DOI: 10.37863/umzh.v73i10.6840

УДК 531.36:531.38:533.6.013.42

Ю. М. Кононов (Ін-т прикл. математики і механіки НАН України, Слов'янськ)

ПРО СТІЙКІСТЬ ПОЛОЖЕННЯ РІВНОВАГИ ТВЕРДОГО ТІЛА З БАГАТОШАРОВОЮ ІДЕАЛЬНОЮ РІДИНОЮ, РОЗДІЛЕНОЮ ПРУЖНИМИ ПЛАСТИНАМИ

L. N. Sretensky's problem and the problem of physical pendulum oscillations are generalized to the case of a multilayer ideal fluid separated by elastic plates. Assuming the positive definiteness of the potential energy (L. N. Sretensky's problem) and changed potential energy (the physical pendulum), we obtain the conditions of stability for the equilibrium state in these problems. A more detailed study is performed in the case of a cylindrical cavity of arbitrary cross-section. We show that for the stability of the equilibrium state in L. N. Sretensky's problem it is necessary and sufficient that there exists a stable equilibrium state of the elastic plates and liquid in the stationary rigid body and it is sufficient that a heavier liquid is located below a lighter one. For the stability of the equilibrium state in the problem of physical pendulum oscillations, it is also necessary that there is a stable equilibrium state of the elastic plates and liquid in the stationary rigid body. It is also shown that we can use pre-tensioning of plates to stabilize an unstable equilibrium position of the physical pendulum.

Узагальнено задачу Л. М. Сретенського і задачу про коливання фізичного маятника на випадок багатошарової ідеальної рідини, розділеної пружними пластинами. З додатної визначеності потенціальної енергії (задача Л. М. Сретенського) і зміненої потенціальної енергії (фізичний маятник) отримано умови стійкості положення рівноваги. Більш детальні дослідження проведено для циліндричної порожнини довільного поперечного перерізу. Показано, що в задачі Л. М. Сретенського для стійкості положення рівноваги необхідно і достатньо, щоб було стійке положення рівноваги пружних пластин і рідини в нерухомому твердому тілі, і достатньо, щоб більш важка рідина знаходилась нижче менш важкої. В задачі про коливання фізичного маятника для стійкості положення рівноваги також необхідно, щоб було стійке положення рівноваги пружних пластин і рідини в нерухомому твердому тілі. Показано, що за допомогою попереднього натягу пластин можливо стабілізувати нестійке положення рівноваги фізичного маятника.

1. Вступ. У 1951 р. Л. М. Сретенський [1] і М. М. Моїсеєв [2] розглянули задачу про плоскі коливання відкритого прямокутного твердого тіла з ідеальною рідиною під дією пружної сили. Згодом у більш загальній постановці аналогічну задачу розглянув М. М. Моїсеєв [3]. Ці роботи були, мабуть, першими публікаціями по динаміці тіла з рідиною за припущення, що рідина важка і має вільну поверхню. Незважаючи на простоту цієї задачі, її розв'язання дозволило з'ясувати ряд загальних властивостей, характерних для розглянутих рухів, зокрема структуру спектра частот [4]. При дослідженні частотного рівняння Л. М. Сретенський у статті [1] зробив висновок про можливість зростання коливань твердого тіла і рідини. М. М. Моїсеєв у роботі [2] показав помилковість цього твердження. У зв'язку з тим, що Л. М. Сретенський був першим, хто поставив і дослідив задачу про коливання відкритого твердого тіла з рідиною під дією пружної сили, в літературі цю задачу часто називають задачею Л. М. Сретенського [5]. Слід зазначити, що задачі про стійкість усталених рухів складної механічної системи зводяться до проблеми пошуку мінімуму функціонала зміненої потенціальної енергії системи [6]. Розв'язання задачі пошуку мінімуму для твердого тіла з рідиною було наведено раніше в роботах [5, 7]. У статті [5] було узагальнено задачу Л. М. Сретенського [1] і показано, що якщо потенціальна енергія системи з затверділою рідиною має мінімум у положенні рівноваги, то рівновага буде стійкою. Узагальнення задачі Л. М. Сретенського на випадок пружного дна наведено в роботі [8], а в роботах [9, 10] цю задачу узагальнено на випадок циліндричного резервуара з пружними верхньою і нижньою основами.

У роботах [4, 6] розглянуто задачу про плоскі коливання фізичного маятника, що містить ідеальну рідину з вільною поверхнею. Показано, що наявність рідини з вільною поверхнею зменшує запас стійкості і може призвести до нестійкості коливань фізичного маятника. Для стійкості маятника з рідиною необхідною і достатньою умовою є стійкість деякого маятника без рідини [6]. У статті [11] цю задачу узагальнено на випадок багатошарової ідеальної рідини. Показано, що стратифікація, яка виникає в однорідній рідині, призводить до зменшення запасу стійкості. У роботі [10] узагальнено задачу про коливання фізичного маятника з ідеальною рідиною на випадок циліндричного резервуара з пружними верхньою і нижньою основами.

У даній роботі узагальнено задачу Л. М. Сретенського і задачу про коливання фізичного маятника на випадок багатошарової ідеальної рідини, розділеної пружними пластинами. З додатної визначеності потенціальної енергії (задача Л. М. Сретенського) і зміненої потенціальної енергії (фізичний маятник) отримано умови стійкості положення рівноваги.

2. Задача Л. М. Сретенського у випадку багатошарової ідеальної рідини, розділеної пружними пластинами. Розглянемо тверде тіло з порожниною, що містить m ідеальних нестисливих рідин з густиною ρ_i і глибиною h_i, що заповнюють порожнину τ $\left(\tau = \bigcup_{i=1}^{m} \tau_i\right)$. Порожнина τ_i складається зі змочуваної поверхні Σ_i і поверхонь S_i і S_{i+1} $(\operatorname{mes}(S_{m+1}) = 0)$. На вільній поверхні верхньої рідини S_1 і на поверхнях розділу S_i, $i = \overline{2,m}$ (внутрішніх поверхнях), багатошарової рідини можуть перебувати пружні пластини або мембрани. Пластини і мембрани затиснуто по контуру γ_i області S_i. Пластини вважаються тонкими, ізотропними, мають згинальну жорсткість D_i і здатні до розтягувальних зусиль T_i в серединній поверхні. При $D_i = 0$ під пластиною будемо мати на увазі мембрану з розтягувальними зусиллями T_i. Рух рідин і пластин будемо розглядати в рухомій системі координат $Oxyz$, жорстко пов'язаній з твердим тілом і розташованій так, що площина Oxy знаходиться на незбуреній вільній поверхні S_1, а вісь Oz напрямлена протилежно вектору прискорення сили тяжіння $\vec{g}$ (рис. 1). Введемо також у розгляд інерційну систему координат O_1XYZ, паралельну системі $Oxyz$. Задачу будемо розглядати в лінійній постановці, вважаючи сумісні коливання рідин і пластинок безвідривними, тобто без кавітації, а рухи рідин потенціальними.

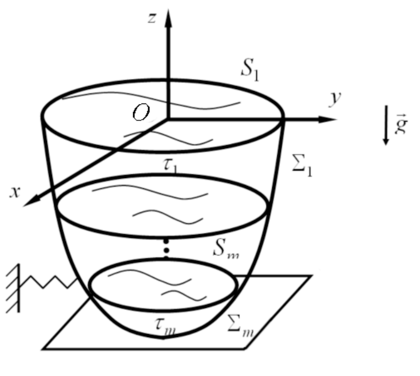

Рис. 1

Нехай тверде тіло здійснює малі коливання вздовж осі O_1Y по ідеально гладкій площині під дією пружної сили $F_y = -cY(t)$, де c — коефіцієнт пружності пружини.

Дослідимо стійкість положення рівноваги розглядуваної механічної системи. Для цього обчислимо потенціальну енергію системи, яка складається з потенціальної енергії пружини, важкої багатошарової рідини і потенціальної енергії пружних пластин

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3,$$

де $\Pi_1 = \frac{1}{2} cY(t)^2$ — потенціальна енергія пружини.

Потенціальну енергію важкої багатошарової рідини Π_2 будемо обчислювати за формулою

$$\Pi_2 = g\sum_{i=1}^{m} \rho_i \int_{\tau_i} Z\, d\tau.$$

Маємо (рис. 2)

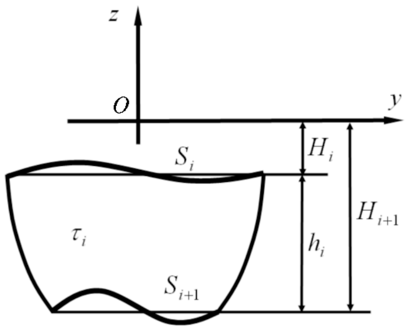

Рис. 2

$$\int_{\tau_i} Z\, d\tau = \int_{-H_{i+1}}^{-H_i} dz \int_{S_z} z\, ds + \int_{S_{i+1}} ds \int_{-H_{i+1}+W_{i+1}}^{-H_{i+1}} z\, dz + \int_{S_i} ds \int_{-H_i}^{-H_i+W_i} z\, dz =$$

$$= \int_{\tau_{i0}} z\, d\tau + \frac{1}{2}\left(\int_{S_i} W_i^2\, ds - \int_{S_{i+1}} W_{i+1}^2\, ds \right).$$

Тут W_i — нормальний прогин i-ї пластини, h_i — глибина заповнення i-ї рідини, $H_i = \sum_{k=1}^{i-1} h_k$, $H_1 = 0$, $W_{m+1} \equiv 0$.

Оскільки

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_i \left(\int_{S_i} W_i^2\, ds - \int_{S_{i+1}} W_{i+1}^2\, ds \right) = \sum_{i=1}^{m} \Delta\rho_i \int_{S_i} W_i^2\, ds,$$

то

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} g \sum_{i=1}^{m} \Delta\rho_i \int_{S_i} W_i^2 ds,$$

де $\Delta\rho_i = \rho_i - \rho_{i-1}$, $\rho_0 = 0$, $\rho_m = 0$.

Потенціальна енергія пружних пластин обчислюється таким чином:

$$\Pi_3 = \sum_{i=1}^{m}\left\{\rho_{0i}g\int_{\tau_{0i}} z\,d\tau + \frac{1}{2}\int_{S_i}\left[T_i\left(\left(\frac{\partial W_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_i}{\partial y}\right)^2\right) + D_i\,(\Delta_2 W_i)^2\right]ds - D_i\,(1-\nu_i)\,\Pi_{3i}\right\}.$$

Тут

$$\Pi_{3i} = \int_{S_i}\left[\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial x\partial y}\right)^2\right]ds,$$

ρ_{0i} і τ_{0i} — густина і область, зайнята i-ї пластиною, Δ_2 — двовимірний оператор Лапласа, ν_i — коефіцієнт Пуассона i-ї пластини.

Провівши необхідні перетворення, отримаємо

$$\Pi = \frac{1}{2}cY(t)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\int_{S_i}\left\{g\Delta\rho_i W_i^2 + D_i(\Delta_2 W_i)^2 + T_i\left[\left(\frac{\partial W_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_i}{\partial y}\right)^2\right]\right\}ds, \qquad (1)$$

або

$$\Pi = \frac{1}{2}cY(t)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\int_{S_i}\left[g\Delta\rho_i W_i^2 + \left(D_i\Delta_2^2 W_i - T_i\Delta_2 W_i\right)W_i\right]ds. \qquad (2)$$

При виведенні формул (1), (2) використано умови нестисливості i-ї рідини $\int_{S_i} W_i\,ds = 0$, умови затиснення пластин $W_i\big|_{\gamma_i} = 0$, $\dfrac{\partial W_i}{\partial \vec{n}}\Big|_{\gamma_i} = 0$ ($\vec{n}$ — орт зовнішньої нормалі до контуру γ_i) та формули Гріна для оператора Лапласа

$$\int_{S_i}\left[\left(\frac{\partial W_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_i}{\partial y}\right)^2\right]ds = \oint_{\gamma_i} W_i\frac{\partial W_i}{\partial \vec{n}}d\gamma - \int_{S_i} W_i\Delta_2 W_i ds,$$

$$\int_{S_i}(\Delta_2 W_i)^2\,ds = \int_{S_i} W_i\Delta_2^2 W_i\,ds + \oint_{\gamma_i}\left(\Delta_2 W_i\frac{\partial W_i}{\partial \vec{n}} - W_i\frac{\partial \Delta_2 W_i}{\partial \vec{n}}\right)d\gamma.$$

Інтеграл Π_{3i} був перетворений в інтеграл, взятий по контуру області S_i [12]:

$$\Pi_{3i} = \frac{1}{2}\oint_{\gamma_i}\left[\frac{\partial W_i}{\partial x}\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{\partial W_i}{\partial y}\right) - \frac{\partial W_i}{\partial y}\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{\partial W_i}{\partial x}\right)\right]d\gamma = 0.$$

Таким чином, потенціальна енергія пружних пластин і рідини має вигляд

$$\Pi_{23} = \Pi_2 + \Pi_3 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\int_{S_i}\left[\left(D_i\Delta_2^2 W_i - T_i\Delta_2 W_i + g\Delta\rho_i W_i\right)W_i\right]ds,$$

а потенціальна енергія пластин

$$\Pi_3 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\int_{S_i}\Big[\Big(D_i\Delta_2^2 W_i - T_i\Delta_2 W_i\Big)W_i\Big]ds. \tag{3}$$

З формули (1) випливає, що для додатності функціонала Π достатньо вимагати, щоб $\Delta\rho_i \geq 0$, $i = \overline{1,m}$, тобто щоб більш важка рідина знаходилась нижче менш важкої. Додатна визначеність потенціальної енергії може бути порушена лише при $\Delta\rho_i < 0$. Однак з цієї формули видно, що за допомогою збільшення попереднього натягу T_i або згинальної жорсткості D_i функціонал Π можна зробити додатним, що буде істотно використано в подальшому. Слід зазначити, що в роботі [13] на основі операційних методів при $\Delta\rho_i \geq 0$ досліджено властивості спектра задачі про нормальні коливання багатошарової рідини, розділеної пружними мембранами.

Рівняння і граничні умови вільних коливань пружних пластин, які розділяють важку багатошарову ідеальну рідину, мають вигляд [14]

$$\Big(D_i\Delta_2^2 - T_i\Delta_2 + g\Delta\rho_i - k_{0i}\omega^2\Big)w_i =$$

$$= i\omega\big(\rho_{i-1}\varphi_{i-1} - \rho_i\varphi_i\big) + \rho_i Q_i - \rho_{i-1}Q_{i-1} + gH_i\Delta\rho_i \quad \text{при} \quad z = -H_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{4}$$

$$w_i\big|_{\gamma_i} = 0, \qquad \frac{\partial w_i}{\partial\nu}\bigg|_{\gamma_i} = 0, \tag{5}$$

$$\int_{S_i} w_i\,ds = 0, \qquad w_i, \nabla w_i < \infty, \tag{6}$$

$$\Delta\varphi_i = 0 \quad \text{в} \quad \tau_i, \tag{7}$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial\nu}\bigg|_{\Sigma_i} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_i}{\partial z} = i\omega w_i \quad \text{при} \quad z = -H_i, \quad i = \overline{1,m}, \quad \frac{\partial\varphi_{i-1}}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial z} \quad \text{при} \quad z = -H_i. \tag{8}$$

Тут $k_{0i} = \rho_{0i}\delta_{0i}$, δ_{0i} — товщина i-ї пластини, ω — власна частота коливань пластин і рідини, $W_i = w_i e^{i\omega t}$, $\Phi_i = \varphi_i e^{i\omega t}$ — потенціал швидкості i-ї рідини, $Q_i = q_i e^{i\omega t}$, q_i — довільні сталі. У рівняннях (4) і (8) слід відрізняти нижній індекс i від уявної одиниці.

У загальному вигляді крайову задачу (4) – (8) можна записати у вигляді [15]

$$(C - \omega^2 A)w = 0.$$

Тут A і C — відповідно інерційний і пружний лінійні оператори, $w = (w_1, \ldots, w_m)$, $C =$ $= \operatorname{diag}(D_1\Delta_2^2 - T_1\Delta_2 + g\Delta\rho_1, \ldots, D_m\Delta_2^2 - T_m\Delta_2 + g\Delta\rho_m)$.

Введемо визначення скалярного добутку

$$(w_j, w_k) = \sum_{i=1}^{m}\int_{S_i} w_{ij}w_{ik}\,ds,$$

де $w_j = (w_{1j}, \ldots, w_{mj})$.

Крайові задачі для консервативних систем завжди описуються самоспряженими операторами. Коли оператори A і C додатно визначені (оператор A може бути тільки додатним), всі власні значення спектра дійсні й ізольовані, а власні функції мають властивість повноти в H і задовольняють співвідношення ортогональності. Власні форми коливань, які відповідають різним власним значенням, попарно ортогональні за потенціальною і кінетичною енергіями [15]

$$(Cw_j, w_k) = 0 \quad \text{і} \quad (Aw_j, w_k) = 0 \quad \text{при} \quad j \neq k\,.$$

Власні форми w_j утворюють повний базис, тобто будь-яку функцію W, яка квадратично інтегровна, задовольняє крайові умови та існує майже скрізь на S_i, можна зобразити у вигляді ряду

$$W = \sum_{j=1}^{\infty} p_j(t) w_j$$

або

$$W_i = \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} p_j(t), \tag{9}$$

який сходиться принаймні за енергетичною нормою або в середньому [12, 15].

Оскільки власні функції w_{ij} ортогональні за потенціальною енергією пружних пластин і рідини Π_{23}, то формула (2), з урахуванням (9), набирає вигляду

$$\Pi = \frac{1}{2} cY(t)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k p_k^2(t), \tag{10}$$

де

$$\gamma_k = (Cw_k, w_k) = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{S_i} (D_i \Delta_2^2 w_{ik} - T_i \Delta_2 w_{ik} + g \Delta\rho_i w_{ik}) w_{ik}\, ds\,. \tag{11}$$

Квадратична форма (10) буде додатно визначеною при $c > 0$ і

$$\gamma_k > 0\,. \tag{12}$$

Отже, нерівність (12) є умовою стійкості положення рівноваги в розглянутій задачі Л. М. Сретенського і визначає умову додатної визначеності оператора C. Ця нерівність також є умовою стійкості положення рівноваги пружних пластин і багатошарової рідини в нерухомому твердому тілі, що відповідає коливанням твердого тіла відносно стійкого рівноважного стану.

Таким чином, центральною проблемою в даній задачі, як і в інших гідропружних задачах, є проблема знаходження власних частот сумісних коливань пластин і рідини ω_k та відповідних їм власних функцій w_{ik}. В роботах [8 – 10] частково розглянуто цю проблему. Наприклад, у статтях [16 – 17] досліджено частотний спектр сумісних коливань двошарової ідеальної рідини в круговому і коаксіальному циліндричному резервуарі з пружними основами.

Слід зазначити, що в загальному вигляді крайова задача (4) – (8) є дуже складною. На прикладі циліндричної порожнини τ довільного поперечного перерізу S $(S_1 = S_2 = \ldots \ldots = S_m = S)$ побудуємо розв'язки цієї крайової задачі і спростимо нерівність $\gamma_k > 0$. Для циліндричної порожнини крайову задачу (4) – (8) можна звести до вигляду [14]

$$D_i \Delta_2^2 w_i - T_i \Delta_2 w_i + (g\Delta\rho_i - k_{0i}\omega^2) w_i =$$

$$= \omega^2 \sum_n \frac{1}{k_n} (a_{in} w_{in} - b_{in} w_{i+1n} - b_{i-1n} w_{i-1n}) \psi_n + C_i, \tag{13}$$

$$w_i \big|_\gamma = 0, \quad \left. \frac{\partial w_i}{\partial \nu} \right|_\gamma = 0, \tag{14}$$

$$\int_S w_i \, ds = 0, \quad w_i, \nabla w_i < \infty, \tag{15}$$

де

$$w_{in} = \int_S w_i \psi_n ds \Big/ N_n^2, \tag{16}$$

$a_{in} = \rho_{i-1} \operatorname{cth} \kappa_{i-1n} + \rho_i \operatorname{cth} \kappa_{in}$, $b_{in} = \rho_i / \sinh \kappa_{in}$, $\kappa_{in} = k_n h_i$, C_i — довільні сталі, k_n і ψ_n — власні числа і відповідні їм власні функції коливань ідеальної рідини в циліндричній порожнині. Вони знаходяться з крайової задачі

$$\Delta_2 \psi_n + k_n^2 \psi_n = 0 \quad \text{на} \quad S, \quad \left. \frac{\partial \psi_n}{\partial \nu} \right|_\gamma = 0.$$

Функції ψ_n лінійно незалежні, ортогональні на поверхні S і після приєднання до них довільної сталої стають повними на S [18].

Розв'язок рівняння (13) зображується у вигляді лінійної комбінації чотирьох незалежних розв'язків w_{iq}^0, $q = \overline{1,4}$, однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного рівняння [14, 15]

$$w_i = \sum_{q=1}^{4} A_{iq}^0 w_{iq}^0 + \sum_n \tilde{C}_{in} \psi_n + w_{0i}. \tag{17}$$

Тут A_{iq}^0, $\tilde{C}_{in}$ і w_{0i} — невідомі сталі. Сталу w_{0i} знайдемо з умови нестисливості i-ї рідини (15):

$$w_{0i} = -\sum_{q=1}^{4} A_{iq}^0 \tilde{w}_{iq}^0,$$

де $\tilde{w}_{iq}^0 = \frac{1}{S} \int_S w_{iq}^0 \, ds$.

Підставивши (17) у рівняння (13) і скориставшись співвідношеннями

$$\Delta_2 \psi_n = -k_n^2 \psi_n, \quad \Delta_2^2 \psi_n = k_n^4 \psi_n, \tag{18}$$

знайдемо $\tilde{C}_{in}$:

$$\tilde{C}_{in} = \frac{\omega^2}{k_n d_{in}} (a_{in} w_{in} - b_{in} w_{i+1n} - b_{i-1n} w_{i-1n}).$$

Тут $d_{in} = (D_i k_n^2 + T_i) k_n^2 + g \Delta \rho_i - k_{0i} \omega^2$.

Підставивши (17) у (16), отримаємо систему лінійних рівнянь відносно w_{in}:

$$w_{in} = \sum_{q=1}^{4} A_{iq}^0 E_{iqn}^0 + \frac{\omega^2}{k_n d_{in}} (a_{in} w_{in} - b_{in} w_{i+1n} - b_{i-1n} w_{i-1n}), \qquad i = \overline{1, m}, \tag{19}$$

де $E_{iqn}^0 = \dfrac{1}{N_n^2} \int_S w_{iq}^0 \psi_n \, ds$.

Розв'язавши лінійну систему (19) відносно w_{in}, одержимо прогин w_i:

$$w_i = \sum_{l=1}^{m} \sum_{q=1}^{4} \left[\left(w_{iq}^0 - \tilde{w}_{iq}^0 \right) \delta_{il} + \sum_n E_{iqn}^0 C_{iln} \psi_n \right] A_{lq}^0. \tag{20}$$

Тут $C_{iln} = \dfrac{(a_{in} a_{iln} - b_{in} a_{i+1ln} - b_{i-1n} a_{i-1ln}) d_{ln}}{d_{in}}$, a_{iln} — елементи матриці D_n^{-1}, δ_{il} — символ Кронекера,

$$D_n = \begin{pmatrix} \tilde{T}_{1n} & b_{1n} & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ b_{1n} & \tilde{T}_{2n} & b_{2n} & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & b_{m-2n} & \tilde{T}_{m-1n} & b_{m-1n} \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & b_{m-1n} & \tilde{T}_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{T}_{in} = T_{in} - a_{in}, \quad T_{in} = \frac{k_n d_{in}}{\omega^2}.$$

Оскільки D_n є симетричною лінійчатою матрицею, то й обернена матриця D_n^{-1} також буде симетричною. Для однозв'язної області з умов обмеженості розв'язків w_{iq}^0 індекс q буде змінюватися від 1 до 2.

Із граничних умов жорсткого закріплення пластин (14) випливає однорідна система $2m$ лінійних рівнянь відносно невідомих A_{lq}^0, $l = \overline{1,m}$, $q = \overline{1,2}$:

$$\sum_{l=1}^{m}\sum_{q=1}^{2}\left[\left(w_{iq}^0\Big|_\gamma - \tilde{w}_{iq}^0 \right)\delta_{il} + \sum_n E_{iqn}^0 C_{iln}\,\psi_n\big|_\gamma \right]A_{lq}^0 = 0, \qquad i = \overline{1,m}, \tag{21}$$

$$\sum_{l=1}^{m}\delta_{il}\sum_{q=1}^{2}\left(\frac{\partial w_{iq}^0}{\partial \nu}\Bigg|_\gamma \right)A_{lq}^0 = 0, \qquad i = \overline{1,m}. \tag{22}$$

З рівності нулю визначника однорідної системи (21), (22) маємо частотне рівняння вільних коливань пружних пластин і рідини. Відповідно до вищевикладеного, це рівняння має дискретний спектр з єдиною граничною точкою на нескінченності.

З урахуванням розвинення функції w_{iq}^0 за власними функціями ψ_n формула (20) набере вигляду

$$w_i = \sum_{l=1}^{m}\sum_{q=1}^{2}\left[\sum_n (\delta_{il} + C_{iln})\, E_{iqn}^0 \psi_n \right]A_{lq}^0 = \sum_n \zeta_{in}\psi_n .$$

Тут $\zeta_{in} = \sum_{l=1}^{m}\sum_{q=1}^{2}\left[(\delta_{il} + C_{iln})E_{iqn}^0 \right]A_{lq}^0$.

Вилучивши з системи рівнянь (21), (22), наприклад, перше рівняння і розв'язавши останні $2m-1$ рівняння відносно A_{11}^0, отримаємо власні форми коливань i-ї пластини для частоти ω_j:

$$w_{ij} = \sum_n \zeta_{inj}\psi_n , \tag{23}$$

де $\zeta_{inj} = A_{11}^0 \sum_{l=1}^{m}\left[\sum_{q=1}^{2}\left(\delta_{il} + C_{ilnj} \right) E_{iqnj}^0 A_{lqj} \right]$, коефіцієнти C_{ilnj}, E_{lqnj}^0 і корені A_{lqj} — це коефіцієнти C_{iln}, E_{lqn}^0 і корені A_{lq}^0, обчислені при $\omega = \omega_j$, $A_{lqj} = 1$ при $l = q = 1$.

Підставивши (23) в (11) і скориставшись тим, що функції ψ_n ортогональні в області S, а також співвідношеннями (18), отримаємо

$$\gamma_k = \sum_{i=1}^{m}\sum_n \zeta_{ink}^2 N_n^2 [g\Delta\rho_i + (D_i k_n^2 + T_i)k_n^2]. \tag{24}$$

З формули (24) випливає, що при $\Delta\rho_i \geq 0$, $i = \overline{1,m}$, тобто коли важча рідина знаходиться нижче менш важкої, умову (12) завжди виконано. Стійкість може бути порушена, якщо $\Delta\rho_i < 0$. Однак, як випливає з формули (24), за допомогою збільшення попереднього натягу T_i або згинальної жорсткості D_i завжди можна домогтися виконання нерівності $\gamma_k > 0$.

Для виконання нерівності (12) достатньо вимагати, щоб

$$g\Delta\rho_i + (D_i k_n^2 + T_i)k_n^2 > 0, \qquad i = \overline{1,m}. \tag{25}$$

Таким чином, умова стійкості положення рівноваги в задачі Л. М. Сретенського визначається умовою стійкості положення рівноваги багатошарової рідини і пружних пластинок у нерухомому твердому тілі, що відповідає коливанням твердого тіла відносно стійкого рівноважного стану. Оскільки власні числа k_n утворюють нескінченно зростаючу числову послідовність [18], то достатню умову стійкості положення рівноваги (25) можна замінити більш простою

$$g\Delta\rho_i + (D_i k_1^2 + T_i)k_1^2 > 0, \quad i = \overline{1, m}. \tag{26}$$

Умови стійкості (26) не залежать від глибин заповнення рідин h_i і від масових характеристик пластин k_{0i}. Так, у випадку прямого кругового циліндра радіуса a матимемо $k_1 a \approx 1,841$.

Із нерівностей (26) випливає, що якщо пружна пластинка або мембрана $(D_i = 0)$ знаходиться тільки на вільній поверхні $(D_i = 0,\ T_i = 0$ при $i \neq 1,\ \Delta\rho_1 = \rho_1)$, то при $\Delta\rho_i \geq 0$, $i = \overline{2, m}$, положення рівноваги даної системи буде стійким. З цих нерівностей також випливає, що якщо i-та пластина вироджується в мембрану $(D_i = 0)$, то в i-ій нерівності слід покласти $D_i = 0$, а якщо всі пластини вироджуються в мембрани, то нерівності (26) набирають вигляду

$$g\Delta\rho_i + T_i k_1^2 > 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

При відсутності пластин і мембран $(D_i = 0$ і $T_i = 0)$ умови стійкості визначаються відомими нерівностями

$$\Delta\rho_i > 0, \quad i = \overline{1, m},$$

тобто щоб важча рідина перебувала нижче, ніж менш важка.

Таким чином, попередніми натягами T_i і величиною згинальної жорсткості D_i можна стабілізувати нестійке положення рівноваги твердого тіла з багатошаровою рідиною, розділеною пружними пластинами.

3. Стійкість положення рівноваги фізичного маятника з багатошаровою рідиною, розділеною пружними пластинами. Нехай тверде тіло, що містить багатошарову рідину та пружні пластини, може здійснювати малі плоскі коливання навколо нерухомої осі під дією сили тяжіння (фізичний маятник). Допустимість таких коливань накладає обмеження на властивості підвісу [6] (див. рис. 3).

Дослідимо стійкість положення рівноваги. Для цього запишемо потенціальну енергію розглядуваної механічної системи, яка складається з потенціальної енергії твердого тіла і недеформівних (плоских) пластин, важкої багатошарової рідини та потенціальної енергії пружних пластин:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3,$$

де $\Pi_1 = \frac{1}{2}\tilde{l}_0 m_0 g \theta^2$ — потенціальна енергія твердого тіла і недеформівних пластин, m_0 — маса твердого тіла і пластин, $\tilde{l}_0$ — відстань від центра мас твердого тіла і пластин до точки

O_1, $\Pi_2 = g\sum_{i=1}^{m}\rho_i\int_{\tau_i} Z\,d\tau$ — потенціальна енергія багатошарової рідини, Π_3 — потенціальна енергія пружних пластин.

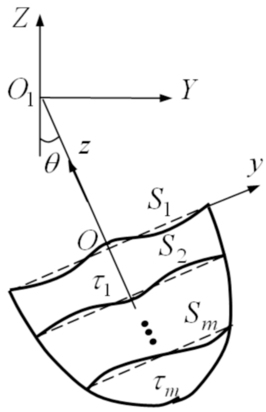

Рис. 3

У виразі для Π_2 інтегрування повинно поширюватися на увесь об'єм, зайнятий багатошаровою рідиною, оскільки заміна області τ_i на τ_{i0} (область у положенні рівноваги) призводить до помилок не третього, а другого порядку малості [6], отже,

$$g\sum_{i=1}^{m}\rho_i\int_{\tau_i} Z\,d\tau = g\left(\sum_{i=1}^{m}\rho_i\int_{\tau_{i0}} Z\,d\tau + g\sum_{i=1}^{m}\rho_i\int_{\tau_{i1}} Z\,d\tau\right) = gZ^*\sum_{i=1}^{m}\rho_i\tau_{i0} + g\sum_{i=1}^{m}\rho_i\int_{\tau_{i1}} Z\,d\tau. \qquad (27)$$

Тут $\tau_i = \tau_{i0}\cup\tau_{i1}$, Z^* — апліката центра ваги багатошарової рідини в стані спокою.

Припустивши, що центр ваги об'єму τ_{i0} лежить на продовженні прямої O_1O, отримаємо

$$Z^* = \frac{1}{2}l^*\theta^2 + \mathrm{const} + O(\theta^3),$$

де $l^* = \sum_{i=1}^{m}\rho_i\tau_{i0}l_{i0}\Big/M_2$, l_{i0} — відстань від центра ваги об'єму τ_{i0} до шарніра O_1, $M_2 = \sum_{i=1}^{m} m_i$ — маса багатошарової рідини.

Перетворимо інтеграл у правій частині виразу (27), врахувавши, що $Z = (z - l_0)\cos\theta + y\sin\theta$, $l_0 = OO_1$. Потенціальну енергію пружних пластин можна знайти з виразу (3).

Відкинувши малі вищого порядку, остаточно отримаємо

$$\Pi = \frac{1}{2}\tilde{k}\theta^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\int_{S_i}[g\Delta\rho_i W_i^2 + (D_i\Delta_2 W_i - T_i W_i)\Delta_2 W_i + 2g\Delta\rho_i y W_i\theta]\,dS. \qquad (28)$$

Тут $\tilde{k} = \tilde{l}_0 m_0 g + lM_2 g$.

Підставивши (9) у (28) і скориставшись умовами ортогональності власних функцій w_{ij} за потенціальною енергією пружних пластин і рідини, а також формулою (11), отримаємо

$$\Pi = \frac{1}{2}\tilde{k}\theta^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k p_k^2(t) + g\theta\sum_{i=1}^{m}\Delta\rho_i\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{\beta}_{ik}p_k(t), \tag{29}$$

де $\tilde{\beta}_{ik} = \int_{S_i} y w_{ik}\, ds$.

У виразі (29) виконаємо заміну змінних $p_k(t) = \tilde{p}_k(t) + \nu_k\theta(t)$, тоді при $\nu_k = -g\tilde{\gamma}_k/\gamma_k$ потенціальна енергія (29) набере вигляду

$$\Pi = \frac{1}{2}k^*\theta^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\tilde{p}_k^2(t). \tag{30}$$

Тут

$$k^* = \tilde{k} - g^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde{\gamma}_k^2}{\gamma_k}, \quad \gamma_k = (Cw_k, w_k) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\int_{S_i}(D_i\Delta_2^2 w_{ik} - T_i\Delta_2 w_{ik} + g\Delta\rho_i w_{ik})w_{ik}\, ds, \quad \tilde{\gamma}_k = \sum_{i=1}^{m}\Delta\rho_i\tilde{\beta}_{ik}.$$

Квадратична форма (30) буде додатно визначеною при

$$k^* > 0 \quad \text{і} \quad \gamma_k > 0. \tag{31}$$

Як і раніше, друга нерівність у (31) визначає умову стійкості положення рівноваги багатошарової рідини і пружних пластинок у нерухомому твердому тілі. Перша нерівність у (31) має вигляд

$$\tilde{k} > g^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde{\gamma}_k^2}{\gamma_k}. \tag{32}$$

У випадку циліндричної порожнини $(S_1 = S_2 = \ldots = S_m = S)$ в нерівності (32) слід вважати $\tilde{\gamma}_k = \sum_{i=1}^{m}\Delta\rho_i\sum_n\zeta_{ink}D_n$ і обчислювати γ_k за формулою (24). Якщо припустити, що при $T_i \to \infty$, $i = \overline{1, m}$, значення ζ_{ink} залишаються обмеженими, то при $T_i \to \infty$ величина $\gamma_k \to \infty$ і права частина нерівності (32) прямує до нуля. Отже, величинами T_i завжди можна досягти виконання цієї нерівності для будь-яких значень параметрів фізичного маятника, багатошарової рідини і пружних пластин (за умови, що $\tilde{k} > 0$, тобто центр мас системи повинен бути нижче точки підвісу). Таким чином, збільшенням попереднього натягу пластин можна стабілізувати нестійке положення рівноваги фізичного маятника з багатошаровою рідиною, розділеною пружними пластинами, що не суперечить фізичному змісту.

Література

1. Л. Н. Сретенский, *Колебание жидкости в подвижном сосуде*, Изв. АН СССР, № 10, 1483 – 1494 (1951).
2. Н. Н. Моисеев, *Задача о малых колебаниях открытого сосуда с жидкостью под действием упругой силы*, Укр. мат. журн., **4**, № 2, 168 – 173 (1952).

3. Н. Н. Моисеев, *Движение твердого тела, имеющего полость, частично заполненную идеальной капельной жидкостью*, Докл. АН СССР, **85**, № 4, 719 – 722 (1952).
4. Н. Н. Моисеев, *Задача о движении твердого тела, содержащего жидкие массы, имеющие свободную поверхность*, Мат. сб., **32 (74)**, вып. 1, 61 – 96 (1953).
5. Г. К. Пожарицкий, *Задача минимума в задаче об устойчивости равновесия твердого тела с частичным жидким наполнением*, Прикл. математика и механика, **26**, вып. 4, 593 – 605 (1962).
6. Н. Н. Моисеев, В. В. Румянцев, *Динамика тела с полостями, содержащими жидкость*, Наука, Москва (1965).
7. Г. К. Пожарицкий, В. В. Румянцев, *Задача минимума в вопросе об устойчивости движения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью*, Прикл. математика и механика, **27**, вып. 1, 11 – 26 (1963).
8. Н. К. Дидок, *Поперечные колебания цилиндрического сосуда с упругим дном, содержащего жидкость со свободной поверхностью*, Труды Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины, **22**, 71 – 80 (2011).
9. Ю. Н. Кононов, Н. К. Дидок, *Задача Сретенского для цилиндрического сосуда с идеальной жидкостью и упругими основаниями*, Механика твердого тела, вып. 40, 210 – 220 (2010).
10. Н. К. Дидок, Ю. Н. Кононов, *Динамика и устойчивость колебаний цилиндрического резервуара с идеальной жидкостью и упругими основаниями*, Труды Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины, **27**, 122 – 131 (2013).
11. Ю. Н. Кононов, *О колебании физического маятника с многослойной идеальной жидостью*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **12**, № 5, 73 – 89 (2015).
12. С. Г. Михлин, *Вариационные методы в математической физике*, Наука, Москва (1957).
13. Ю. С. Пашкова, *Малые колебания системы идеальных жидкостей, разделенных мембранными перегородками*, Симферополь (1992), Деп. в ГКПБ Украины 02.10.92.
14. В. П. Шевченко, Ю. Н. Кононов, *Об устойчивости упругих пластинок, разделяющих многослойную жидкость*, Актуальные аспекты физико-механических исследований. Механика, Наук. думка, Киев (2007), с. 348 – 361.
15. Л. В. Докучаев, *Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами*, Машиностроение, Москва (1987).
16. Yu. M. Kononov, V. P. Shevchenko, Y. O. Dzhukha, *Axially symmetric oscillations of elastic annular bases and a perfect two-layer liquid in a rigid annular cylindrical reservoir*, J. Math. Sci., **240**, № 1, 98 – 112 (2019).
17. Y. M. Kononov, Y. O. Dzhukha, *Vibrations of two layer ideal liquid in a rigid cylindrical vessel with elastic bases*, J. Math. Sci., **246**, № 3, 365 – 383 (2020).
18. Г. Н. Микишев, Б. И. Рабинович, *Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью*, Машиностроение, Москва (1968).

Одержано 12.07.21