1953 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ Т. V, № 1
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

О пучках Дарбу для неголономной поверхности

М. Р. Роговой

При построении пучка Дарбу для неголономной поверхности невозможно воспользоваться приемом отыскания поверхностей 2-го порядка, имеющих наиболее тесное прикосновение с поверхностью [1] — такие поверхности 2-го порядка для неголономной поверхности не существуют.

В настоящей статье показана возможность распространения приема Бомпиани-Клобучека [1] и построены два пучка Дарбу для неголономной поверхности соответственно каждой из асимптотических линий. Для обычной поверхности эти пучки совпадают с известным пучком Дарбу. Даны также обобщения целого ряда замечательных поверхностей, известных для обычной поверхности.

1. Точечно-плоскостная система и неголономные поверхности [6]

К каждой точке $M_0(u^1, u^2, u^3)$ трехмерного пространства присоединим по определенному закону плоскость μ, инцидентную с этой точкой. Плоскость μ может быть определена заданием еще двух точек M_1 и M_2, не лежащих на одной прямой с точкой M_0. Присоединим к точкам M_0, M_1, M_2 еще одну точку M_3, не лежащую в плоскости μ, и пусть линейные диференциальные формы

$$\omega_i^k(u^1, u^2, u^3; du^1, du^2, du^3) \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3)$$

от du^1, du^2, du^3 с коэфициентами, зависящими от u^1, u^2, u^3, являются компонентами бесконечно-малого перемещения тетраэдра $T(M_0M_1M_2M_3)$:

$$dM_i = \omega_i^\alpha M_\alpha; \qquad (i, \alpha = 0, 1, 2, 3). \tag{1}$$

Формы ω_i^k удовлетворяют уравнениям структуры проективной группы [5]

$$(\omega_i^k)' = [\omega_i^\alpha \omega_\alpha^k]; \qquad (i, k, \alpha = 0, 1, 2, 3). \tag{2}$$

Для бесконечно-малых перемещений точки M_0 в плоскости μ

$$\omega_0^3 = 0. \tag{3}$$

Если выразить формы ω_i^k через линейно независимые формы

$$\omega_0^1, \omega_0^2, \omega_0^3: \quad \omega_i^k = \Gamma_{i\alpha}^k \omega_0^\alpha; \qquad (i, \alpha = 1, 2, 3; \ k = 0, 1, 2, 3),$$

то условие вполне интегрируемости уравнения (3) запишется в виде

$$\Gamma_{12}^3 = \Gamma_{21}^3. \tag{4}$$

В случае, когда условие (4) выполнено, все интегральные кривые уравнения (3), инцидентные данной точке M_0, расположены на одной поверхности. Если условие (4) не имеет места, то совокупность интегральных кривых уравнения (3), инцидентных точке M_0, не будет расположена на одной поверхности; эта совокупность интегральных кривых имеет общую касательную плоскость μ в точке M_0 и образует неголономную поверхность, отнесенную к точке M_0.

Итак, каждой точечно-плоскостной системе отвечает вполне определенное уравнение $\omega_0^3=0$, все интегральные кривые которого касаются плоскостей системы. Совокупность интегральных кривых этого уравнения, инцидентных данной точке M_0 пространства, образует неголономную поверхность.

2. Канонический тетраэдр неголономной поверхности [6]

Среди кривых неголономной поверхности имеется пара кривых, для которых плоскости системы являются соприкасающимися плоскостями — это асимптотические линии неголономной поверхности. Выберем касательные к этим линиям в точке M_0 (асимптотические касательные) за ребра (M_0M_1) и (M_0M_2) канонического тетраэдра.

Пусть M_0^* — произвольная бесконечно близкая к M_0 точка пространства. Прямые $(M_0M_0^*)$, для которых асимптотические касательные $(M_0^*M_1^*)$ и $(M_0^*M_2^*)$ неголономной поверхности, отнесенной к точке M_0^*, встречают соответственно асимптотические касательные (M_0M_1) и (M_0M_2), образуют два конуса второго порядка [3]. Прямую пересечения полярных плоскостей асимптотических касательных (M_0M_1) и (M_0M_2) относительно этих конусов выберем за ребро (M_0M_3) канонического тетраэдра.

Рассмотрим соответствие между связкой прямых с центром в точке M_0 и полем прямых в плоскости μ системы, в котором прямой $(M_0M_0^*)$ соответствует прямая пересечения плоскостей μ и μ^* [3]. Потребуем, чтобы ребро (M_1M_2) канонического тетраэдра соответствовало ребру (M_0M_3).

При этих условиях для компонент бесконечно-малого перемещения тетраэдра имеем:

$$\begin{gathered}\omega_1^3=\Gamma_{12}^3\omega_0^2;\quad \omega_2^3=\Gamma_{21}^3\omega_0^1;\\ \omega_1^2=\Gamma_{11}^2\omega_0^1+\Gamma_{13}^2\omega_0^3;\quad \omega_2^1=\Gamma_{22}^1\omega_0^2+\Gamma_{23}^1\omega_0^3.\end{gathered}\tag{5}$$

Внешнее диференцирование формул (5) с использованием уравнений структуры (2) дает:

$$\begin{gathered}(\Gamma_{12}^3)_1+\Gamma_{12}^3(\Gamma_{01}^0+\Gamma_{31}^3-\Gamma_{11}^1-\Gamma_{21}^2)=0;\\ (\Gamma_{21}^3)_2+\Gamma_{21}^3(\Gamma_{02}^0+\Gamma_{32}^3-\Gamma_{12}^1-\Gamma_{22}^1)=0;\\ (\Gamma_{12}^3)_3+\Gamma_{12}^0+\Gamma_{12}^3(\Gamma_{03}^0+\Gamma_{33}^3+\Gamma_{32}^2-\Gamma_{23}^2-\Gamma_{13}^1)=0;\\ (\Gamma_{21}^3)_3+\Gamma_{21}^0+\Gamma_{21}^3(\Gamma_{03}^0+\Gamma_{33}^3+\Gamma_{31}^1-\Gamma_{23}^2-\Gamma_{13}^1)=0;\\ \Gamma_{11}^0+\Gamma_{12}^3\Gamma_{31}^2-\Gamma_{13}^2(\Gamma_{12}^3+\Gamma_{21}^3)=0;\\ \Gamma_{22}^0+\Gamma_{21}^3\Gamma_{32}^1-\Gamma_{23}^1(\Gamma_{12}^3+\Gamma_{21}^3)=0.\end{gathered}\tag{6}$$

Здесь и в дальнейшем мы пользуемся обозначением:

$$d\Gamma=(\Gamma)_1\omega_0^1+(\Gamma)_2\omega_0^2+(\Gamma)_3\omega_0^3.$$

Выбором вершины M_3 и нормированием всех вершин можно сделать

$$\Gamma_{33}^0=0; \quad \Gamma_{31}^1=\Gamma_{32}^2=1; \quad \omega_0^0+\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3=0. \tag{7}$$

3. Пучки Дарбу

При построении пучка Дарбу для неголономной поверхности первоначальный прием Дарбу неприменим.

На случай неголономной поверхности можно распространить построение Бомпиани-Клобучека [1].

Проведем кривую C неголономной поверхности, касательную к асимптотической линии $\omega_0^1=\omega_0^3=0$ в точке M_0. Вдоль этой кривой $\omega_0^3=0$; и, кроме того, в точке M_0 — $\omega_0^1=0$. Три бесконечно близкие касательные к асимптотическим линиям другого семейства (M_0M_1), $(M_0^*M_1^*)$, $(M_0^{**}M_1^{**})$ определяют поверхность 2-го порядка. Запишем уравнение этой поверхности в виде

$$aPP=0. \tag{8}$$

Ей принадлежит прежде всего асимптотическая касательная (M_0M_1), поэтому точка $P=M_0+\lambda M_1$ при любом λ удовлетворяет уравнению (8); это обстоятельство дает три условия:

$$aM_0M_0=0; \; aM_0M_1=0; \; aM_1M_1=0. \tag{9}$$

Диференцируя (9) вдоль кривой C, считая a постоянными, мы получим условие того, что прямая $(M_0^*M_1^*)$ принадлежит поверхности (8):

$$\begin{aligned} &aM_0M_2=0; \quad a(M_1M_2+\Gamma_{12}^3M_0M_3)=0; \\ &a(\Gamma_{11}^2\omega_0^1M_1M_2+\Gamma_{12}^3\omega_0^2M_1M_3)=0, \end{aligned} \tag{10}$$

или, так как в точке M_0, $\omega_0^1=0$, то последнее условие (10) упрощается, и мы будем иметь:

$$aM_0M_2=0; \quad a(M_1M_2+\Gamma_{12}^3M_0M_3)=0; \quad aM_1M_3=0. \tag{10'}$$

И, наконец, так как прямая $(M_0^{**}M_1^{**})$ должна также принадлежать поверхности (8), диференцируем условия (10′), получаем:

$$\begin{aligned} &aM_2M_2=0; \\ &a\left[\{(\Gamma_{12}^3)_2+\Gamma_{12}^3(\Gamma_{02}^0+\Gamma_{32}^3)\}M_0M_3+(\Gamma_{22}^2+\Gamma_{12}^1)M_1M_2+2\Gamma_{12}^3M_2M_3\right]=0; \\ &a\left[\left(\Gamma_{11}^2\frac{d\omega_0^1}{(\omega_0^2)^2}+\Gamma_{12}^3\Gamma_{32}^2\right)M_1M_2+\Gamma_{12}^3\Gamma_{12}^0M_0M_3+(\Gamma_{12}^3)^2M_3M_3\right]=0. \end{aligned} \tag{11}$$

Принимая тетраэдр T за координатный, имеем следующие условия для коэфициентов a_{ik}:

$$\begin{aligned} &a_{00}=a_{01}=a_{11}=a_{22}=a_{02}=a_{13}=0; \quad \Gamma_{12}^3a_{03}+a_{12}=0; \\ &[(\Gamma_{12}^3)_2+\Gamma_{12}^3(\Gamma_{02}^0+\Gamma_{32}^3)]a_{03}+(\Gamma_{22}^2+\Gamma_{12}^1)a_{12}+2\Gamma_{12}^3a_{23}=0; \\ &\left[\Gamma_{11}^2\frac{d\omega_0^1}{(\omega_0^2)^2}+\Gamma_{12}^3\Gamma_{32}^3\right]a_{12}+\Gamma_{12}^3\Gamma_{12}^0a_{03}+(\Gamma_{12}^3)^2a_{33}=0; \end{aligned} \tag{12}$$

откуда находим:

$$a_{00}=a_{01}=a_{11}=a_{22}=a_{02}=a_{13}=0; \quad a_{03}=-1; \quad a_{12}=\Gamma^3_{12};$$

$$a_{23}=\frac{1}{2}\left(\Gamma^0_{02}+\Gamma^3_{32}-\Gamma^2_{22}-\Gamma^1_{12}\right)+\frac{(\Gamma^3_{12})_2}{2\Gamma^3_{12}}; \tag{13}$$

$$a_{33}=\frac{1}{\Gamma^3_{12}}\left(\Gamma^0_{12}-\Gamma^3_{12}\Gamma^2_{32}-\Gamma^2_{11}\frac{d\omega^1_0}{(\omega^2_0)^2}\right).$$

Точно так же для поверхности

$$bPP=0; \tag{8'}$$

соответствующей кривой C', касательной к другой асимптотической линии $\omega_0^2=\omega_0^3=0$, находим:

$$bM_0M_0=0; \quad bM_0M_2=0; \quad bM_2M_2=0;$$

$$bM_0M_1=0; \quad b\left(\Gamma^3_{21}M_0M_3+M_1M_2\right)=0; \quad bM_2M_3=0;$$

$$bM_1M_1=0; \; b\left[\{(\Gamma^3_{21})_1+\Gamma^3_{21}(\Gamma^0_{01}+\Gamma^3_{31})\}M_0M_3+(\Gamma^2_{21}+\Gamma^1_{11})M_1M_2+2\Gamma^3_{21}M_1M_3\right]=0;$$

$$b\left[\left(\Gamma^1_{22}\frac{d\omega^2_0}{(\omega^1_0)^2}+\Gamma^3_{21}\Gamma^1_{31}\right)M_1M_2+\Gamma^3_{21}\Gamma^0_{21}M_0M_3+(\Gamma^3_{21})^2M_3M_3\right]=0. \tag{14}$$

Откуда

$$b_{00}=b_{01}=b_{02}=b_{11}=b_{22}=b_{23}=0; \quad b_{03}=1; \quad b_{12}=\Gamma^3_{21};$$

$$b_{13}=\frac{1}{2}\left(\Gamma^0_{01}+\Gamma^3_{31}-\Gamma^2_{21}-\Gamma^1_{11}\right)+\frac{(\Gamma^3_{21})_1}{2\Gamma^3_{21}}; \tag{15}$$

$$b_{33}=\frac{1}{\Gamma^3_{21}}\left(\Gamma^0_{21}-\Gamma^3_{21}\Gamma^1_{31}-\Gamma^1_{22}\frac{d\omega^2_0}{(\omega^1_0)^2}\right).$$

Воспользовавшись первыми двумя соотношениями (6), можно a_{23} и b_{23} написать в виде

$$\begin{aligned} a_{23}&=\frac{1}{2}\left\{\frac{(\Gamma^3_{12})_2}{\Gamma^3_{12}}-\frac{(\Gamma^3_{21})_2}{\Gamma^3_{21}}\right\}; \\ b_{23}&=\frac{1}{2}\left\{\frac{(\Gamma^3_{21})_1}{\Gamma^3_{21}}-\frac{(\Gamma^3_{12})_1}{\Gamma^3_{12}}\right\}. \end{aligned} \tag{16}$$

Обозначим проективные инварианты касания [1] кривых C и C' с соответствующими асимптотическими линиями через $h+1$ и $h'+1$; тогда имеем:

для кривой C —

$$\frac{(M_0dM_0d^2M_0)}{\Gamma^1_{22}(\omega^2_0)^2(M_0M_1M_2)}=\left\{\frac{d\omega^1_0}{\Gamma^1_{22}(\omega^2_0)^2}+1\right\}=h+1; \tag{17}$$

для кривой C' —

$$\frac{(M_0dM_0d^2M_0)}{\Gamma^2_{11}(\omega^1_0)^2(M_0M_1M_2)}=\left\{\frac{d\omega^2_0}{\Gamma^2_{11}(\omega^1_0)^2}+1\right\}=h'+1. \tag{17'}$$

Следовательно,

$$\frac{d\omega^1_0}{(\omega^2_0)^2}=\Gamma^1_{22}\cdot h; \quad \frac{d\omega^2_0}{(\omega^1_0)^2}=\Gamma^2_{11}\cdot h'. \tag{18}$$

эфициенты a_{33} и b_{23} в виде:

$$a_{33}=\frac{1}{\Gamma_{12}^{3}}\{\Gamma_{12}^{0}-\Gamma_{12}^{3}-\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1}h\};$$
$$b_{23}=\frac{1}{\Gamma_{21}^{3}}\{\Gamma_{21}^{0}-\Gamma_{21}^{3}-\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1}h'\}. \tag{19}$$

Подставляя значения коэфициентов в уравнения (8) и (8′), получим два пучка поверхностей второго порядка:

$$z=\Gamma_{12}^{3}xy+\frac{1}{2}\left\{\frac{(\Gamma_{12}^{3})_2}{\Gamma_{12}^{3}}-\frac{(\Gamma_{21}^{3})_2}{\Gamma_{21}^{3}}\right\}yz+\frac{1}{\Gamma_{12}^{3}}(\Gamma_{12}^{0}-\Gamma_{12}^{3}-\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1}h)z^2; \tag{20}$$

$$z=\Gamma_{21}^{3}xy+\frac{1}{2}\left\{\frac{(\Gamma_{21}^{3})_1}{\Gamma_{21}^{3}}-\frac{(\Gamma_{12}^{3})_1}{\Gamma_{12}^{3}}\right\}xz+\frac{1}{\Gamma_{21}^{3}}(\Gamma_{21}^{0}-\Gamma_{21}^{3}-\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1}h')z^2. \tag{20′}$$

Если выполняется условие интегрируемости $\Gamma_{12}^{3}=\Gamma_{21}^{3}$, то, как следует из 3-го и 4-го соотношений (6), $\Gamma_{12}^{0}=\Gamma_{21}^{0}$ и пучки поверхностей (20) и (20′) совпадают с пучком Дарбу для обычной поверхности:

$$z=\Gamma_{12}^{3}xy+\frac{1}{\Gamma_{12}^{3}}(\Gamma_{12}^{0}-\Gamma_{21}^{3}-\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1}h)z^2. \tag{21}$$

Рассмотрим некоторые характеристические значения для индексов $h(h')$:

$h(h')=0$; — кривая $C(C')$ имеет с асимптотической линией в точке M_0 касание 2-го порядка. Соответствующие поверхности пучков — обобщенные поверхности Ли, полученные для неголономной поверхности Бланком [2].

$h(h')=-1$; — кривая $C(C')$, как это следует из (17) и (17′), имеет в точке M_0 неопределенную соприкасающуюся плоскость. Соответствующие поверхности пучков — обобщенные поверхности Вильчинского-Бомпиани.

$h(h')=-\dfrac{\Gamma_{21}^{3}}{2\Gamma_{12}^{3}+\Gamma_{21}^{3}}$; — кривая $C(C')$ имеет в точке M_0 стационарную соприкасающуюся плоскость (в самом деле, для кривой C имеем

$$(M_0dM_0d^3M_0)=*(M_0M_1M_2)+\omega_0^2[(2\Gamma_{12}^{3}+\Gamma_{21}^{3})d\omega_0^1+\Gamma_{22}^{1}\Gamma_{12}^{3}(\omega_0^2)^2](M_0M_2M_3),$$

приравнивая коэфициент при $(M_0M_2M_3)$ нулю, находим

$\dfrac{d\omega_0^1}{\Gamma_{22}^{1}(\omega_0^2)^2}=-\dfrac{\Gamma_{21}^{3}}{2\Gamma_{12}^{3}+\Gamma_{21}^{3}}$; т. е. $h=-\dfrac{\Gamma_{21}^{3}}{2\Gamma_{12}^{3}+\Gamma_{21}^{3}}$). Соответствующие поверхности пучков — обобщенные поверхности Фубини. Напишем, для удобства уравнения пучков (20) и (20′) в виде

$$z=\Gamma_{12}^{3}xy+Lyz+(N+\tau_1)z^2; \tag{22}$$

$$z=\Gamma_{21}^{3}xy+L'xz+(N'+\tau_1')z^2 \tag{22′}$$

и составим пучок

$$z=\frac{1}{2}(\Gamma_{12}^{3}+\Gamma_{21}^{3})xy+\frac{1}{2}L'xz+\frac{1}{2}Lyz+\tau z^2, \tag{23}$$

где

$$L=\frac{1}{2}\left\{\frac{(\Gamma_{12}^{3})_2}{\Gamma_{12}^{3}}-\frac{(\Gamma_{21}^{3})_2}{\Gamma_{21}^{3}}\right\};\quad N=\frac{\Gamma_{12}^{0}-\Gamma_{12}^{3}}{\Gamma_{12}^{3}};\quad \tau_1=-\frac{\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1}h}{\Gamma_{12}^{3}};$$

$$L'=\frac{1}{2}\left\{\frac{(\Gamma_{21}^{3})_1}{\Gamma_{21}^{3}}-\frac{(\Gamma_{12}^{3})_1}{\Gamma_{12}^{3}}\right\};\quad N'=\frac{\Gamma_{21}^{0}-\Gamma_{21}^{3}}{\Gamma_{21}^{3}};\quad \tau_1'=-\frac{\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1}h'}{\Gamma_{21}^{3}}, \tag{24}$$

$$\tau=\frac{N+N'+\tau_1+\tau_1'}{2}.$$

Пучок поверхностей (23) совпадает с пучком Дарбу, другим путем введенным для неголономной поверхности Вичихло [4].

Поверхности пучков (20) и (20′) (при $h=h'$), кроме общих асимптотических касательных, пересекаются еще по некоторой кривой 2-го порядка; эта кривая может быть представлена как пересечение не зависящей от h поверхности

$$(\Gamma_{12}^{3}-\Gamma_{21}^{3})z+\{(\Gamma_{12}^{3})^2-(\Gamma_{21}^{3})^2\}xy+$$
$$+\{\Gamma_{12}^{3}Ly-\Gamma_{21}^{3}L'x+(\Gamma_{12}^{3}N-\Gamma_{21}^{3}N')z\}z=0; \tag{25}$$

плоскостью

$$\Gamma_{12}^{3}L'x-\Gamma_{21}^{3}Ly+\left\{\Gamma_{12}^{3}N'-\Gamma_{21}^{3}N+\Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1}\left(\frac{\Gamma_{12}^{3}}{\Gamma_{21}^{3}}-\frac{\Gamma_{21}^{3}}{\Gamma_{12}^{3}}\right)h\right\}z+(\Gamma_{12}^{3}-\Gamma_{21}^{3})=0. \tag{26}$$

При переменном h плоскости (26) образуют пучок, ось которого лежит в плоскости системы

$$\Gamma_{12}^{3}L'x-\Gamma_{21}^{3}Ly+(\Gamma_{12}^{3}-\Gamma_{21}^{3})=0;\qquad z=0. \tag{27}$$

Эта прямая инвариантно связана с неголономной поверхностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Фиников, Проективно-дифференциальная геометрия, ОНТИ, Москва, 1937.

2. Я. П. Бланк и М. А. Николаенко, О поверхностях Ли в системе интегральных кривых Пфаффова уравнения, Сообщ. Харьк. мат. об-ва, серия 4, т. III, 1929.

3. Bompiani, Sulle varieta anolonome, Rend. dei Licei, v. 27, F. 6, 1938.

4. Vyčichlo, Contributi alla geometria proiettiva delle varieta anolonome. Rend. dei Lincei, v. 27, F. 6, 1938.

5. Cartan, Leçons sur la théorie des èspaces à connexion projective. Paris, 1937.

6. М. Р. Роговой, К проективно-дифференциальной геометрии неголономных поверхностей в трехмерном пространстве, Укр. матем. журнал, т. II, № 2, 1950.

Получена I.X 1951 г.
Винница.