathrm{tg}^2\,\frac{n\beta}{4m}\right)\|T\|_{L_\infty(I_{2\pi}\setminus B)} \tag{1.4}$$

для довільного полінома $T \in T_n$, що має мінімальний період $2\pi/m$, і будь-якої вимірної за Лебегом множини $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \le \beta$, де $\beta \in (0, 2\pi m/n)$. Рівність в (1.4) досягається для полінома $T(t) = \cos nx + \dfrac{1}{2}(1 - \cos\beta/2)$.

Нещодавно було знайдено [11] точну сталу в нерівності (1.3) типу Ремеза для тригонометричних поліномів.

Результат роботи [8] було узагальнено в [12] на класи $S_\varphi(\omega)$. Як наслідок отримано аналог нерівності (1.4) для поліноміальних сплайнів і функцій класів $L^r_\infty(I_{2\pi})$. В роботах [13 – 17] доведено деякі точні нерівності різних метрик типу Ремеза і нерівності типу Колмогорова – Ремеза на класах $S_\varphi(\omega)$, зокрема, для диференційовних періодичних функцій, тригонометричних поліномів і сплайнів. Крім того, в роботі [17] досліджено взаємозв'язок точних сталих в нерівностях типу Колмогорова та Колмогорова – Ремеза. Взаємозв'язок точних сталих в нерівностях типу Колмогорова для періодичних функцій і функцій на дійсній осі досліджено в роботі [18].

У даній роботі отримано точні нерівності різних метрик типу Ремеза для функцій $x \in S_\varphi(\omega)$ із заданим відношенням L_p-норм додатних і від'ємних частин (теорема 1). Як наслідок доведено такі нерівності для функцій класів $L^r_\infty(I_{2\pi})$, тригонометричних поліномів і поліноміальних сплайнів із заданим відношенням L_p-норм додатних і від'ємних частин (теореми 2 – 4). Наслідок з теореми 2 містить нерівність (1.1) з „ефектом Ремеза”.

2. Нерівності різних метрик типу Ремеза на класах $S_\varphi(\omega)$.

Теорема 1. *Нехай $q, p > 0$, $q \ge p$, φ — S-функція з періодом 2ω, $\beta \in [0, 2\omega)$. Якщо для d-періодичної функції $x \in S_\varphi(\omega)$, яка має нулі, існує $c \in [-\|\varphi\|_\infty, \|\varphi\|_\infty]$, що задовольняє умову*

$$\|x_\pm\|_{L_p(I_d)} = \|(\varphi + c)_\pm\|_{L_p(I_{2\omega})}, \tag{2.1}$$

то для довільної вимірної за Лебегом множини $B \subset I_d$, $\mu B \le \beta$, виконується нерівність

$$\|x\|_{L_q(I_d)} \le \frac{\|\varphi + c\|_{L_q(I_{2\omega})}}{\|\varphi + c\|_{L_p(I_{2\omega}\setminus B_{y(\beta)})}}\|x\|_{L_p(I_d\setminus B)}, \tag{2.2}$$

де $B_y := \{t \in [0, 2\omega] : |\varphi(t) + c| > y\}$, причому $y = y(\beta)$ вибрано так, що $\mu B_{y(\beta)} = \beta$.

Для будь-якого фіксованого $c \in [-\|\varphi\|_\infty, \|\varphi\|_\infty]$ нерівність (2.2) є точною на класі функцій $x \in S_\varphi(\omega)$, що мають нулі і задовольняють умову (2.1). Рівність в (2.2) досягається для функції $x(t) = \varphi(t) + c$ і множини $B = B_{y(\beta)}$.

Доведення теореми 1 наведемо у вигляді низки лем, які будуть використані також при доведенні подальших теорем.

Покладемо $E_0(x)_\infty := \inf_{a\in\mathbf{R}} \|x - a\|_\infty$.

Лема 1. *За умов теореми* 1

$$\|x_\pm\|_\infty \le \|(\varphi + c)_\pm\|_\infty \tag{2.3}$$

і

$$d \geq 2\omega. \tag{2.4}$$

Доведення. Зафіксуємо функцію $x \in S_\varphi(\omega)$ і число $c \in [-\|\varphi\|_\infty, \|\varphi\|_\infty]$, які задовольняють умови теореми 1. Припустимо, що для функції x нерівність (2.3) не виконується. Оскільки φ є функцією порівняння для функції x, то $E_0(x)_\infty \leq E_0(\varphi)_\infty$. Тому зроблене припущення означає, що не виконується точно одна з нерівностей (2.3). Нехай, наприклад,

$$\|x_+\|_\infty \leq \|(\varphi + c)_+\|_\infty, \quad \|x_-\|_\infty > \|(\varphi + c)_-\|_\infty.$$

Тоді знайдеться таке $a > 0$, що

$$\|(x + a)_+\|_\infty \leq \|(\varphi + c)_+\|_\infty, \quad \|(x + a)_-\|_\infty = \|(\varphi + c)_-\|_\infty. \tag{2.5}$$

Зрозуміло, що $x+a \in S_\varphi(\omega)$. Через m позначимо точку мінімуму функції $\varphi+c$, і нехай $t_1(t_2)$ — найближчий зліва (справа) від m нуль цієї функції. Внаслідок другого співвідношення в (2.5) існує такий зсув $x(\cdot + \tau)$ функції x, що $x(m + \tau) + a = \varphi(m) + c$. Крім того, оскільки $\varphi + c$ є функцією порівняння для функції x, то

$$x(t + \tau) + a \leq \varphi(t) + c < 0, \quad t \in (t_1, t_2).$$

Звідси, оскільки $a > 0$, випливає оцінка

$$\|x_-\|_{L_p(I_d)} > \|(x + a)_-\|_{L_p(I_d)} \geq \|(\varphi + c)_-\|_{L_p(I_{2\omega})},$$

яка суперечить умові (2.1). Отже, нерівність (2.3) встановлено. Співвідношення (2.4) безпосередньо випливає з (2.1) і (2.3) внаслідок включення $x \in S_\varphi(\omega)$.

Лему 1 доведено.

Для $f \in L_1[a, b]$ через $r(f, t)$, $t \in [0, b - a]$, позначимо перестановку функції $|f|$ (див., наприклад, [19] § 1.3) і покладемо $r(f, t) = 0$ для $t > b - a$.

Лема 2. *За умов теореми* 1

$$\int\limits_0^\xi r^p(\bar{x}_\pm, t)dt \leq \int\limits_0^\xi r^p(\bar{\varphi}_\pm, t)dt, \quad \xi > 0, \tag{2.6}$$

де $\bar{x}$ — звуження x на I_d, а $\bar{\varphi}$ — звуження $\varphi + c$ на $I_{2\omega}$. Зокрема,

$$\|x_\pm\|_{L_q(I_d)} \leq \|(\varphi + c)_\pm\|_{L_q(I_{2\omega})}. \tag{2.7}$$

Доведення. Для доведення (2.6) зауважимо, що внаслідок (2.3) для довільного $y_\pm \in [0, \|\bar{x}_\pm\|_\infty)$ існують точки

$$t_i^\pm \in I_d, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad m \geq 2, \quad y_j^\pm \in I_{2\omega}, \quad j = 1, 2,$$

для яких

$$y_\pm = \bar{x}_\pm\left(t_i^\pm\right) = \bar{\varphi}_\pm\left(y_j^\pm\right).$$

Оскільки $\varphi + c$ є функцією порівняння для x, то

$$\left|\bar{x}'_{\pm}(t_i^{\pm})\right| \le \left|\bar{\varphi}'_{\pm}(y_j^{\pm})\right|.$$

Покажемо, що якщо точки $\theta_1^{\pm} \in [0, d]$ і $\theta_2^{\pm} \in [0, 2\omega]$ задовольняють умову

$$y_{\pm} = r\left(\bar{x}_{\pm}, \theta_1^{\pm}\right) = r\left(\bar{\varphi}_{\pm}, \theta_2^{\pm}\right),$$

то

$$\left|r'\left(\bar{x}_{\pm}, \theta_1^{\pm}\right)\right| \le \left|r'\left(\bar{\varphi}_{\pm}, \theta_2^{\pm}\right)\right|.$$

Справді, це безпосередньо випливає з теореми про похідну перестановки (див., наприклад, [19], твердження 1.3.2), згідно з якою

$$\left|r'\left(\bar{x}_{\pm}, \theta_1^{\pm}\right)\right| = \left[\sum_{i=1}^{m} \left|\bar{x}'_{\pm}(t_i)\right|^{-1}\right]^{-1} \le \left[\sum_{j=1}^{2} \left|\bar{\varphi}'_{\pm}\left(y_j^{\pm}\right)\right|^{-1}\right]^{-1} = \left|r'\left(\bar{\varphi}_{\pm}, \theta_2^{\pm}\right)\right|.$$

Враховуючи також співвідношення

$$r\left(\bar{x}_{\pm}, 0\right) = \|\bar{x}_{\pm}\|_{\infty} \le \|\bar{\varphi}_{\pm}\|_{\infty} = r\left(\bar{\varphi}_{\pm}, 0\right),$$

що випливає з (2.3) і факту збереження перестановкою L_{∞}-норми, робимо висновок, що різниця $\Delta^{\pm}(t) := r\left(\bar{x}_{\pm}, t\right) - r\left(\bar{\varphi}_{\pm}, t\right)$ змінює знак на $[0, \infty)$ не більше одного разу (з мінуса на плюс). Те ж саме виконується і для різниці $\Delta_p^{\pm}(t) := r^p\left(\bar{x}_{\pm}, t\right) - r^p\left(\bar{\varphi}_{\pm}, t\right)$. Покладемо $I_{\pm}(\xi) := \int_0^{\xi} \Delta_p^{\pm}(t)dt$. Тоді $I_{\pm}(0) = 0$, і оскільки перестановка зберігає L_p-норму, внаслідок (2.1), (2.4) маємо

$$I(d) = \|\bar{x}_{\pm}\|_{L_p(I_d)} - \|\bar{\varphi}_{\pm}\|_{L_p(I_{2\omega})} = 0.$$

Крім того, $I'_{\pm}(\xi) = \Delta_p^{\pm}(\xi)$ змінює знак (з мінуса на плюс) не більше одного разу.

Отже, $I(\xi) \le 0$, $\xi > 0$, що рівносильно (2.6). З (2.6) внаслідок теореми Гарді – Літтлвуда – Поліа (див., наприклад, [19], теорема 1.3.1) випливає нерівність (2.7).

Лему 2 доведено.

Лема 3. *За умов теореми* 1

$$\|x\|_{L_p(I_d \setminus B)} \ge \|\varphi + c\|_{L_p(I_{2\omega} \setminus B_{y(\beta)})}. \tag{2.8}$$

Доведення. Нехай, як і раніше, $\bar{x}$ — звуження x на I_d, а $\bar{\varphi}$ — звуження $\varphi + c$ на $I_{2\omega}$. Для довільної вимірної множини $B \subset I_d$, $\mu B \le \beta$, внаслідок відомої властивості

$$\int_B |x(t)|^p \, dt \le \int_0^{\beta} r^p\left(\bar{x}, t\right) dt, \tag{2.9}$$

а оскільки перестановка зберігає L_p-норму, то

$$\|x\|^p_{L_p(I_d \setminus B)} = \int_{I_d} |x(t)|^p dt - \int_B |x(t)|^p dt \ge \int_0^d r^p\left(\bar{x}, t\right) dt - \int_0^{\beta} r^p\left(\bar{x}, t\right) dt.$$

Застосовуючи тепер (2.1) і нерівність

$$\int_0^{\xi} r^p\left(\bar{x}, t\right) dt \leq \int_0^{\xi} r^p\left(\bar{\varphi}, t\right) dt, \quad \xi > 0,$$

що випливає з (2.6) згідно з твердженням 1.3.6 з [19], отримуємо

$$\|x\|^p_{L_p(I_d\setminus B)} \geq \int_0^{2\omega} r^p\left(\bar{\varphi}, t\right) dt - \int_0^{\beta} r^p\left(\bar{\varphi}, t\right) dt = \int_{\beta}^{2\omega} r^p\left(\bar{\varphi}, t\right) dt = \int\limits_{I_{2\omega}\setminus B_{y(\beta)}} |\varphi(t)|^p\, dt.$$

Звідси випливає (2.8).

Лему 3 доведено.

Доведення теореми **1.** Зафіксуємо d-періодичну функцію $x \in S_\varphi(\omega)$, що має нулі, для якої виконується умова (2.1) з деяким $c \in [-\|\varphi\|_\infty, \|\varphi\|_\infty]$. Для неї за лемами 2 і 3 мають місце оцінки (2.7), (2.8). З них безпосередньо випливає нерівність (2.2). Її точність є очевидною.

Теорему 1 доведено.

3. Нерівності різних метрик типу Ремеза для функцій $x \in L^r_\infty(I_{2\pi})$. Нагадаємо, що символом $\varphi_r(t)$, $r \in \mathbf{N}$, позначено зсув r-го 2π-періодичного інтеграла з нульовим середнім значенням на періоді від функції $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn} \sin t$, який задовольняє умову $\varphi_r(0) = 0$. Зрозуміло, що сплайн $\varphi_{\lambda,r}(t) := \lambda^{-r}\varphi_r(\lambda t)$, $\lambda > 0$, є S-функцією з періодом $2\pi/\lambda$.

Для $r \in \mathbf{N},\ p > 0,\ f_p \in [0, \infty]$ розглянемо клас

$$f_p\, L^r_\infty(I_{2\pi}) := \left\{ x \in L^r_\infty(I_{2\pi})\colon \frac{\|x_+\|_p}{\|x_-\|_p} = f_p \right\}.$$

Очевидно, для заданих $p,\ f_p$ існує єдине $c \in [-K_r, K_r]$, для якого

$$\varphi_r + c \in f_p\, L^r_\infty(I_{2\pi}). \tag{3.1}$$

Теорема 2. *Нехай $r \in \mathbf{N},\ p,\ q > 0,\ q \geq p,\ f_p \in [0, \infty],\ \beta \in [0, 2\pi)$. Тоді для довільної функції $x \in f_p\, L^r_\infty(I_{2\pi})$, що має нулі, і будь-якої вимірної множини $B \subset I_{2\pi}$, для якої $\mu B \leq \beta/\lambda$, де λ вибрано так, що*

$$\|x\|_p = \|\varphi_{\lambda,r} + \lambda^{-r} c\|_{L_p(I_{2\pi/\lambda})} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty, \tag{3.2}$$

а число c задовольняє умову (3.1), *виконується нерівність*

$$\|x\|_q \leq \frac{\|\varphi_r + c\|_q}{\|\varphi_r + c\|^\alpha_{L_p(I_{2\pi}\setminus B_{y(\beta)})}} \|x\|^\alpha_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)} \left\|x^{(r)}\right\|^{1-\alpha}_\infty, \tag{3.3}$$

де $\alpha = \dfrac{r + 1/q}{r + 1/p}$, а $B_y := \{t \in I_{2\pi}\colon |\varphi_r(t) + c| > y\}$, причому $y = y(\beta)$ вибрано так, що $\mu B_{y(\beta)} = \beta$.

Нерівність (3.3) *є точною на класі всіх пар (x, B), що складаються з функції $x \in f_p\, L^r_\infty(I_{2\pi})$, яка має нулі, і вимірної множини $B \subset I_{2\pi}$, для якої $\mu B \leq \beta/\lambda$, де λ задовольняє умову* (3.2). *Рівність у* (3.3) *досягається для пари $(x, B_{y(\beta)})$, де $x(t) = \varphi_r(t) + c$.*

Доведення. Зафіксуємо функцію $x \in f_p\, L^r_\infty(I_{2\pi})$, що задовольняє умови теореми. Оскільки нерівність (3.3) однорідна, можна вважати, що

$$\left\| x^{(r)} \right\|_\infty = 1. \tag{3.4}$$

Тоді з (3.1), (3.2) внаслідок означення класу $f_p\, L^r_\infty(I_{2\pi})$ випливає, що

$$\|x_\pm\|_p = \left\| \left(\varphi_{\lambda,r} + \lambda^{-r} c \right)_\pm \right\|_{L_p(I_{2\pi/\lambda})}. \tag{3.5}$$

Для функцій $x \in f_p\, L^r_\infty(I_{2\pi})$, що задовольняють цю умову, має місце нерівність (1.2)

$$\|x_\pm\|_q \le \frac{\|(\varphi_r + c)_\pm\|_q}{\|(\varphi_r + c)_\pm\|_p^\alpha} \|x_\pm\|_p^\alpha \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{1-\alpha}.$$

З цієї нерівності та співвідношень (3.4), (3.5) внаслідок очевидної рівності

$$\left\| \left(\varphi_{\lambda,r} + \lambda^{-r} c \right)_\pm \right\|_{L_p(I_{2\pi/\lambda})} = \lambda^{-(r+1/p)} \|(\varphi_r + c)_\pm\|_p, \quad p > 0, \tag{3.6}$$

випливає оцінка

$$\|x_\pm\|_q \le \left\| \left(\varphi_{\lambda,r} + \lambda^{-r} c \right)_\pm \right\|_{L_q(I_{2\pi/\lambda})}. \tag{3.7}$$

Зокрема, внаслідок (3.4), (3.7) (при $q = \infty$) для функції x виконано умови теореми порівняння Колмогорова [20]. За цією теоремою сплайн $\varphi(t) = \varphi_{\lambda,r}(t)$ є функцією порівняння для функції x, тобто $x \in S_\varphi\left(\dfrac{\pi}{\lambda}\right)$. Отже, внаслідок (3.5) для функції x виконуються всі умови теореми 1. За цією теоремою для $q \ge p$ і довільної вимірної множини $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \le \beta/\lambda$ має місце нерівність

$$\|x\|_q \le \frac{\|\varphi_{\lambda,r} + \lambda^{-r} c\|_{L_q(I_{2\pi/\lambda})}}{\|\varphi_{\lambda,r} + \lambda^{-r} c\|_{L_p\left(I_{2\pi/\lambda} \setminus \frac{B_{y(\beta)}}{\lambda}\right)}} \|x\|_{L_p(I_{2\pi} \setminus B)}.$$

З останньої нерівності (при $q = p$) і умов (3.2), (3.4) випливає, що

$$\|x\|_{L_p(I_{2\pi} \setminus B)} \ge \|\varphi_{\lambda,r} + \lambda^{-r} c\|_{L_p\left(I_{2\pi/\lambda} \setminus \frac{B_{y(\beta)}}{\lambda}\right)}.$$

Комбінуючи отриману оцінку знизу з нерівністю (3.7), внаслідок очевидного співвідношення

$$\|\varphi_{\lambda,r} + \lambda^{-r} c\|_{L_p\left(I_{2\pi/\lambda} \setminus \frac{B_{y(\beta)}}{\lambda}\right)} = \lambda^{-(r+1/p)} \|\varphi_r + c\|_{L_p(I_{2\pi} \setminus B_{y(\beta)})}$$

і означення $\alpha = \dfrac{r + 1/q}{r + 1/p}$ маємо

$$\frac{\|x\|_q}{\|x\|^\alpha_{L_p(I_{2\pi} \setminus B)}} \le \frac{\|\varphi_{\lambda,r} + \lambda^{-r} c\|_{L_q(I_{2\pi/\lambda})}}{\|\varphi_{\lambda,r} + \lambda^{-r} c\|^\alpha_{L_p\left(I_{2\pi/\lambda} \setminus \frac{B_{y(\beta)}}{\lambda}\right)}} = \frac{\|\varphi_r + c\|_q}{\|\varphi_r + c\|^\alpha_{L_p(I_{2\pi} \setminus B_{y(\beta)})}}.$$

З цієї оцінки внаслідок (3.4) випливає (3.3). Точність нерівності (3.3) є очевидною.

Теорему 2 доведено.

***Наслідок* 1.** *Нехай* $r \in \mathbf{N},\ p, q > 0,\ q \geq p,\ \alpha = \dfrac{r + 1/q}{r + 1/p},\ \beta \in [0, 2\pi),$ *а число* $\bar{c} \in [0, K_r]$ *реалізує верхню грань*

$$\sup_{c \in [0, K_r]} \frac{\|\varphi_r + c\|_q}{\|\varphi_r + c\|^{\alpha}_{L_p(I_{2\pi} \setminus B^c_{y(\beta)})}},$$

де $B^c_y := \{t \in I_{2\pi} : |\varphi_r(t) + c| > y\}$, *причому* $y = y(\beta)$ *вибрано так, що* $\mu B^c_{y(\beta)} = \beta$.

Тоді для будь-якої функції $x \in L^r_\infty(I_{2\pi})$, *що має нулі, і довільної вимірної множини* $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \leq \beta/\lambda$, *де* λ *вибрано так, що*

$$\|x\|_p = \left\|\varphi_{\lambda, r} + \lambda^{-r} c\right\|_{L_p(I_{2\pi/\lambda})} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty, \tag{3.8}$$

а c *задовольняє умову*

$$\|x_+\|_p \, \|x_-\|_p^{-1} = \|(\varphi_r + c)_+\|_p \, \|(\varphi_r + c)_-\|_p^{-1},$$

виконується нерівність

$$\|x\|_q \leq \frac{\|\varphi_r + \bar{c}\|_q}{\|\varphi_r + \bar{c}\|^{\alpha}_{L_p(I_{2\pi} \setminus B^{\bar{c}}_{y(\beta)})}} \|x\|^{\alpha}_{L_p(I_{2\pi} \setminus B)} \left\|x^{(r)}\right\|^{1-\alpha}_\infty. \tag{3.9}$$

Нерівність (3.9) *є точною на класі всіх пар* (x, B), *що складаються з функції* $x \in L^r_\infty(I_{2\pi})$, *яка має нулі, і вимірної множини* $B \subset I_{2\pi}$, *для якої* $\mu B \leq \beta/\lambda$, *де* λ *задовольняє умову* (3.8). *Рівність у* (3.9) *досягається для пари* $\left(x, B^{\bar{c}}_{y(\beta)}\right)$, *де* $x(t) = \varphi_r(t) + \bar{c}$.

***Зауваження* 1.** 1. Для $\beta = 0$ теорему 2 і наслідок 1 отримано в [1].

2. Для функцій $x \in L^r_\infty(I_{2\pi})$, які задовольняють умову $\|x_+\|_p = \|x_-\|_p$, стала c в нерівності (3.3) дорівнює нулю.

3. Для знакосталих функцій $x \in L^r_\infty(I_{2\pi})$, що мають нулі, нерівність (3.3) перетворюється в нерівність для найкращих односторонніх наближень сталою

$$E^{\pm}_0(x)_{L_s G)} := \inf_{c \in \mathbf{R}} \left\{\|x - c\|_{L_s(G)} : \forall t \in G \ \pm (x(t) - c)_\pm \geq 0\right\}, \tag{3.10}$$

тобто норми $\|x\|_q$ і $\|x\|_{L_p(I_{2\pi} \setminus B)}$ в нерівності (3.3) для таких функцій слід замінити на $E^{\pm}_0(x)_q$ і $E^{\pm}_0(x)_{L_p(I_{2\pi} \setminus B)}$ відповідно. При цьому сталу c в такій нерівності потрібно замінити на сталу Фавара K_r.

4. Нерівності різних метрик типу Ремеза для тригонометричних поліномів. Нагадаємо, що T_n — простір тригонометричних поліномів порядку не вищого за n. Для $p > 0,\ f_p \in [0, \infty]$ покладемо

$$f_p T_n := \left\{T \in T_n : \frac{\|T_+\|_p}{\|T_-\|_p} = f_p\right\}.$$

Теорема 3. *Нехай* $n, m \in \mathbf{N},\ p, q > 0,\ q \geq p,\ f_p \in [0, \infty]$. *Якщо тригонометричний поліном* $T \in f_p T_n$ *з мінімальним періодом* $2\pi/m$ *має нулі, то для довільної вимірної множини* $B \subset I_{2\pi},\ \mu B \leq \dfrac{m}{n}\beta,\ \beta \in [0, 2\pi)$, *виконується нерівність*

$$\|T\|_q \leq \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \frac{\|\sin(\cdot) + c\|_q}{\|\sin(\cdot) + c\|_{L_p(I_{2\pi} \setminus B_{y(\beta)})}} \|T\|_{L_p(I_{2\pi} \setminus B)}, \tag{4.1}$$

де число $c \in [-1,1]$ *задовольняє умову*

$$\sin(\cdot) + c \in f_p T_n, \tag{4.2}$$

а $B_y := \{t \in I_{2\pi} : |\sin t + c| > y\}$, *причому* $y = y(\beta)$ *вибрано так, що* $\mu B_{y(\beta)} = \beta$.

Нерівність (4.1) *є точною у сенсі*

$$\sup_{(n,m)\in N_{n,m}} \sup_{(T,B)\in P_n^m} \frac{\|T\|_q}{(n/m)^{1/p-1/q}\|T\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}} = \frac{\|\sin(\cdot)+c\|_q}{\|\sin(\cdot)+c\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B_{y(\beta)})}}, \tag{4.3}$$

де $N_{n,m}$ — *множина пар* (n,m) *натуральних чисел, таких що* $m \le n$, *а* P_n^m — *множина пар* (T,B), *що складаються з полінома* $T \in f_p T_n$ *з мінімальним періодом* $2\pi/m$, *що має нулі, і вимірної множини* $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \le \dfrac{m}{n}\beta$.

Доведення. Зафіксуємо поліном $T \in f_p T_n$, що задовольняє умови теореми 3. Покладемо для скорочення $\varphi(t) := \sin nt$, $\psi(t) := \varphi(t) + c$, $t \in \mathbf{R}$. Внаслідок однорідності нерівності (4.1) можна вважати, що

$$\|T\|_{L_p(I_{2\pi/m})} = \|\psi\|_{L_p(I_{2\pi/n})}. \tag{4.4}$$

Звідси, враховуючи (4.2) і означення класу $f_p T_n$, отримуємо рівність

$$\|T_\pm\|_{L_p(I_{2\pi/m})} = \|\psi_\pm\|_{L_p(I_{2\pi/n})}. \tag{4.5}$$

Покажемо, що

$$\|T_\pm\|_\infty \le \|\psi_\pm\|_\infty. \tag{4.6}$$

Справді, припустимо супротивне. Тоді існує таке $\gamma \in (0,1)$, що $\|\gamma T_\pm\|_\infty \le \|\psi_\pm\|_\infty$, причому в одній із цих нерівностей має місце рівність. Нехай, наприклад,

$$\|\gamma T_+\|_\infty \le \|\psi_+\|_\infty, \quad \|\gamma T_-\|_\infty = \|\psi_-\|_\infty.$$

Тоді поліном ψ є функцією порівняння для полінома γT (див. доведення теореми 8.1.1 в [21]). Нехай m — точка мінімуму функції ψ, $t_1(t_2)$ — найближчий зліва (справа) від m нуль цієї функції. Переходячи, якщо потрібно, до зсуву полінома γT, можна вважати, що

$$\|\gamma T_-\|_\infty = -\gamma T(m).$$

Оскільки ψ є функцією порівняння для полінома γT, то

$$\gamma T(t) \le \psi(t) < 0, \quad t \in (t_1, t_2).$$

Звідси випливає оцінка

$$\|T_-\|_{L_p(2\pi/m)} > \|\gamma T_-\|_{L_p(2\pi/m)} \ge \|\psi_-\|_{L_p(2\pi/n)},$$

яка суперечить (4.5). Отже, нерівність (4.6) доведено.

З цієї нерівності і доведення теореми 8.1.1 з [21] випливає, що $\varphi(t) = \sin nt$ є функцією порівняння для полінома $T(t)$, тобто $T \in S_\varphi\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$. Тому внаслідок (4.4) поліном T задовольняє всі умови теореми 1, а отже, і умови лем $1-3$.

Встановимо нерівність

$$\|T\|_q \le \left(\frac{m}{n}\right)^{1/q} \|\sin(\cdot) + c\|_q. \tag{4.7}$$

Справді, внаслідок нерівності (2.7) маємо

$$\|T\|_{L_q(I_{2\pi/m})} \le \|\varphi + c\|_{L_q(I_{2\pi/n})}.$$

Звідси безпосередньо випливає (4.7) внаслідок $2\pi/m$-періодичності полінома T і $2\pi/n$-періодичності функції φ.

Доведемо тепер нерівність

$$\|T\|_{L_p(I_{2\pi \setminus B})} \ge \left(\frac{m}{n}\right)^{1/p} \|\sin(\cdot) + c\|_{L_p(I_{2\pi} \setminus B_{y(\beta)})} \tag{4.8}$$

для довільної вимірної множини $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \le \dfrac{m}{n}\beta$.

Нехай $\bar{T}$ — звуження полінома T на $I_{2\pi/m}$, а $\bar{\varphi}$ — звуження $\varphi + c$ на $I_{2\pi/n}$. Застосовуючи нерівність (2.9) і враховуючи те, що перестановка зберігає L_p-норму, одержуємо

$$\|T\|^p_{L_p(I_{2\pi \setminus B})} = \int\limits_0^{2\pi} |T(t)|^p\, dt - \int\limits_B |T(t)|^p\, dt \ge \int\limits_0^{2\pi} r^p(T,t)\, dt - \int\limits_0^{\frac{m}{n}\beta} r^p(T,t)\, dt =$$

$$= m \left[\int\limits_0^{2\pi/m} r^p(\bar{T},t)\, dt - \int\limits_0^{\beta/n} r^p\left(\bar{T},t\right) dt \right].$$

Звідси, застосовуючи (4.4) і нерівність

$$\int\limits_0^{\xi} r^p\left(\bar{T},t\right)\, dt \le \int\limits_0^{\xi} r^p\left(\bar{\varphi},t\right)\, dt, \quad \xi > 0,$$

що випливає з (2.6) згідно з твердженням 1.3.6 з [19], отримуємо оцінку знизу

$$\|T\|^p_{L_p(I_{2\pi \setminus B})} \ge m \left[\int\limits_0^{2\pi/n} r^p\left(\bar{\varphi},t\right)\, dt - \int\limits_0^{\beta/n} r^p\left(\bar{\varphi},t\right)\, dt \right] = m \int\limits_{\beta/n}^{2\pi/n} r^p\left(\bar{\varphi},t\right)\, dt =$$

$$= \frac{m}{n} \int\limits_{\beta}^{2\pi} r^p(\varphi + c, t)\, dt = \frac{m}{n} \int\limits_{I_{2\pi} \setminus B_y(n)} |\varphi(t) + c|^p\, dt = \frac{m}{n} \|\sin(\cdot) + c\|^p_{L_p\left(I_{2\pi} \setminus B_{y(\beta)}\right)},$$

де $B_y(n) := \{t \in I_{2\pi} : |\sin nt + c| > y\}$, причому $y = y(\beta)$ вибрано так, що $\mu B_y(n) = \beta$. З отриманої оцінки випливає (4.8). Комбінуючи (4.7) і (4.8), одержуємо нерівність (4.1). Точність (4.1) у сенсі (4.3) є очевидною.

Теорему 3 доведено.

Наслідок 2. *Нехай* $n, m \in \mathbf{N},\ q, p > 0,\ q \geq p,\ \beta \in [0, 2\pi)$, *а число* $\bar{c} \in [0,1]$ *реалізує верхню грань*

$$\sup_{c\in[0,1]} \frac{\|\sin(\cdot)+c\|_q}{\|\sin(\cdot)+c\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B^c_{y(\beta)})}},$$

де $B^c_y := \{t \in I_{2\pi} : |\sin t + c| > y\}$, *причому* $y = y(\beta)$ *вибрано так, що* $\mu B^c_{y(\beta)} = \beta$.

Тоді для будь-якого тригонометричного полінома $T \in T_n$ *з мінімальним періодом* $2\pi/m$, *що має нулі, і довільної вимірної множини* $B \subset I_{2\pi},\ \mu B \leq \dfrac{m}{n}\beta$, *виконується нерівність*

$$\|T\|_q \leq \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \frac{\|\sin(\cdot)+\bar{c}\|_q}{\|\sin(\cdot)+\bar{c}\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B^{\bar{c}}_{y(\beta)})}} \|T\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}. \tag{4.9}$$

Нерівність (4.8) *є точною у сенсі*

$$\sup_{(n,m)\in N_{n,m}} \sup_{(T,B)\in Q^m_n} \frac{\|T\|_q}{(n/m)^{1/p-1/q}\|T\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}} = \frac{\|\sin(\cdot)+\bar{c}\|_q}{\|\sin(\cdot)+\bar{c}\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B^{\bar{c}}_{y(\beta)})}},$$

де $N_{n,m}$ *— множина пар* (n, m) *натуральних чисел, таких що* $m \leq n$, *а* Q^m_n *— множина пар* (T, B), *що складаються з полінома* $T \in T_n$ *з мінімальним періодом* $2\pi/m$, *що має нулі, і вимірної множини* $B \subset I_{2\pi},\ \mu B \leq \dfrac{m}{n}\beta$.

Зауваження 2. 1. Для $\beta = 0$ і $m = 1$ теорему 3 і наслідок 2 отримано в [1].

2. Для поліномів $T \in T_n$, що задовольняють умову $\|T_+\|_p = \|T_-\|_p$, стала c в нерівності (4.1) дорівнює нулю.

3. Для знакосталих поліномів $T \in T_n$, що мають нулі, нерівність (4.1) перетворюється в нерівність для найкращих односторонніх наближень сталою (див. (3.10)), тобто норми $\|T\|_q$ і $\|T\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}$ в нерівності (4.1) для таких поліномів потрібно замінити на $E^{\pm}_0(T)_q$ і $E^{\pm}_0(T)_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}$ відповідно. При цьому стала c в такій нерівності дорівнює 1.

5. Нерівності різних метрик типу Ремеза для сплайнів. Нагадаємо, що $S_{n,r}$ — простір 2π-періодичних сплайнів порядку r дефекту 1 з вузлами в точках $k\pi/n,\ k \in \mathbf{Z}$. Для $p > 0$, $f_p \in [0, \infty]$ покладемо

$$f_p\, S_{n,r} := \left\{ s \in S_{n,r} : \frac{\|s_+\|_p}{\|s_-\|_p} = f_p \right\}.$$

Теорема 4. *Нехай* $n, m \in \mathbf{N},\ p, q > 0,\ q \geq p,\ f_p \in [0, \infty]$. *Якщо сплайн* $s \in f_p\, S_{n,r}$ *з мінімальним періодом* $2\pi/m$ *має нулі, то для довільної вимірної множини* $B \subset I_{2\pi},\ \mu B \leq \dfrac{m}{n}\beta$, $\beta \in [0, 2\pi)$, *виконується нерівність*

$$\|s\|_q \leq \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \frac{\|\varphi_r + c\|_q}{\|\varphi_r + c\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B_{y(\beta)})}} \|s\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}, \tag{5.1}$$

де $c \in [-K_r, K_r]$ *задовольняє умову*

$$\varphi_{n,r} + n^{-r}c \in f_p\, S_{n,r}, \tag{5.2}$$

а $B_y := \{t \in I_{2\pi} : |\varphi_r(t) + c| > y\}$, *причому* $y = y(\beta)$ *вибрано так, що* $\mu B_{y(\beta)} = \beta$.

Нерівність (5.1) *є точною у сенсі*

$$\sup_{(n,m)\in N_{n,m}} \sup_{(s,B)\in S_n^m} \frac{\|s\|_q}{(n/m)^{1/p-1/q}\|s\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}} = \frac{\|\varphi_r + c\|_q}{\|\varphi_r + c\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B_{y(\beta)})}}, \tag{5.3}$$

де $N_{n,m}$ — множина пар (n,m) натуральних чисел, таких що $m \le n$, а S_n^m — множина пар (s,B), що складаються зі сплайна $s \in f_p\, S_{n,r}$ з мінімальним періодом $2\pi/m$, що має нулі, і вимірної множини $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \le \dfrac{m}{n}\,\beta$.

Доведення. Зафіксуємо сплайн $s \in f_p\, S_{n,r}$, що задовольняє умови теореми 4. Покладемо для скорочення $\varphi(t) := \varphi_{n,r}(t)$, $\psi(t) := \varphi_{n,r}(t) + n^{-r}c$, $t \in \mathbf{R}$. Оскільки нерівність (5.1) однорідна, можна вважати, що

$$\|s\|_{L_p(I_{2\pi/m})} = \|\psi\|_{L_p(I_{2\pi/n})}. \tag{5.4}$$

Тоді внаслідок (5.2) й означення класу $f_p\, S_{n,r}$ має місце рівність

$$\|s_\pm\|_{L_p(I_{2\pi/m})} = \|\psi_\pm\|_{L_p(I_{2\pi/n})}. \tag{5.5}$$

Покажемо, що

$$\|s_\pm\|_\infty \le \|\psi_\pm\|_\infty. \tag{5.6}$$

Справді, припустимо супротивне. Тоді існує таке $\gamma \in (0,1)$, що $\|\gamma s_\pm\|_\infty \le \|\psi_\pm\|_\infty$, причому в одній із цих нерівностей має місце рівність. Нехай, наприклад,

$$\|\gamma s_+\|_\infty \le \|\psi_+\|_\infty, \quad \|\gamma s_-\|_\infty = \|\psi_-\|_\infty.$$

Тоді $E_0(\gamma s)_\infty \le E_0(\psi)_\infty = \|\varphi_{n,r}\|_\infty$ і за нерівністю Тихомирова [22]

$$\left\|s^{(r)}\right\|_\infty \le \frac{E_0(s)_\infty}{\|\varphi_{n,r}\|_\infty},$$

де $E_0(x)_\infty$ — найкраще рівномірне наближення функції x сталими, маємо оцінку

$$\left\|\gamma s^{(r)}\right\|_\infty \le 1.$$

Таким чином, сплайн γs задовольняє умови теореми порівняння Колмогорова [20]. Згідно з цією теоремою сплайн φ є функцією порівняння для сплайна γs. Нехай m — точка мінімуму функції ψ, $t_1(t_2)$ — найближчий зліва (справа) від m нуль цієї функції. Переходячи, якщо потрібно, до зсуву сплайна γs, можна вважати, що

$$\|\gamma s_-\|_\infty = -\gamma s(m).$$

А оскільки сплайн ψ є функцією порівняння для сплайна γs, то

$$\gamma s(t) \le \psi(t) < 0, \quad t \in (t_1, t_2).$$

Звідси випливає оцінка

$$\|s_-\|_{L_p(2\pi/m)} > \|\gamma s_-\|_{L_p(2\pi/m)} \ge \|\psi_-\|_{L_p(2\pi/n)},$$

яка суперечить (5.5). Отже, нерівність (5.6) доведено.

З нерівності (5.6) маємо $E_0(s)_\infty \le E_0(\psi)_\infty = \|\varphi_{n,r}\|_\infty$ і, застосовуючи нерівність Тихомирова, отримуємо

$$\left\|s^{(r)}\right\|_\infty \le \frac{E_0(s)_\infty}{\|\varphi_{n,r}\|_\infty} \le 1.$$

Отже, сплайн s задовольняє умови теореми порівняння Колмогорова [20]. За цією теоремою сплайн φ є функцією порівняння для сплайна s. Таким чином, $s \in S_\varphi\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$ і внаслідок (5.5) сплайн s задовольняє умови теореми 1, а отже, і умови лем 1 – 3.

Доведемо нерівність

$$\|s\|_q \le n^{-r}\left(\frac{m}{n}\right)^{1/q}\|\varphi + c\|_q. \tag{5.7}$$

Справді, за нерівністю (2.7) маємо

$$\|s\|_{L_q(I_{2\pi/m})} \le \left\|\varphi_{n,r} + n^{-r}c\right\|_{L_q(I_{2\pi/n})}.$$

Звідси безпосередньо випливає (5.7) внаслідок $2\pi/m$-періодичності сплайна s і $2\pi/n$-періодичності сплайна $\varphi_{n,r}$.

Доведемо тепер нерівність

$$\|s\|_{L_q(I_{2\pi}\setminus B)} \ge n^{-r}\left(\frac{m}{n}\right)^{1/p}\|\varphi_r + c\|_{L_q(I_{2\pi}\setminus B_{y(\beta)})} \tag{5.8}$$

для довільної вимірної множини $B \subset I_{2\pi}$, $\mu B \le \dfrac{m}{n}\beta$, $\beta \in [0, 2\pi)$. Нехай $\bar{s}$ — звуження сплайна s на $I_{2\pi/m}$, а $\bar{\psi}$ — звуження сплайна ψ на $I_{2\pi/n}$. Як і при доведенні теореми 3, застосовуючи нерівність (2.9) і враховуючи, що перестановка зберігає L_p-норму, отримуємо

$$\|s\|^p_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)} \ge m\left[\int\limits_0^{2\pi/m} r^p(\bar{s}, t)\,dt - \int\limits_0^{\beta/n} r^p(\bar{s}, t)\,dt\right].$$

Застосовуючи далі (5.4) і нерівність

$$\int\limits_0^\xi r^p(\bar{s}, t)\,dt \le \int\limits_0^\xi r^p\left(\bar{\psi}, t\right)dt, \quad \xi > 0,$$

що випливає з (2.6) внаслідок твердження 1.3.6 з [19], як і при доведенні теореми 3, одержуємо оцінку знизу

$$\|s\|^p_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)} \ge m\left[\int\limits_0^{2\pi/n} r^p\left(\bar{\psi}, t\right)dt - \int\limits_0^{\beta/n} r^p\left(\bar{\psi}, t\right)dt\right] = m\int\limits_{\beta/n}^{2\pi/n} r^p\left(\bar{\psi}, t\right)dt =$$

$$= \frac{m}{n}\int\limits_\beta^{2\pi} r^p(\psi, t)\,dt = \frac{m}{n}\,n^{-rp}\int\limits_{I_{2\pi}\setminus B_{y(\beta)}(n)} |\varphi_r(nt) + c|^p\,dt =$$

$$= n^{-rp}\frac{m}{n}\,\|(\varphi_r + c)\|^p_{L_p(I_{2\pi}\setminus B_{y(\beta)})}\,,$$

де $B_{y(\beta)}(n) := \{t \in I_{2\pi} : |\varphi_r(nt) + c| > y\}$, а $y = y(\beta)$ вибрано так, що $\mu B_{y(\beta)}(n) = \beta$.

Отримана оцінка знизу рівносильна (5.8). З (5.7) і (5.8) безпосередньо випливає нерівність (5.1). Точність нерівності (5.1) у сенсі (5.3) є очевидною.

Теорему 4 доведено.

***Наслідок* 3.** *Нехай* $n, m \in \mathbf{N},\ q, p > 0,\ q \ge p,\ \beta \in [0, 2\pi)$, *а число* $\bar{c} \in [0, K_r]$ *реалізує верхню грань*

$$\sup_{c\in[0,K_r]} \frac{\|\varphi_r + c\|_q}{\|\varphi_r + c\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B^c_{y(\beta)})}},$$

де $B^c_y := \{t \in I_{2\pi} : |\varphi_r(t) + c| > y\}$, *причому* $y = y(\beta)$ *вибрано так, що* $\mu B^c_{y(\beta)} = \beta$.

Тоді для будь-якого сплайна $s \in S_{n,r}$ *з мінімальним періодом* $2\pi/m$, *що має нулі, і довільної вимірної множини* $B \subset I_{2\pi},\ \mu B \le \dfrac{m}{n}\beta$, *виконується нерівність*

$$\|s\|_q \le \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \frac{\|\varphi_r + \bar{c}\|_q}{\|\varphi_r + \bar{c}\|_{L_p\left(I_{2\pi}\setminus B^{\bar{c}}_{y(\beta)}\right)}} \|s\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}. \tag{5.9}$$

Нерівність (5.9) *є точною у сенсі*

$$\sup_{(n,m)\in N_{n,m}}\ \sup_{(s,B)\in\Sigma^m_n} \frac{\|s\|_q}{(n/m)^{1/p-1/q}\|s\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}} = \frac{\|\varphi_r + \bar{c}\|_q}{\|\varphi_r + \bar{c}\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B_{y(\beta)})}},$$

де $N_{n,m}$ — *множина пар* (n, m) *натуральних чисел, таких що* $m \le n$, *а* Σ^m_n — *множина пар* (s, B), *що складаються зі сплайна* $s \in S_{n,r}$ *з мінімальним періодом* $2\pi/m$, *що має нулі, і вимірної множини* $B \subset I_{2\pi},\ \mu B \le \dfrac{m}{n}\beta$.

***Зауваження* 3.** 1. Для $\beta = 0$ і $m = 1$ теорему 4 і наслідок 3 отримано в [1].

2. Для сплайнів $s \in S_{n,r}$, які задовольняють умову $\|s_+\|_p = \|s_-\|_p$, стала c в нерівності (5.1) дорівнює нулю.

3. Для знакосталих сплайнів $s \in S_{n,r}$, що мають нулі, нерівність (5.1) перетворюється в нерівність для найкращих односторонніх наближень сталою (див. (3.10)), тобто норми $\|s\|_q$ і $\|s\|_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}$ в нерівності (5.1) для таких сплайнів потрібно замінити на $E^{\pm}_0(s)_q$ і $E^{\pm}_0(s)_{L_p(I_{2\pi}\setminus B)}$ відповідно. При цьому стала c в такій нерівності дорівнює сталій Фавара K_r.

Література

1. V. F. Babenko, V. A. Kofanov, S. A. Pichugov, *Comparison of rearrangements and Kolmogorov – Nagy type inequalities for periodic functions*, Approximation Theory: A volume dedicated to Blagovest Sendov (B. Bojanov, Ed.), Darba, Sofia (2002), p. 24 – 53.
2. В. А. Кофанов, *О некоторых экстремальных задачах разных метрик для дифференцируемых функций на оси*, Укр. мат. журн., **61**, № 6, 765 – 776 (2009).
3. В. А. Кофанов, *Неравенства разных метрик для дифференцируемых периодических функций*, Укр. мат. журн., **67**, № 2, 207 – 212 (2015).
4. B. Bojanov, N. Naidenov, *An extension of the Landau – Kolmogorov inequality. Solution of a problem of Erdos*, J. Anal. Math., **78**, 263 – 280 (1999).
5. В. А. Кофанов, *Точные верхние грани норм функций и их производных на классах функций с заданной функцией сравнения*, Укр. мат. журн., **63**, № 7, 969 – 984 (2011).

6. E. Remes, *Sur une propriete extremale des polynomes de Tchebychef*, Зап. Наук.-дослід. ін-ту математики й механіки та Харків. мат. т-ва, сер. 4, **13**, вип. 1, 93 – 95 (1936).
7. M. I. Ganzburg, *On a Remez-type inequality for trigonometric polynomials*, J. Approx. Theory, **164**, 1233 – 1237 (2012).
8. E. Nursultanov, S. Tikhonov, *A sharp Remez inequality for trigonometric polynomials*, Constr. Approx., **38**, 101 – 132 (2013).
9. P. Borwein, T. Erdelyi, *Polynomials and polynomial inequalities*, Springer, New York (1995).
10. M. I. Ganzburg, *Polynomial inequalities on measurable sets and their applications*, Consr. Approx., **17**, 275 – 306 (2001).
11. S. Tikhonov, P. Yuditski, *Sharp Remez inequality* // https://www.researchgate.net/publication/327905401.
12. В. А. Кофанов, *Точные неравенства типа Ремеза для дифференцируемых периодических функций, полиномов и сплайнов*, Укр. мат. журн., **68**, № 2, 227 – 240 (2016).
13. В. А. Кофанов, *Точные неравенства разных метрик типа Ремеза для дифференцируемых периодических функций, полиномов и сплайнов*, Укр. мат. журн., **69**, № 2, 173 – 188 (2017).
14. А. Е. Гайдабура, В. А. Кофанов, *Точные неравенства разных метрик типа Ремеза на классах функций с заданной функцией сравнения*, Укр. мат. журн., **69**, № 11, 1472 – 1485 (2017).
15. В. А. Кофанов, *Точные неравенства типа Колмогорова – Ремеза для периодических функций малой гладкости*, Укр. мат. журн., **72**, № 2, 483 – 493 (2020).
16. В. А. Кофанов, И. В. Попович, *Точные неравенства разных метрик типа Ремеза с несимметричными ограничениями на функции*, Укр. мат. журн., **72**, № 7, 918 – 927 (2020).
17. В. О. Кофанов, *Про взаємозв'язок точних нерівностей типу Колмогорова та Колмогорова – Ремеза*, Укр. мат. журн., **73**, № 4, 506 – 514 (2021).
18. В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов, *Сравнение точных констант в неравенствах для производных на действительной оси и на окружности*, Укр. мат. журн., **55**, № 5, 579 – 589 (2003).
19. Н. П. Корнейчук, В. Ф. Бабенко, А. А. Лигун, *Экстремальные свойства полиномов и сплайнов*, Наук. думка, Киев (1992).
20. А. Н. Колмогоров, *О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале*, Избр. труды. Математика, механика, Наука, Москва (1985), с. 252 – 263.
21. Н. П. Корнейчук, В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов, *Неравенства для производных и их приложения*, Наук. думка, Киев (2003).
22. В. М.Тихомиров, *Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений*, Успехи мат. наук., **15**, № 3, 81 – 120 (1960).

Одержано 12.07.21