Канонический пучок как образ проективной симметрии на поверхности

Н. И. Кованцов

При изучении локальных свойств кривых и поверхностей в диференциальной геометрии обычно связывают с исследуемой точкой некоторые простейшие геометрические образования, как то: точки, прямые, кривые второго порядка и т. д. и по поведению этих образований заключают о свойствах кривой или поверхности в окрестности данной точки. При этом конструкции, приводящие к этим простейшим образам, в своей существенной части опираются на инфинитезимальное представление исследуемой кривой или поверхности.

В проективно-диференциальной геометрии поверхностей особый интерес представляют прямые так называемого канонического пучка. Определения конструкций, приводящих к каноническим прямым, читатель найдет в книге проф. С. П. Финикова „Проективно-диференциальная геометрия" [1]. Там же он найдет описание нормального тетраэдра, которым мы воспользуемся в качестве основной координатной системы.

В настоящей работе мы выделяем во всех канонических конструкциях два свойства, присущих каждой из этих конструкций. Одно из таких свойств состоит в том, что все классические конструкции при построении прямых канонического пучка исходят из окрестности (поверхности) четвертого порядка (мы называем окрестность поверхности окрестностью четвертого порядка, если при изучении свойств поверхности ограничиваются лишь основными инвариантами β, γ и их производными первого порядка. Известно же, что через β, γ и их производные в общем случае выражаются все инварианты поверхности. В частности, инварианты A и B, представляющие интерес в проективно-диференциальной геометрии, выражаются через β, γ и их производные до шестого порядка включительно ([1], стр. 42). Исключение составляют лишь так называемые проективно-изгибаемые поверхности. Доказательством этого являются направляющие параметры всех канонических прямых в нормальном тетраэдре, зависящие лишь от β, γ и их первых производных.

Вторым свойством является симметричность всех классических конструкций по отношению к паре асимптотических линий. (Последнее обстоятельство и дает нам основание назвать канонический пучок образом проективной симметрии на поверхности).

Ниже мы последовательно устанавливаем симметричность каждой из известных классических конструкций по отношению к обеим асимптотическим линиям. Затем, следуя требованию ограничиваться указанной симметрией и порядком 4-ым окрестности на поверхности, мы находим ряд новых конструкций, приводящих к уже известным каноническим прямым. Каждая такая конструкция может быть рассматриваема как новое свойство той или иной канонической прямой. В заключение мы приводим конструкцию, дающую уже совершенно новую прямую канонического пучка и удовлетворяющую указанным выше двум требованиям.

Являются или не являются порядок окрестности и симметрия по отношению к паре асимптотических линий условиями, вполне определяющими канонический пучок, — этот вопрос должен явиться предметом специального исследования.

Анализ классических конструкций

1. Директрисы Вильчинского

Как известно, при построении директрис Вильчинского берутся два линейных комплекса K_1 и K_2, каждый из которых содержит пять бесконечно близких касательных к соответствующей асимптотической линии. Пучок линейных комплексов, определяемый комплексами K_1 и K_2, содержит два специальных комплекса, оси которых и являются директрисами Вильчинского.

Наличие симметрии в этой конструкции очевидно.

2. Ребра Грина

Берутся пучки a_1^2 и a_2^2 кривых второго порядка, имеющих касания третьего порядка с проекциями на касательную плоскость обеих асимптотических линий s_1 и s_2 из произвольной точки Q прямой l_1, проходящей через данную точку поверхности. Если прямая l_2, проходящая через полюсы P_1 и P_2 асимптотических касательных t_1 и t_2 относительно пучков a_2^1 и a_1^2, полярно сопряжена прямой l_1 относительно пучка поверхностей Дарбу, то l_1 и l_2 суть ребра Грина.

Здесь видна симметрия конструкции относительно обеих асимптотических. Что же касается пучка поверхностей Дарбу, используемого в этой конструкции, то достаточно вспомнить конструкцию Бомпиани-Клобучека, приводящую к этому пучку, чтобы заключить, что пучок Дарбу также симметричен относительно асимптотических линий ([1], стр. 82—83).

3. Ось Чеха

Ось Чеха можно определить как линию пересечения плоскостей, соприкасающихся с тремя линиями Сегре. Линии Сегре являются огибающими касательных Сегре. Симметричность же касательных Сегре относительно обеих асимптотических очень ясно обнаруживается из следующей конструкции.

В соприкасающейся плоскости кривой лежат три бесконечно близких точки кривой. Соприкасающейся плоскостью асимптотической линии является касательная плоскость поверхности. Следовательно, в касательной плоскости лежат три бесконечно близких точки каждой асимптотической. Возьмем асимптотическую линию u. Уравнение связки кривых второго порядка, проходящих через три бесконечно близких точки асимптотической, в неоднородных координатах на касательной плоскости имеет вид

$$\beta x^2 + 2c_{12}xy + c_{22}y^2 - 2y = 0 \tag{1}$$

([1], стр. 96).

Возьмем некоторую прямую касательной плоскости, не проходящую через точку касания (начало координат)

$$Ax + By - 1 = 0. \tag{2}$$

Точки пересечения этой прямой с осью ординат суть

$$x=0, \quad y = \frac{1}{B}. \tag{3}$$

Потребуем, чтобы кривая (1), проходя через точку (3), касалась прямой (2). Уравнение касательной к кривой (1) в точке (3) имеет вид

$$\frac{c_{12}}{B}X + \left(\frac{c_{22}}{B} - 1\right)Y - \frac{1}{B} = 0. \tag{4}$$

Требуя, чтобы прямые (2) и (4) совпадали, найдем $c_{12} = A$, $c_{22} = 2B$. Уравнение (1) примет вид

$$\beta x^2 + 2Axy + 2By^2 - 2y = 0. \tag{1'}$$

Аналогично запишется уравнение взаимной кривой (для асимптотической линии v), касающейся той же прямой (2) в точке ее пересечения с осью абсцисс,

$$\gamma y^2 + 2Bxy + 2Ax^2 - 2x = 0. \tag{5}$$

Умножим уравнение (1′) на x, уравнение (5) — на y и вычтем из одного другое. Получим уравнение кривой, проходящей через точки пересечения кривых (1′) и (5),

$$\beta x^3 = \gamma y^3.$$

Но это уравнение трех касательных Сегре.

4. Нормаль Фубини

Соприкасающиеся плоскости трех кривых, касающихся линий Сегре и таких, что вдоль них интеграл от квадратного корня из квадратичной формы $\varphi_2 = 2\beta\gamma\, du\, dv$ достигает экстремальных значений, пересекаются на нормали Фубини. Для кубической формы $\varphi_3 = \beta\gamma(\beta\, du^3 + \gamma\, dv^3)$ получается директриса Вильчинского, для отношения кубической формы к квадратичной, т. е. для проективного линейного элемента, получается прямая Картана.

Что касается линий Сегре, то мы только что показали их проективную симметричность по отношению к асимптотическим линиям. Что же касается инвариантных диференциальных форм, то не трудно заметить их симметричность относительно β и γ, du и dv, а тем самым и относительно асимптотических линий.

В своей работе [2] мы дали общее выражение для инвариантных диференциальных форм от β, γ, du, dv : $\Psi(\gamma\beta^2\, du^3, \beta\gamma^2\, dv^3)$, где Ψ — произвольная функция. Оставляя неизменными все элементы конструкции

Фубини и беря в качестве формы форму ψ, мы получили каноническую связку прямых, в состав которой входит канонический пучок. Не трудно показать, что канонический пучок вполне естественно выделяется, если потребовать симметричность функции ψ относительно своих аргументов. Симметрия функции ψ относительно пары асимптотических вытекает как естественное следствие следующего условия: мы должны выбирать функцию ψ таким образом, чтобы она никак не отражала различия в *наименовании* асимптотических, т. е. форма должна иметь одну и ту же структуру независимо от того, какая асимптотическая принята за линию u и какая — за линию v.

В силу того, что ψ — форма, она должна допускать вынесение du, а потому и всего первого аргумента

$$\psi(\gamma\beta^2 du^3,\ \beta\gamma^2 dv^3) = du^{3n}(\gamma\beta^2)^n \psi\left(1,\ \frac{\gamma}{\beta} v'^3\right).$$

Мы положили

$$\sqrt[3n]{\psi\left(1,\ \frac{\gamma}{\beta} v'^3\right)} = P\left(\frac{\gamma}{\beta} v'^3\right), \quad P(1)=a, \quad P'(1)=b, \quad P''(1)=c.$$

Далее

$$\psi(\gamma\beta^2 du^3,\ \beta\gamma^2 dv^3) = dv^{3n}(\beta\gamma^2)^n \psi\left(\frac{\beta}{\gamma} u'^3,\ 1\right).$$

Положим

$$\sqrt[3n]{\psi\left(\frac{\beta}{\gamma} u'^3,\ 1\right)} = \bar{p}\left(\frac{\beta}{\gamma} u'^3\right), \quad \bar{p}(1)=\bar{a}, \quad \bar{p}'(1)=\bar{b}.$$

Мы имеем

$$\psi(\gamma\beta^2 du^3,\ \beta\gamma^2 dv^3) = (\gamma\beta^2)^n \psi\left(1,\ \frac{\gamma}{\beta} v'^3\right) du^{3n} =$$

$$= \left(\frac{\gamma}{\beta} v'^3\right)^n \frac{\psi\left(1,\ \frac{\gamma}{\beta} v'^3\right)}{\left(\frac{\gamma}{\beta} v'^3\right)^n} (\gamma\beta^2)^n du^{3n} = (\beta\gamma^2)^n \frac{\psi\left(1,\ \frac{\gamma}{\beta} v'^3\right)}{\left(\frac{\gamma}{\beta} v'^3\right)} dv^{3n}.$$

Следовательно,

$$\psi\left(\frac{\beta}{\gamma} u'^3,\ 1\right) = \frac{\psi\left(1, \frac{\gamma}{\beta} v'^3\right)}{\left(\frac{\gamma}{\beta} v'^3\right)^n},$$

а потому

$$\bar{p}\left(\frac{\beta}{\gamma} u'^3\right) = \sqrt[3n]{\psi\left(\frac{\beta}{\gamma} u'^3,\ 1\right)} = \sqrt[3n]{\frac{\psi\left(1,\ \frac{\gamma}{\beta} v'^3\right)}{\left(\frac{\gamma}{\beta} v'^3\right)^n}} =$$

$$= \frac{P\left(\frac{\gamma}{\beta} v'^3\right)}{\left(\frac{\gamma}{\beta} v'^3\right)^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{\beta}{\gamma} u'^3\right)^{\frac{1}{3}} P\left(\frac{1}{\frac{\beta}{\gamma} u'^3}\right).$$

Положим $\frac{\beta}{\gamma} u'^3 = y$. Тогда $\bar{p}(y) = y^{\frac{1}{3}} P\left(\frac{1}{y}\right)$.

Отсюда $p' = \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} P - y^{-\frac{5}{3}} P'$. Полагая $y=1$, найдем

$$\bar{a} = a, \quad \bar{b} = \frac{1}{3} a - b.$$

Если функция ψ симметрична относительно своих аргументов, то $\bar{b} = b$. Но в таком случае $a = 6b$, а это равенство характеризует канонический пучок ([2], стр. 158). В указанной статье дан пример семейства симметричных форм, дающих прямые канонического пучка. Из изложенного становится понятным, почему для отношения кубической формы к квадратичной получается прямая канонического пучка — прямая Картана. Прямая канонического пучка получится не только для отношения двух симметричных форм, но и для любой функции от этих форм, лишь бы эта функция была диференциальной формой.

Различные построения канонических прямых

Дадим теперь примеры конструкций, представляющих собой некоторые видоизменения классических конструкций и приводящих к уже известным каноническим прямым.

Ось Чеха

§ 1. Возьмем на поверхности семейство кривых, определяемое с помощью диференциального уравнения $v' = m(u, v)$, где $m(u, v)$ — функция, удовлетворяющая условиям, которые мы сформулируем ниже.

Вдоль каждой из таких кривых вторая производная v'' определится формулой

$$v'' = n = m' = m_u + m_v v' = m_u + m_v m = m \frac{\partial \ln m}{\partial u} + m^2 \frac{\partial \ln m}{\partial v}.$$

Вместе с данным семейством кривых возьмем сопряженное ему семейство $v' = -m(u, v)$, для которого, следовательно, имеет место равенство

$$v'' = -m_u - m_v v' = -m_u + m_v m = -m \frac{\partial \ln m}{\partial u} + m^2 \frac{\partial \ln m}{\partial v}.$$

Уравнения соприкасающихся плоскостей этих кривых суть:

$$2m^2 x - 2my + z\left(\beta + 2am - 2bm^2 - \gamma m^3 + m \frac{\partial \ln m}{\partial u} + m^2 \frac{\partial \ln m}{\partial v}\right) = 0,$$

$$2m^2 x + 2my + z\left(\beta - 2am - 2bm^2 + \gamma m^3 - m \frac{\partial \ln m}{\partial u} + m^2 \frac{\partial \ln m}{\partial v}\right) = 0.$$

Найдем линию пересечения этих плоскостей. Складывая уравнения, получим

$$4m^2 x + z\left(2\beta - 4bm^2 + 2m^2 \frac{\partial \ln m}{\partial v}\right) = 0,$$

откуда

$$L = \frac{x}{z} = -\frac{\beta}{2m^2} + b - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln m}{\partial v}.$$

Аналогично, вычитая из второго уравнения первое, получим

$$4my+z\left(-4am+2\gamma m^3-2m\frac{\partial \ln m}{\partial u}\right)=0,$$

откуда

$$M=\frac{y}{z}=-\frac{1}{2}\gamma m^2+a+\frac{1}{2}\frac{\partial \ln m}{\partial u}.$$

Наложим теперь на функцию $m(u, v)$ ограничение, состоящее в том, что она должна быть выражена только через основные инварианты β, γ, но не должна зависеть от их производных β_u, γ_u, β_v, γ_v. Это ограничение вызвано тем обстоятельством, что во всех наших построениях мы исходим лишь из окрестности 4-го порядка и без указанного ограничения мы в последних формулах должны были бы ввести вторые производные β_{uu}, β_{uv} и т. д., а это выводит нас за пределы указанной окрестности.

Итак, положим $m=f(\beta, \gamma)$. Но $m=v'=\frac{dv}{du}$. При внутреннем преобразовании параметров $u=u(\bar{u})$, $v=v(\bar{v})$ будем иметь

$$\bar{m}=\frac{d\bar{v}}{d\bar{u}}=\frac{\frac{d\bar{v}}{dv}dv}{\frac{d\bar{u}}{du}du}=m\frac{d\bar{v}}{dv}\frac{du}{d\bar{u}}.$$

Полагая $\frac{du}{d\bar{u}}=t$, $\frac{dv}{d\bar{v}}=x$, имеем $\bar{m}=m\frac{t}{x}$, или

$$f(\bar{\beta}, \bar{\gamma})=f(\beta, \gamma)\frac{t}{x}, \quad \text{или} \quad f\left(\beta\frac{t^2}{x}, \gamma\frac{x^2}{t}\right)=f(\beta, \gamma)\frac{t}{x}$$

(см. формулы преобразования β и γ [1], стр. 43). Это тождество относительно всех аргументов. Продиференцируем его по t и x, полагая в обеих частях после диференцирования $t=x=1$,

$$\text{по } t\colon\ 2\beta f_\beta-\gamma f_\gamma=f, \quad \text{по } x\colon\ -\beta f_\beta+2\gamma f_\gamma=-f.$$

Общим интегралом первого уравнения является $f=\sqrt{\beta}\,\varphi(\beta\gamma^2)$, где φ — произвольная функция одного аргумента. Подставляем это решение во второе уравнение. После преобразований получим

$$6xy'+y=0, \quad \text{где } x=\beta\gamma^2, \quad y=\varphi.$$

Отсюда $y=cx^{-\frac{1}{6}}$, где c — произвольное постоянное. Возвращаясь к первоначальным обозначениям, найдем

$$f=\beta^{\frac{1}{2}}c(\beta\gamma^2)^{-\frac{1}{6}}=c\sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}}.$$

Таким образом, направляющие параметры найденной прямой пересечения имеют вид

$$L=-\frac{\beta}{2c^2}\sqrt[3]{\frac{\gamma^2}{\beta^2}}+b-\frac{1}{6}\frac{\partial \ln \frac{\beta}{\gamma}}{dv}, \quad M=-\frac{1}{2}\gamma c^2\sqrt[3]{\frac{\beta^2}{\gamma^2}}+a-\frac{1}{6}\frac{\partial \ln \frac{\gamma}{\beta}}{\partial u}. \qquad (a)$$

Найдем геометрическое место этих прямых. Для этого исключим c из последних равенств. Переписывая их в виде

$$\left(\frac{x}{z}-b+\frac{1}{6}\frac{\partial \ln\frac{\beta}{\gamma}}{\partial v}\right)=-\frac{\beta}{2}\frac{1}{c^2}\sqrt[3]{\frac{\gamma^2}{\beta^2}},\quad \left(\frac{y}{z}-a+\frac{1}{6}\frac{\partial \ln\frac{\gamma}{\beta}}{\partial u}\right)=-\frac{\gamma}{2}c^2\sqrt[3]{\frac{\beta^2}{\gamma^2}}$$

и перемножая, получим

$$\left(\frac{x}{z}-b+\frac{1}{6}\frac{\partial \ln\frac{\beta}{\gamma}}{\partial v}\right)\left(\frac{y}{z}-a+\frac{1}{6}\frac{\partial \ln\frac{\gamma}{\beta}}{\partial u}\right)=\frac{\beta\gamma}{4}. \tag{*}$$

Это — некоторый конус второго порядка. Не трудно проверить, что прямой, полярно сопряженной касательной плоскости относительно этого конуса, является прямая с направляющими параметрами,

$$L=b-\frac{1}{6}\frac{\partial \ln\frac{\beta}{\gamma}}{\partial v},\quad M=a-\frac{1}{6}\frac{\partial \ln\frac{\gamma}{\beta}}{\partial u}, \tag{**}$$

т. е. ось Чеха. Но ось Чеха — прямая канонического пучка.

Симметрию описанной конструкции относительно асимптотических линий можно усмотреть в том, что пара прямых с угловыми коэфициентами m и $-m$ гармонически разделяет пару асимптотических касательных.

§ 2. Возьмем семейство кривых, определяемое диференциальным уравнением $\dfrac{dv}{du}=c\sqrt[3]{\dfrac{\beta}{\gamma}}$ ($c=\text{const}$) (как мы только что видели, таково единственное выражение для углового коэфициента касательной к кривой, зависящего лишь от β и γ). Рассмотрим конгруэнцию касательных к семейству линий $c=\text{const}$. Найдем фокальные поверхности конгруэнции. Луч конгруэнции определяется, очевидно, точками M и $dM=M_u\,du+M_v\,dv$. Мы имеем $\dfrac{du}{\sqrt[3]{\gamma}}=\dfrac{dv}{c\sqrt[3]{\beta}}$. Мы можем, следовательно, в качестве второй точки взять точку

$$M_u\sqrt[3]{\gamma}+c\sqrt[3]{\beta}M_v=(aM+M_1)\sqrt[3]{\gamma}+(bM+M_2)c\sqrt[3]{\beta}.$$

Для определения фокальных поверхностей

$$N=M+\lambda\left[(aM+M_1)\sqrt[3]{\gamma}+(bM+M_2)c\sqrt[3]{\beta}\right]$$

мы имеем уравнение

$$\{M_1(aM+M_1)\sqrt[3]{\gamma}+(bM+M_2)c\sqrt[3]{\beta},\quad M_u+\lambda\left[(aM+M_1)\sqrt[3]{\gamma}+(bM+M_2)c\sqrt[3]{\beta}\right]_u,$$
$$M_v+\lambda\left[(aM+M_1)\sqrt[3]{\gamma}+(bM+M_2)c\sqrt[3]{\beta}\right]_v\}=0$$

([1], стр. 114),

или

$$\sqrt[3]{\gamma}\begin{vmatrix}\lambda\left(\beta\sqrt[3]{\gamma}+ac\sqrt[3]{\beta}+c(\sqrt[3]{\beta})_u\right) & \lambda c\sqrt[3]{\beta}\\ 1+\lambda\left(a\sqrt[3]{\gamma}+c(\sqrt[3]{\beta})_v\right) & \lambda\sqrt[3]{\gamma}\end{vmatrix}-$$
$$-c\sqrt[3]{\beta}\begin{vmatrix}1+\lambda\left((\sqrt[3]{\gamma})_u+bc\sqrt[3]{\beta}\right) & \lambda c\sqrt[3]{\beta}\\ \lambda\left(b\sqrt[3]{\gamma}+(\sqrt[3]{\gamma})_v+\gamma c\sqrt[3]{\beta}\right) & \lambda\sqrt[3]{\gamma}\end{vmatrix}=0.$$

Отсюда $\lambda_1 = 0$, как и следовало ожидать, так как одной из фокальных поверхностей является сама поверхность M. Для определения второго фокуса имеем уравнение

$$\lambda\left[(1+c^3)\beta\gamma + \frac{c}{3}\sqrt[3]{\beta\gamma^2}\,\frac{\partial \ln \frac{\beta}{\gamma}}{\partial u} + \frac{c^2}{3}\sqrt[3]{\gamma\beta^2}\,\frac{\partial \ln \frac{\gamma}{\beta}}{\partial v}\right] = 2c\sqrt{\beta\gamma}.$$

Таким образом,

$$N = \frac{2c\sqrt[3]{\beta\gamma}}{[\ \ ]}\left(\sqrt[3]{\gamma}M_u + c\sqrt[3]{\beta}M_v\right) + M,$$

где $[\ \ ]$ — известное выражение.

Если координатный тетраэдр совпадает с подвижным, то координаты точки N следующие:

$$x_0 = 1 + \frac{2c\sqrt[3]{\beta\gamma}}{[\ \ ]}\left(\sqrt[3]{\gamma}a + c\sqrt[3]{\beta}b\right),\quad x_1 = \frac{2c\sqrt[3]{\beta\gamma}}{[\ \ ]}\sqrt[3]{\gamma},\quad x_2 = \frac{2c\sqrt{\beta\gamma}}{[\ \ ]}c\sqrt[3]{\beta}.$$

Неоднородные координаты $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$ следующие:

$$x' = \frac{2c\sqrt[3]{\beta\gamma^2}}{[\ \ ]+2c\left(a\sqrt[3]{\beta\gamma^2}+cb\sqrt[3]{\gamma\beta^2}\right)},\quad y' = \frac{2c^2\sqrt[3]{\gamma\beta^2}}{[\ \ ]+2c\left(a\sqrt[3]{\beta\gamma^2}+cb\sqrt[3]{\gamma\beta^2}\right)}.$$

Для сопряженной конгруэнции $-c$ аналогично найдем координаты фокуса x'', y''. Найдем $p = \frac{y'-y''}{x'-x''}$. Имеем

$$y'-y'' = \frac{2c^2\sqrt[3]{\gamma\beta^2}}{R}\left(-\frac{2}{3}c\sqrt[3]{\beta\gamma^2}\,\frac{\partial \ln \frac{\beta}{\gamma}}{\partial u} - 2c^3\beta\gamma - 4ac\sqrt[3]{\beta\gamma^2}\right),$$

где R — соответствующий знаменатель

$$x'-x'' = \frac{2c\sqrt[3]{\beta\gamma^2}}{R}\left(2\beta\gamma + \frac{2c^2}{3}\sqrt[3]{\gamma\beta^2}\,\frac{\partial \ln \frac{\gamma}{\beta}}{\partial v} + 4c^2b\sqrt[3]{\gamma\beta^2}\right),$$

$$p = -c^2\,\frac{\frac{1}{3}\,\frac{\partial \ln \frac{\beta}{\gamma}}{\partial u} + 2a + c^2\sqrt{\gamma\beta^2}}{\frac{c^2}{3}\,\frac{\partial \ln \frac{\gamma}{\beta}}{\partial v} + 2c^2b + \sqrt[3]{\beta\gamma^2}}.$$

Уравнение прямой, проходящей через соответствующие фокусы, имеет вид

$$y = \frac{2c^2\sqrt[3]{\gamma\beta^2}}{[\ \ ]+2c\left(a\sqrt[3]{\beta\gamma^2}+cb\sqrt[3]{\gamma\beta^2}\right)} -$$

$$-c^2\,\frac{\frac{1}{3}\,\frac{\partial \ln \frac{\beta}{\gamma}}{\partial u} + 2a + c^2\sqrt[3]{\gamma\beta^2}}{c^2\left(\frac{1}{3}\,\frac{\partial \ln \frac{\gamma}{\beta}}{\partial v} + 2b\right) + \sqrt[3]{\beta\gamma^2}}\left(X - \frac{2c\sqrt[3]{\beta\gamma^2}}{[\ \ ]+2c\left(a\sqrt{\beta\gamma^2}+cb\sqrt[3]{\gamma\beta^3}\right)}\right).$$

Для точки пересечения этой прямой с осью ординат $x=0$ имеем

$$y_1=\frac{2c^2}{c^2\left(\frac{1}{3}\frac{\partial\ln\frac{\gamma}{\beta}}{\partial v}+2b\right)+\sqrt[3]{\beta\gamma^2}}\quad\text{аналогично}\quad x_1=\frac{2}{\frac{1}{3}\frac{\partial\ln\frac{\beta}{\gamma}}{\partial u}+2a+c^2\sqrt[3]{\gamma\beta^2}}.$$

Уравнение прямой, проходящей через найденные точки, имеет вид

$$\frac{x}{x_1}+\frac{y}{y_1}-1=0. \tag{6}$$

Найдем направляющие параметры l, m прямой, полярно сопряженной с (6) относительно пучка поверхностей Дарбу. Так как для (l, m) сопряженная прямая имеет уравнение $mx+ly-1=0$, то $m=\frac{1}{x_1}$, $l=\frac{1}{y_1}$, или

$$l=\frac{1}{6}\frac{\partial\ln\frac{\gamma}{\beta}}{\partial v}+b+\frac{1}{2c^2}\sqrt[3]{\beta\gamma^2},\quad m=\frac{1}{6}\frac{\partial\ln\frac{\beta}{\gamma}}{\partial u}+a+\frac{c^2}{2}\sqrt[3]{\gamma\beta^2}. \tag{7}$$

Меняя c, получим конус второго порядка (*). Прямая, полярно сопряженная касательной плоскости относительно этого конуса, есть ось Чеха.

Симметрия описанной конструкции относительно пары асимптотически также усматривается из гармонического разделения пары прямых c и $-c$ и пары асимптотических касательных.

Сравнивая формулы (a) и (7), отметим, между прочим, следующее предложение: линия пересечения соприкасающихся плоскостей двух сопряженных кривых с угловыми коэфициентами $\pm c\sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}}$ полярно сопряжена относительно пучка поверхностей Дарбу с прямой, проходящей через вторые фокусы касательных к линиям с угловыми коэфициентами $\pm ic\sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}}$ $(i=\sqrt{-1})$.

§ 3. Как было указано выше, каждой форме $\psi(\gamma\beta^2\,du^3,\ \beta\gamma^2\,dv^3)$ отвечает некоторая прямая канонической связки. Возьмем две формы ψ_1 и ψ_2, отвечающие двум каким-либо прямым канонической связки,

$$\psi_1(\gamma\beta^2\,du^3,\ \beta\gamma^2\,dv^3)=(\gamma\beta^2)^n\psi_1\left(1,\ \frac{\gamma}{\beta}\,v'^3\right)du^{3n}=(\gamma\beta^2)^nR_1\left(\frac{\gamma}{\beta}\,v'^3\right)du^{3n},$$

$$\psi_2=(\gamma\beta^2)^mR_2du^{3m}.$$

Составим самое общее выражение из ψ_1 и ψ_2:

$$\psi=\varphi(\psi_1,\ \psi_2),$$

где φ — функция двух аргументов, произвольная с точностью до ограничений, которые мы сейчас получим. Именно, функция φ, являясь диференциальной формой, должна допускать вынесение du в некоторой степени $3q$, т. е.

$$\varphi[(\gamma\beta^2)^nR_1du^{3n},\ (\gamma\beta^2)^mR_2du^{3m}]=\varphi[(\gamma\beta^2)^nR_1\,(\gamma\beta^2)^mR_2]\,du^{3q}.$$

Следовательно, φ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\varphi[xt^{3n}, \quad yt^{3m}]=\varphi(x, y)\,t^{3q}, \tag{8}$$

где

$$x=(\gamma\beta^2)^n R_1, \quad y=(\gamma\beta^2)^m R_2, \quad t=du.$$

Продиференцируем (8) по t, положив в обеих частях после диференцирования $t=1$

$$3n\varphi_x x+3m\varphi_y y=3q\varphi, \quad \text{или} \quad nx\varphi_x+my\varphi_y=q\varphi.$$

Мы получили диференциальное уравнение в частных производных первого порядка. Его общий интеграл удовлетворяет уравнению

$$S\left(\frac{y^n}{x^m}, \quad \frac{\varphi^n}{x^q}\right)=0, \quad \text{откуда} \quad \varphi^n=x^q Q\left(\frac{y^n}{x^m}\right),$$

или

$$\varphi=x^{\frac{q}{n}}\,0\left(\frac{y^n}{x^m}\right)=(\gamma\beta^2)^q R_1^{\frac{q}{n}}\,0\left(\frac{R_2^n}{R_1^m}\right);$$

здесь S, Q, 0 — произвольные функции. В дальнейшем все произвольные функции мы будем обозначать одной буквой. Таким образом,

$$\varphi=(\gamma\beta^2)^q\left(R_1^{\frac{1}{3n}}\right)^{3q} 0\left[\frac{\left(R_2^{\frac{1}{3m}}\right)^{3mn}}{\left(R_1^{\frac{1}{3n}}\right)^{3mn}}\right]=(\gamma\beta^2)^q P_1^{3q}\,0\left(\frac{P_2}{P_1}\right).$$

Отсюда

$$\varphi^{\frac{1}{3q}}=\beta\sqrt[3]{\frac{\gamma}{\beta}}\,P_1\,0\left(\frac{P_2}{P_1}\right), \quad \text{следовательно,} \quad P=P_1\Phi\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \quad (0=\Phi).$$

Диференцируем последнее равенство по аргументу $\frac{\gamma}{\beta}v'^2$, который входит в P_1 и P_2,

$$P'=P_1'\Phi+P_1\Phi'\,\frac{P_2'P_1-P_1'P_2}{P_1^2},$$

$$P''=P_1''\Phi+P_1\Phi''\left(\frac{P_2'P_1-P_1'P_2}{P_1^2}\right)^2+\Phi'\,\frac{P_2''P_1-P_1''P_2}{P_1}.$$

Пользуясь принятыми обозначениями для $P(1)$, $P'(1)$, $P''(1)$ (стр. 104) и полагая $\Phi\left(\frac{a_2}{a_1}\right)=A$, $\Phi'=B$, $\Phi''=C$, получим

$$a=a_1A, \quad b=b_1A+B\,\frac{b_2a_1-a_2b_1}{a_1},$$

$$c=c_1A+B\,\frac{c_2a_1-a_2c_1}{a_1}+a_1C\left(\frac{b_2a_1-a_2b_1}{a_1^2}\right)^2. \tag{9}$$

Числа a, b, c можно рассматривать как проективные координаты прямой канонической связки (см. связь между λ, μ и a, b, c в статье [2], стр. 157). Следовательно, уравнение плоскости, проходящей через прямые (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2), имеет вид

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0, \quad \text{или} \quad a(b_1c_2-b_2c_1)-b(a_1c_2-c_1a_2)+c(a_1b_2-a_2b_1)=0.$$

Потребуем, чтобы прямая (9) лежала в плоскости этого пучка. Подставляя (9) в последнее уравнение, после очевидных сокращений получим

$$b_2 a_1 = a_2 b_1. \tag{10}$$

Следовательно, прямая, отвечающая произвольной функции от форм двух прямых, лежит в плоскости этих прямых тогда и только тогда, когда выполняется равенство (10). Положим $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = k$ (const). Тогда из (9) заключаем, что $\frac{a}{b} = k$. Таким образом, k вполне характеризует плоскость. Меняя k, получим семейство плоскостей. Не трудно видеть, что все эти плоскости $(a = bk)$ образуют пучок с осью на прямой $a = b = 0$. Но

$$\lambda = \frac{b+3c}{3(3c+2b)}, \quad \mu = \frac{3b+3c-\frac{1}{3}a}{3(3c+2b)}$$

([2], стр. 157). При $a = b = 0$ получим $\lambda = \mu = \frac{1}{3}$, т. е. ось Чеха ([1], стр. 107).

§ 4. Соприкасающиеся плоскости трех линий Дарбу пересекаются по трем прямым p_1, p_2, p_3. Эти прямые пересекают какую-нибудь поверхность Дарбу в трех точках Q_1, Q_2, Q_3. Покажем, что плоскость, проходящая через точки Q_1, Q_2, Q_3, пересекает касательную плоскость поверхности по второй оси Чеха (прямая, соответствующая первой оси Чеха в полярном соответствии относительно пучка поверхностей Дарбу).

Действительно, соприкасающиеся плоскости трех линий Дарбу $\left(\frac{dv}{du} = -\varepsilon \sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}},\ \varepsilon = \sqrt[3]{1}\right)$ определяются уравнениями:

$$a)\ 2\varepsilon^2 m^2 L - 2\varepsilon m M + \left(2\beta + 2a\varepsilon m - 2b\varepsilon^2 m^2 + \varepsilon m \frac{\partial \ln m}{\partial u} + \varepsilon^2 m^2 \frac{\partial \ln m}{\partial v}\right) = 0,$$

$$b)\ 2\varepsilon m^2 L - 2\varepsilon^2 m M + \left(2\beta + 2a\varepsilon^2 m - 2b\varepsilon m^2 + \varepsilon^2 m \frac{\partial \ln m}{\partial u} + \varepsilon m^2 \frac{\partial \ln m}{\partial v}\right) = 0,$$

$$c)\ 2m^2 L - 2mM + \left(2\beta + 2am - 2bm^2 + m \frac{\partial \ln m}{\partial u} + m^2 \frac{\partial \ln m}{\partial v}\right) = 0.$$

Здесь $L = \frac{x}{z}$, $M = \frac{y}{z}$, $m = -\sqrt[3]{\frac{\beta}{\gamma}}$, $\varepsilon = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Линии пересечения этих плоскостей имеют направляющие параметры:

$$\begin{aligned}
&(a, b): \quad L_0 = \frac{1}{2m^2}\left(2\beta + 2bm^2 - m^2 \frac{\partial \ln m}{\partial v}\right), \quad M_0 = \frac{1}{2}\left(2\gamma m^2 + 2a + \frac{\partial \ln m}{\partial u}\right),\\
&(a, c): \quad L_1 = \frac{1}{2m^2}\left(2\beta\varepsilon^2 + 2bm^2 - m^2 \frac{\partial \ln m}{\partial v}\right), \quad M_1 = \frac{1}{2}\left(2\gamma\varepsilon m^2 + 2a + \frac{\partial \ln m}{\partial u}\right), \qquad (11)\\
&(b, c): \quad L_2 = \frac{1}{2m^2}\left(2\beta\varepsilon + 2bm^2 - m^2 \frac{\partial \ln m}{\partial v}\right), \quad M_2 = \frac{1}{2}\left(2\gamma\varepsilon^2 m^2 + 2a + \frac{\partial \ln m}{\partial u}\right).
\end{aligned}$$

Выбором нормального тетраэдра можно привести уравнение исследуемой поверхности Дарбу к виду $xy - z = 0$. Для координат точек наших прямых справедливы равенства: $x = L_i z$, $y = M_i z$ $(i = 0, 1, 2)$. Подставляя эти координаты в уравнение поверхности Дарбу и сокращая на z, получим:

$$Z_i = \frac{1}{L_i M_i}, \quad X_i = \frac{1}{M_i}, \quad Y_i = \frac{1}{L_i} \qquad (i=0, 1, 2).$$

Это — координаты точек Q_1, Q_2, Q_3. Линия пересечения плоскости $(Q_1 Q_2 Q_3)$ с касательной плоскостью поверхности имеет уравнение

$$Px - Qy - R = 0, \tag{12}$$

где

$$P = L_0 M_0 (M_1 - M_2) + L_1 M_1 (M_2 - M_0) + L_2 M_2 (M_0 - M_1) =$$
$$= \gamma m^2 \varepsilon (1-\varepsilon) L_0 M_0 + \gamma m^2 (\varepsilon^2 - 1) L_1 M_1 + \gamma m^2 (1-\varepsilon) L_2 M_2 =$$
$$= \gamma m^2 (1-\varepsilon)(\varepsilon L_0 M_0 + \varepsilon^2 L_1 M_1 + L_2 M_2) = \frac{3}{2}\varepsilon(1-\varepsilon)\beta\gamma\left(2a + \frac{\partial \ln m}{\partial u}\right)$$

(здесь учтено равенство $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$).

Аналогично получим

$$Q = L_0 M_0 (L_1 - L_2) + L_1 M_1 (L_2 - L_0) + L_2 M_2 (L_0 - L_1) =$$
$$= -\frac{3}{2}\varepsilon(1-\varepsilon)\beta\gamma\left(2b - \frac{\partial \ln m}{\partial v}\right),$$

$$R = L_0 (M_1 - M_2) + L_1 (M_2 - M_0) + L_2 (M_0 - M_1) =$$
$$= \gamma m^2 (1-\varepsilon)(\varepsilon L_0 + \varepsilon^2 L_1 + L_2) = 3\varepsilon(1-\varepsilon)\beta\gamma.$$

После подстановки этих значений в уравнение (12) и сокращений получим

$$\left(a + \frac{1}{6}\frac{\partial \ln \frac{\beta}{\gamma}}{\partial u}\right)x + \left(b + \frac{1}{6}\frac{\partial \ln \frac{\gamma}{\beta}}{\partial v}\right)y - 1 = 0.$$

Но это — вторая ось Чеха.

Нормаль Фубини

§ 5. Конструкция Грина каждой прямой с направляющими параметрами l, m ставит в соответствие прямую P_1P_2, расположенную в касательной плоскости

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\partial \ln \beta}{\partial u} + 4a - m\right)X + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \ln \gamma}{\partial v} + 4b - l\right)Y - 1 = 0 \tag{13}$$

([1], стр. 98).

Очевидна симметрия конструкции Грина относительно пары асимптотических линий. Потребуем, чтобы прямая P_1P_2 совпадала с прямой (6) § 2. Сравнивая уравнения (13) и (6) § 2, найдем

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\partial \ln \beta}{\partial u} + 4a - m\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\frac{\partial \ln \frac{\beta}{\gamma}}{\partial u} + 2a + c^2\sqrt[3]{\gamma\beta^2}\right).$$

Отсюда

$$m=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ln \beta\gamma}{\partial u}+2a\right)-\frac{3}{2}c^{2}\sqrt[3]{\gamma\beta^{2}}.$$

Аналогично

$$l=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ln \beta\gamma}{\partial v}+2b\right)-\frac{3}{2c^{2}}\sqrt[3]{\beta\gamma^{2}}.$$

Геометрическое место этих прямых есть некоторый конус второго порядка, уравнение которого получим, исключая c из двух уравнений,

$$\left[\frac{x}{z}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ln \beta\gamma}{\partial v}+2b\right)\right]\left[\frac{y}{z}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ln \beta\gamma}{\partial u}+2a\right)\right]=\frac{9}{4}\beta\gamma.$$

Прямая, полярно сопряженная касательной плоскости относительно этого конуса, имеет направляющие параметры

$$L=\frac{1}{2}\,\frac{\partial \ln \beta\gamma}{\partial v}+b,\quad M=\frac{1}{2}\,\frac{\partial \ln \beta\gamma}{\partial u}+a.$$

Но это — нормаль Фубини.

Ребро Грина

§ 6. Следующий пример строится путем видоизменения классической конструкции Грина. Как известно, на касательной плоскости получается в этой конструкции пучок кривых второго порядка, соприкасающийся с проекцией асимптотической u

$$3\beta x^{2}+2\left[\frac{\partial \ln \beta}{\partial u}+4a-M\right]xy-6y+ry^{2}=0$$

(см. § 10 настоящей статьи).

Здесь M — направляющий параметр прямой, из точек которой проектируется асимптотическая u. Полярой точки (x, y) относительно этого пучка является прямая

$$\left[3\beta x+\left(\frac{\partial \ln \beta}{\partial u}+4a-M\right)y\right]X+\left[\left(\frac{\partial \ln \beta}{\partial u}+4a-M\right)x+ry-3\right]Y-3y=0. \quad (14)$$

Пусть $Y=mX$ — уравнение произвольной прямой касательной плоскости, проходящей через начало координат. Сравнивая это уравнение с уравнением (14), получим

$$y=0,\quad x=\frac{3m}{3\beta+\left(\frac{\partial \ln \beta}{\partial u}+4a-M\right)m}.$$

Аналогично находим второй полюс для той же прямой $Y=mX$, или $X=\frac{1}{m}Y$ относительно второго пучка, соприкасающегося с проекцией асимптотической v. Прямая, проходящая через эти полюсы, имеет уравнение

$$\frac{1}{3m}\left[3\beta+m\left(\frac{\partial \ln \beta}{\partial u}+4a-M\right)\right]X+\frac{m}{3}\left[3\gamma+\frac{1}{m}\left(\frac{\partial \ln \gamma}{\partial v}+4b-L\right)\right]Y-1=0. \quad (15)$$

Потребуем, чтобы эта прямая совпадала с прямой, полярно сопряженной прямой L, M относительно пучка поверхностей Дарбу, т. е. с прямой

$$MX + LY - 1 = 0. \tag{16}$$

Сравнивая уравнения (15) и (16), находим

$$M = \frac{1}{3m}\left[\left(\frac{\partial \ln \beta}{\partial u} + 4a - M\right) m + 3\beta\right],$$

откуда

$$M = \frac{3\beta}{4m} + \frac{1}{4}\left(4a + \frac{\partial \ln \beta}{\partial u}\right).$$

Аналогично

$$L = \frac{3\gamma}{4} m + \frac{1}{4}\left(4b + \frac{\partial \ln \gamma}{\partial v}\right).$$

Исключая m, получим конус второго порядка

$$\left(\frac{x}{z} - b - \frac{1}{4}\frac{\partial \ln \gamma}{\partial v}\right)\left(\frac{y}{z} - a - \frac{1}{4}\frac{\partial \ln \beta}{\partial u}\right) = \frac{9\beta\gamma}{16}. \tag{17}$$

Не трудно видеть, что касательной плоскости поверхности в полярном соответствии относительно этого конуса соответствует прямая

$$L = b + \frac{1}{4}\frac{\partial \ln \gamma}{\partial v}, \quad M = a + \frac{1}{4}\frac{\partial \ln \beta}{\partial u},$$

т. е. ребро Грина. Симметрия описанной конструкции относительно пары асимптотических очевидна.

§ 7. Касательная к асимптотической u, пересекаясь с плоскостью касательной к поверхности в точке M, вычерчивает на этой плоскости некоторую плоскую кривую. Найдем пучок кривых второго порядка, имеющих с этой кривой касание третьего порядка.

Касательная к асимптотической u в точке M^* определяется парой точек M^* и M^*_{du}, где

$$M^* = M + M_u du + \frac{1}{2} M_{uu} du^2 + \frac{1}{3!} M_{uuu} du^3 + \frac{1}{4!} M_{uuuu} du^4 + \frac{1}{5!} M_{uuuuu} du^5 + \ldots$$

$$M^*_{du} = M_u + M_{uu} du + \frac{1}{2} M_{uuu} du^2 + \frac{1}{3!} M_{uuuu} du^3 + \frac{1}{4!} M_{uuuuu} du^4 + \ldots$$

Произвольная точка этой касательной имеет координаты $M^* + \lambda M^*_{du}$. Если такая точка лежит на касательной плоскости, то ее координата при M_3 должна равняться нулю. Находя значения производных M_u, M_{uu} и т. д. по формулам (16) ([1], стр. 78) и приравнивая нулю коэфициент при M_3 в разложении $M^* + \lambda M^*_{du}$, мы получим

$$\frac{\beta}{3!} du^3 + \frac{2\beta_u}{4!} du^4 + \ldots + \lambda\left(\frac{\beta}{2} du^2 + \frac{2\beta_u}{3!} du^3 + \ldots\right) = 0,$$

или, после сокращения на $\frac{\beta}{2} du^2$,

$$\frac{du}{3} + \frac{1}{6}\frac{\partial \ln \beta}{\partial u} du^2 + \ldots + \lambda\left(1 + \frac{2}{3}\frac{\partial \ln \beta}{\partial u} du + \ldots\right) = 0.$$

Отсюда, воспользовавшись тождеством $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\dots$, найдем

$$\lambda=-\left(\frac{du}{3}+\frac{1}{6}\frac{\partial \ln \beta}{\partial u}du^2+\dots\right)\left(1-\frac{2}{3}\frac{\partial \ln \beta}{\partial u}du+\dots\right),$$

или

$$\lambda=-\frac{1}{3}du+\frac{1}{18}\frac{\partial \ln \beta}{\partial u}du^2+\dots$$

Следовательно,

$$N=M+M_u du+\frac{1}{2}M_{uu}du^2+\frac{1}{3!}M_{uuu}du^3+\dots+$$

$$+\left(-\frac{1}{3}du+\frac{1}{18}\frac{\partial \ln \beta}{\partial u}du^2+\dots\right)\left(M_u+M_{uu}du+\frac{1}{2}M_{uuu}du^2+\dots\right),$$

или

$$N=M+\frac{2}{3}M_u du+\frac{1}{6}\left(M_{uu}+\frac{1}{3}\frac{\partial \ln \beta}{\partial u}M_u\right)du^2+$$

$$+\frac{1}{18}\left(\frac{\partial \ln \beta}{\partial u}M_{uu}+SM_u\right)du^3+\dots$$

(S — некоторое выражение).

Подставляя в уравнение кривой второго порядка $PP=0$ и приравнивая нулю свободный член и коэфициенты при du, du^2, du^3, найдем:

$$MM=0,\quad MM_1=0,\quad \frac{4}{9}M_1M_1+\frac{1}{3}\beta MM_2=0,$$

$$\left(\frac{\partial \ln \beta}{\partial u}+4a\right)MM_2+4M_1M_2=0.$$

Если в качестве координатного тетраэдра взять подвижной нормальный тетраэдр, то последние уравнения приведут к уравнениям, связывающим коэфициенты уравнения пучка кривых второго порядка

$$(c_{11}x^2+2c_{12}xy+c_{22}y^2+2c_{01}x-2y+c_{00}=0):$$

$$c_{00}=0,\quad c_{01}=0,\quad c_{11}=\frac{3}{4}\beta,\quad c_{12}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial \ln \beta}{\partial u}+4a\right).$$

Пучок кривых второго порядка будет иметь уравнение

$$3\beta x^2+2\left(\frac{\partial \ln \beta}{\partial u}+4a\right)+c_{22}y^2-8y=0.$$

Полюс асимптотической oy относительно этого пучка имеет координаты

$$\bar{x}=\frac{4}{\frac{\partial \ln \beta}{\partial u}+4a},\quad \bar{y}=0.$$

Симметричные построения (симметрия берется относительно пары асимптотических) приведут нас ко второму полюсу

$$\bar{x}_1=0, \quad \bar{y}_1=\frac{4}{\frac{\partial \ln \gamma}{\partial v}+4b}.$$

Прямая, проходящая через эти полюсы, имеет уравнение

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial \ln \beta}{\partial u}+4a\right)x+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial \ln \gamma}{\partial v}+4b\right)y-1=0.$$

Но это — второе ребро Грина. Естественно, приходим к первому ребру Грина, беря прямую, полярно сопряженную со вторым ребром относительно пучка поверхностей Дарбу.

§ 8. Касательная к асимптотической v при движении вдоль асимптотической u вычерчивает на касательной плоскости некоторую плоскую кривую. Аналогично предыдущему находим пучок кривых 2-го порядка, имеющих с этой плоской кривой касание 3-го порядка.

Касательная к асимптотической v определяется парой точек M^* и M_2^*. Произвольная точка этой касательной имеет координаты $N=M^*+$ $+\lambda M_2^*$. Разлагая M^* и M_2^* по степеням du с помощью формул (16) ([1], стр. 78) и приравнивая нулю коэфициент при M_3, получим

$$\frac{du^3}{3!}\beta+\frac{du^4}{4!}2\beta_u+\ldots+\lambda(du+\ldots)=0,$$

или

$$\frac{du^2}{3!}\beta+\frac{du^3}{4!}2\beta_u+\ldots+\lambda(1+\ldots)=0.$$

Отсюда

$$\lambda=-\left(\frac{du^2}{3!}\beta+\frac{du^3}{4!}2\beta_u+\ldots\right).$$

Следовательно, координаты точки пересечения асимптотической касательной с касательной плоскостью равны

$$N=M^*+\lambda M_2^*=\left(M+M_u du+\frac{1}{2}M_{uu}du^2+\ldots\right)-$$

$$-\left(\frac{du^2}{3!}\beta+\frac{du^3}{4!}2\beta_u+\ldots\right)(M_2+M_{2u}du+\ldots)=M+M_u du+$$

$$+\left(\frac{1}{2}M_{uu}-\frac{\beta}{3!}M_2\right)du^2+\left(\frac{1}{3!}M_{uuu}-\frac{\beta}{3!}M_{2u}-\frac{M_2 2\beta_u}{4!}\right)du^3+\ldots$$

Подставляя N в уравнение кривой $PP=0$ и приравнивая нулю свободный член и коэфициенты при du, du^2, du^3, найдем:

$$MM=0, \quad MM_u=0, \quad M_uM_u+2M\left(\frac{1}{2}M_{uu}-\frac{\beta}{3!}M_2\right)=0,$$

$$M\left(\frac{1}{3!}M_{uuu}-\frac{\beta}{3!}M_{2u}-\frac{2\beta_u M_2}{4!}\right)+M_u\left(\frac{1}{2}M_{uu}-\frac{\beta}{3!}M_2\right)=0.$$

или

$$MM=0, \quad MM_1=0, \quad M_1M_1+\frac{2}{3}\beta MM_2=0,$$

$$\left(\frac{\partial \ln \beta}{\partial u}+4a\right)MM_2+4M_1M_2=0.$$

Уравнение пучка кривых второго порядка имеет вид

$$\frac{2}{3}\beta x^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \ln \beta}{\partial u}+4a\right)xy+c_{22}y^2-2y=0.$$

Находя далее полюсы, как и в предыдущем параграфе, снова придем ко второму ребру Грина.

§ 9. Не лишено интереса следующее построение второго ребра Грина. Возьмем какую-нибудь поверхность Дарбу, например, поверхность Ли (результат не будет зависеть от выбора поверхности Дарбу):

$$xy-z=0.$$

Уравнение полярной плоскости точки $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ относительно этой поверхности имеет вид

$$\bar{y}X+\bar{x}Y-Z-\bar{z}=0.$$

Линия пересечения этой плоскости с касательной плоскостью поверхности имеет уравнение

$$\bar{y}X+\bar{x}Y-\bar{z}=0.$$

Найдем однопараметрическое семейство этих прямых, соответствующее асимптотической u. Мы имеем

$$\bar{x}_0, \ \bar{x}_1=du+p\,du^3+\ldots, \quad \bar{x}_2=\frac{\beta}{2}du^2+\frac{\beta_u+a\beta}{3!}du^3+\ldots,$$

$$\bar{x}_3=\frac{\beta}{3!}du^3+\frac{2\beta_u}{4!}du^4+\ldots$$

(p — некоторый коэфициент).

Но $\bar{x}=\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_0}$, $\bar{y}=\frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_0}$, $\bar{z}=\frac{\bar{x}_3}{\bar{x}_0}$. Подставляя в уравнение прямой и сокращая на $\frac{du}{x_0}$, получим искомое семейство

$$\left(\frac{\beta}{2}du+\frac{\beta_u+a\beta}{3!}du^3+\ldots\right)X+(1+p\,du^2+\ldots)\,Y-$$

$$-\left(\frac{\beta}{3!}du^2+\frac{\beta_u}{2\cdot 3!}du^3+\ldots\right)=0. \tag{18}$$

Продиференцируем это уравнение по du:

$$\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\beta_u+a\beta}{3}du^2+\ldots\right)X+(3p\,du^2+\ldots)\,Y-$$

$$-\left(\frac{\beta}{3}du+\frac{\beta_u}{4}du^2+\ldots\right)=0. \tag{19}$$

Решая относительно X и Y уравнения (18) и (19), получим параметрические уравнения огибающей:

$$X=\frac{2}{3}\,du+\frac{1}{18}\left(\frac{\partial\ln\beta}{\partial u}-8a\right)du^2+\ldots$$

$$Y=-\frac{\beta}{6}\,du^2\left|1+\frac{1}{3}\left(\frac{\partial\ln\beta}{\partial u}-2a\right)du+\ldots\right|.$$

Подставляя эти функции в левую часть уравнения кривой 2-го порядка

$$\varphi=c_{11}x^2+2c_{12}xy+c_{22}y^2+2c_{13}x+2c_{23}y+c_{33},$$

продиференцируем полученное выражение три раза по du. Коэфициенты уравнения найдем из равенств:

$$\varphi_{du=0}=\varphi'_{du=0}=\varphi''_{du=0}=\varphi'''_{du=0}=0.$$

Мы будем иметь:

$$c_{33}=0,\quad c_{13}=0,\quad c_{11}=-\frac{3}{4}\,\beta,\quad c_{12}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\ln\beta}{\partial u}+4a\right).$$

Повторяя дословно все рассуждения, касающиеся полюсов P_1 и P_2, получим снова второе ребро Грина.

Новая каноническая прямая

§ 10. Классическая конструкция Грина связывает с каждой прямой, проходящей через точку поверхности и не лежащей в касательной плоскости, некоторую прямую P_1P_2, лежащую в касательной плоскости и не проходящую через данную точку поверхности. Делается это следующим образом.

Возьмем какую-нибудь точку $Q=\nu M+lM_1+mM_2+M_3$. Очевидно, что эта точка при любом ν лежит на прямой с направляющими параметрами l, m. При изменении ν положение точки на этой прямой изменяется. Пусть M^* — некоторая точка, лежащая на асимптотической u. Произвольная точка N прямой QM^* суть $\lambda Q+M^*$, где λ — параметр. Приравняв коэфициент при M_3 в разложении $\lambda Q+M^*$ нулю, найдем λ для точки пересечения прямой QM^* с касательной плоскостью поверхности в точке M:

$$\lambda=-\left(\frac{du^3}{3!}\,\beta+\frac{2du^4}{4!}\,\beta_u+\ldots\right).$$

Следовательно,

$$N=-(\nu M+lM_1+mM_2+M_3)\left(\frac{du^3}{3!}\,\beta+\frac{2du^4}{4!}\,\beta_u+\ldots\right)+$$

$$+M+M_u du+\frac{1}{2}\,M_{uu}du^2+\frac{1}{3!}\,M_{uuu}du^3+\ldots,$$

или

$$N=M+M_u du+\frac{1}{2}\,M_{uu}du^2+\left[\frac{1}{3!}\,M_{uuu}-\beta\,\frac{1}{3!}\,(\nu M+lM_1+mM_2+M_3)\right]du^3+\ldots$$

Подставляя в общее уравнение кривой второго порядка $PP=0$ и приравнивая нулю свободный член и коэфициенты при du, du^2, du^3, найдем пучок кривых второго порядка, имеющих с полученной плоской кривой касание третьего порядка. Имеем последовательно:

$$MM=0, \quad MM_u=0, \quad M_uM_u+MM_{uu}=0, \quad M_uM_{uu}+$$
$$+2M\left|\frac{1}{3!}M_{uuu}-\frac{\beta}{3!}(\nu M+lM_1+mM_2+M_3)\right|=0,$$

или

$$MM=0, \quad MM_1=0, \quad M_1M_1+\beta MM_2=0, \quad a\beta MM_2+\beta M_1M_2+$$
$$+\frac{1}{3}(\beta_u+a\beta-\beta m)MM_2=0,$$

или

$$MM=0, \quad MM_1=0, \quad M_1M_1+\beta MM_2=0,$$
$$3M_1M_2+\left(\frac{\partial\ln\beta}{\partial u}+4a-m\right)MM_2=0.$$

Беря в качестве координатного тетраэдра подвижной нормальный тетраэдр, получим условия, связывающие коэфициенты уравнения кривой 2-го порядка:

$$c_{00}=0, \quad c_{01}=0, \quad c_{11}+\beta c_{02}=0, \quad 3c_{12}+\left(\frac{\partial\ln\beta}{\partial u}+4a-m\right)c_{02}=0.$$

Искомое уравнение будет иметь вид

$$\beta x^2+\frac{2}{3}\left(\frac{\partial\ln\beta}{\partial u}+4a-m\right)xy+c_{22}y^2-2y=0.$$

Полюс P_1 оси OY (асимптотической касательной) относительно этого пучка имеет координаты:

$$\bar{x}_1=\frac{3}{\dfrac{\partial\ln\beta}{\partial u}+4a-m}, \quad \bar{y}_1=0.$$

Аналогично получим второй полюс P_2:

$$\bar{x}_2=0, \quad \bar{y}_2=\frac{3}{\dfrac{\partial\ln\gamma}{\partial v}+4b-l}.$$

Прямая P_1P_2, проходящая через эти полюсы, имеет уравнение

$$\left(\frac{\partial\ln\beta}{\partial u}+4a-m\right)X+\left(\frac{\partial\ln\gamma}{\partial v}+4b-l\right)Y-3=0. \qquad (13')$$

Итак, каждой прямой с направляющими параметрами l, m классическая конструкция Грина относит прямую (13′) касательной плоскости. Легко видеть, что это соответствие является полярным соответствием относительно пучка поверхностей второго порядка

$$\nu z^2+xy-\left(4a+\frac{\partial\ln\beta}{\partial u}\right)xz-\left(4b+\frac{\partial\ln\gamma}{\partial v}\right)yz+3z=0$$

(ν — параметр пучка)

или

$$\nu z^2 + xy - pxz - qyz + 3z = 0, \tag{20}$$

где

$$p = 4a + \frac{\partial \ln \beta}{\partial u}, \quad q = 4b + \frac{\partial \ln \gamma}{\partial v}.$$

Найдем точки пересечения какой-нибудь поверхности из пучка (20) с тремя прямыми — линиями пересечения трех плоскостей, соприкасающихся с линиями Дарбу. Для этого в уравнение (20) вместо x и y подставляем значения $x = L_i z$, $y = M_i z$, где L_i и M_i определяются формулами (11) (см. § 4). После сокращения на z получим:

$$z_i = \frac{-3}{\nu + L_i M_i - pL_i - qM_i} = \frac{3}{d_i}, \quad (-d_i = \nu + L_i M_i - pL_i - qM_i)$$

$$x_i = \frac{3L_i}{d_i}, \quad y_i = \frac{3M_i}{d_i}.$$

Плоскость, проходящая через три найденные точки, имеет уравнение

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Линия пересечения этой плоскости с касательной плоскостью поверхности имеет уравнение

$$x \begin{vmatrix} y_0 & z_0 & 1 \\ y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$Ax - By - C = 0, \tag{21}$$

где

$$A = \begin{vmatrix} y_0 & z_0 & 1 \\ y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3M_0}{d_0} & \frac{3}{d_0} & 1 \\ \frac{3M_1}{d_1} & \frac{3}{d_1} & 1 \\ \frac{3M_2}{d_2} & \frac{3}{d_2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{9}{d_0 d_1 d_2} \begin{vmatrix} M_0 & 1 & d_0 \\ M_1 & 1 & d_1 \\ M_2 & 1 & d_2 \end{vmatrix},$$

$$B = \frac{9}{d_0 d_1 d_2} \begin{vmatrix} L_0 & 1 & d_0 \\ L_1 & 1 & d_1 \\ L_2 & 1 & d_2 \end{vmatrix}, \quad C = \frac{27}{d_0 d_1 d_2} \begin{vmatrix} L_0 & M_0 & 1 \\ L_1 & M_1 & 1 \\ L_2 & M_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Подставляя A, B, C в уравнение прямой (21) и сокращая, получим

$$Px - Qy - 3R = 0, \tag{21'}$$

где

$$P=d_0(M_1-M_2)+d_1(M_2-M_0)+d_2(M_0-M_1)=\gamma m^2(1-\varepsilon)(\varepsilon d_0+\varepsilon^2 d_1+d_2)=$$

$$=\gamma(1-\varepsilon)\frac{3\beta}{2}\varepsilon\left(6a+\frac{1}{3}\frac{\partial\ln\beta^5\gamma}{\partial u}\right),$$

$$Q=d_0(L_1-L_2)+d_1(L_2-L_0)+d_2(L_0-L_1)=\frac{\beta}{m^2}(\varepsilon-1)(\varepsilon d_0+d_1+\varepsilon^2 d_2)=$$

$$=\beta(\varepsilon-1)\varepsilon\frac{3}{2}\gamma\left(6b+\frac{1}{3}\frac{\partial\ln\gamma^5\beta}{\partial v}\right),$$

$$R=L_0(M_1-M_2)+L_1(M_2-M_0)+L_2(M_0-M_1)=$$

$$=\gamma m^2(1-\varepsilon)(\varepsilon L_0+\varepsilon^2 L_1+L_2)=3\varepsilon(1-\varepsilon)\beta\gamma.$$

Уравнение (21′) будет иметь, следовательно, вид

$$\frac{1}{2}\left(6a+\frac{1}{3}\frac{\partial\ln\beta^5\gamma}{\partial u}\right)X+\frac{1}{2}\left(6b+\frac{1}{3}\frac{\partial\ln\gamma^5\beta}{\partial v}\right)Y-3=0.$$

Заменяя a и b их значениями ([1], стр. 78), получим

$$\frac{1}{2}\left[\frac{b_2^u-b_2^v}{\gamma}+\frac{5}{9}\frac{\partial\ln\beta\gamma^2}{\partial u}\right]X+\frac{1}{2}\left[\frac{a_1^v-a_2^u}{\beta}+\frac{5}{9}\frac{\partial\ln\gamma\beta^2}{\partial v}\right]Y-1=0.$$

Но это прямая второго канонического пучка, соответствующая параметру $\lambda=\frac{5}{9}$ ([1], стр. 106). В полярном соответствии относительно пучка поверхностей Дарбу этой прямой соответствует прямая первого канонического пучка, соответствующая параметру $\lambda=\frac{5}{9}$. В полярном соответствии относительно пучка поверхностей (20) этой прямой соответствует ось Чеха.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Фиников, Проективно-диференциальная геометрия, 1937.
2. Н. И. Кованцов, О каноническом пучке, Математический сборник, 1950, т. 26, вып. 1, стр. 153—160.

Получена
23.X 1952 г.
Запорожье.