УДК 517.925.5; 517.929; 517.929.21; 517.958:531-133

В. Ю. Слюсарчук (Нац. ун-т водн. госп-ва та природокористування, Рівне)

РІВНЯННЯ В ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ, МНОЖИНИ РОЗВ'ЯЗКІВ ЯКИХ ІНВАРІАНТНІ ВІДНОСНО ГРУПИ, ІЗОМОРФНОЇ ОДНОПАРАМЕТРИЧНІЙ ГРУПІ УНІТАРНИХ ОПЕРАТОРІВ

We construct classes of equations in a Hilbert space whose sets of solution are invariant with respect to a group isomorphic to a one-parameter group of unitary operators. It is shown that the unbounded solutions of these equations are unstable. The applications of the obtained results to nonlinear mechanics are presented.

Побудовано класи рівнянь у гільбертовому просторі, множини розв'язків яких інваріантні відносно групи, ізоморфної однопараметричній групі унітарних операторів. Показано, що необмежені розв'язки таких рівнянь нестійкі. Наведено застосування отриманих результатів до нелінійної механіки.

1. Основні позначення й означення. Нехай $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ і $\mathbb{R}_+$ — множини всіх натуральних, дійсних і невід'ємних чисел відповідно, H — гільбертовий простір із нормою $\|\cdot\|_H$, що визначається рівністю

$$\|x\|_H = \sqrt{(x,x)},$$

де (x,y) — скалярний добуток x на y $(x,y \in H)$ і $L(H,H)$ — банахова алгебра лінійних неперервних операторів $A\colon H \to H$ з одиничним оператором I та нормою

$$\|A\|_{L(H,H)} = \sup_{\|x\|_H=1} \|Ax\|_H.$$

Лінійний оператор $V : H \to H$ називається *унітарним*, якщо він відображає простір H на увесь простір H і не змінює величини скалярного добутку, тобто якщо

$$(Vx, Vy) = (x,y)$$

для всіх $x, y \in H$. Лінійний оператор $V : H \to H$ називається *самоспряженим*, якщо він збігається зі спряженим до нього оператором V^*, тобто

$$(Vx, y) = (x, Vy)$$

для всіх $x, y \in H$ [1].

Зафіксуємо довільний самоспряжений оператор $A \in L(H,H)$. Розглянемо унітарні оператори

$$U_\varphi = e^{i\varphi A}, \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

що утворюють однопараметричну групу

$$e^{i\varphi_1 A} e^{i\varphi_2 A} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)A}, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R},$$

твірною якої є оператор iA. Цю групу будемо позначати через $G_1(H)$.

Розглянемо ще одну потрібну для подальшого однопараметричну групу відображень.

Зафіксуємо довільне $m \in \mathbb{N}$ і розглянемо гільбертовий простір $H^m = \underbrace{H \times \ldots \times H}_{m \text{ разів}}$ елементів $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ і $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$, де $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m \in H$, зі скалярним добутком $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, y_1) + \ldots + (x_m, y_m)$ і нормою

$$\|\mathbf{x}\|_{H^m} = \sqrt{\|x_1\|_H^2 + \ldots + \|x_m\|_H^2}.$$

Визначимо відображення $U_{m,\varphi} \colon H^m \to H^m$, $\varphi \in \mathbb{R}$, рівностями

$$U_{m,\varphi}(x_1, \ldots, x_m) = (U_\varphi x_1, \ldots, U_\varphi x_m), \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Ці відображення, очевидно, є унітарними і утворюють однопараметричну групу, яку позначимо через $G_m(H)$. Твірною групи $G_m(H)$ є оператор $i\mathcal{A} \colon H^m \to H^m$, що визначається співвідношенням

$$\mathcal{A}(x_1, \ldots, x_m) = (Ax_1, \ldots, Ax_m), \quad (x_1, \ldots, x_m) \in H^m.$$

Далі розглянемо довільну непорожню множину $\Omega_m \subset H^m$, для якої

$$U_{m,\varphi}\Omega_m = \Omega_m \tag{1}$$

для всіх $\varphi \in \mathbb{R}$.

Позначимо через $\mathfrak{P}_{0,\Omega_m}$ і $\mathfrak{P}_{1,\Omega_m}$ множини неперервних відображень $P_0 : \Omega_m \to \mathbb{R}_+$ і $P_1 : \Omega_m \to H$ відповідно, для яких

$$P_0 U_{m,\varphi} = P_0$$

і

$$P_1 U_{m,\varphi} = U_\varphi P_1$$

для всіх $\varphi \in \mathbb{R}$. Зазначимо, що оператор U_φ для кожного $\varphi \in \mathbb{R}$ має неперервний обернений U_φ^{-1} і $U_\varphi^{-1} = U_{-\varphi}$.

Аналогічно позначимо через $\mathfrak{F}_{0,k,\Omega_m}$ і $\mathfrak{F}_{1,k,\Omega_m}$, де $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, множини неперервних відображень $F_0 : \Omega_m^k \to \mathbb{R}_+$ і $F_1 : \Omega_m^k \to H$ відповідно, де $\Omega_m^k = \underbrace{\Omega_m \times \ldots \times \Omega_m}_{k \text{ разів}}$, для яких

$$F_0 \left(U_{m,\varphi}\mathbf{x}_1, \ldots, U_{m,\varphi}\mathbf{x}_k\right) = F_0 \left(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\right)$$

і

$$F_1 \left(U_{m,\varphi}\mathbf{x}_1, \ldots, U_{m,\varphi}\mathbf{x}_k\right) = U_\varphi F_1 \left(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\right)$$

для всіх $\varphi \in \mathbb{R}$ і $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \Omega_m$, де $\mathbf{x}_i = (x_{i,1}, \ldots, x_{i,m})$ і $x_{i,1}, \ldots, x_{i,m} \in H$, $i = \overline{1, k}$.

Очевидно, що $\mathfrak{F}_{0,1,\Omega_m} = \mathfrak{P}_{0,\Omega_m}$ і $\mathfrak{F}_{1,1,\Omega_m} = \mathfrak{P}_{1,\Omega_m}$.

Крім елементів просторів H^m і H також будемо використовувати векторні функції $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t))$ і $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ зі значеннями в H^m і H відповідно.

2. Основні рівняння і задача. Зафіксуємо довільні числа $n \in \mathbb{N}$ і $t_0 \in \mathbb{R}$.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d^n x_i(t)}{dt^n} = P_i(x_1(t), \ldots, x_m(t)), \quad t \geq t_0, \quad i = \overline{1, m}, \tag{2}$$

де $P_i : \Omega_m \to H$ — неперервне відображення для кожного $i = \overline{1, m}$, систему рівнянь із запізнювальним аргументом

$$\begin{aligned} &\frac{d^n x_i(t)}{dt^n} = F_i\big(\mathbf{x}(t - \tau_{1i}(t)), \mathbf{x}(t - \tau_{2i}(t)), \ldots, \mathbf{x}(t - \tau_{mi}(t))\big), \\ &\tau_{ji}(t) = P_{ji}(x_j(t - \tau_{ji}(t)), x_i(t)), \\ &t \geq t_0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, m}, \quad i \neq j, \end{aligned} \tag{3}$$

де $\tau_{ii}(t) = 0$ для всіх $i = \overline{1, m}$ і $F_i : \Omega_m^k \to H$, $P_{ji} : \Omega_1^2 \to \mathbb{R}_+$ — неперервні відображення для всіх $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, m}$, $i \neq j$ (тут $\Omega_1 \neq \varnothing$, $\Omega_1 \subset H$ і $U_\varphi \Omega_1 = \Omega_1$ для всіх $\varphi \in \mathbb{R}$, тобто виконується співвідношення (1) при $m = 1$), та різницеве рівняння

$$\mathbf{x}(t) = F(\mathbf{x}(t - 1)), \quad t \geq t_0, \tag{4}$$

де $F : \Omega_m \to H^m$ — неперервне відображення.

У системі рівнянь (3) невідомими є не лише векторні функції $x_1(t), \ldots, x_m(t)$, як і в системі рівнянь (2), а і скалярні функції $\tau_{ji}(t)$, $i \neq j$, що ускладнює дослідження цієї системи. Однак при виконанні певних вимог для відображень F_i, $i = \overline{1, m}$, і P_{ji}, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, m}$, $i \neq j$, можна знайти важливі властивості розв'язків цієї системи.

***Зауваження* 1.** У випадку $n > 1$ праві частини систем (2) і (3) можуть залежати і від похідних функцій $x_1(t), \ldots, x_m(t)$, і від похідних функції $X(s)$ в точках $s = t - \tau_{ji}(t)$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, m}$, до $(n-1)$ порядку включно. Цей випадок ми не розглядаємо через громіздкість викладу матеріалу. Наявність у системах цих похідних не впливає на результати, що наведені у подальшому, та на їхнє обґрунтування.

Метою статті є встановлення умов нестійкості та обмеженості розв'язків рівнянь (2)–(4).

3. Умови інваріантності множин розв'язків рівнянь (2)–(4) відносно групи $\tilde{G}_m(H)$. Нехай $C([t_0, +\infty), H)$ і $C([t_0, +\infty), H^m)$ — множини неперервних на $[t_0, +\infty)$ функцій $x(t)$ і $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t))$ зі значеннями в H і H^m відповідно, де $x_1, \ldots, x_m \in C([t_0, +\infty), H)$.

Позначимо через $\tilde{U}_\varphi$ і $\tilde{U}_{m,\varphi}$ відображення $\tilde{U}_\varphi : C([t_0, +\infty), H) \to C([t_0, +\infty), H)$ і $\tilde{U}_{m,\varphi} : C([t_0, +\infty), H^m) \to C([t_0, +\infty), H^m)$, що визначаються співвідношеннями

$$\big(\tilde{U}_\varphi x\big)(t) = U_\varphi x(t), \quad t \geq t_0,$$

і

$$\big(\tilde{U}_{m,\varphi} \mathbf{x}\big)(t) = (U_\varphi x_1(t), \ldots, U_\varphi x_m(t)), \quad t \geq t_0.$$

Множини таких відображень утворюють однопараметричні групи, які будемо позначати через $\tilde{G}_1(H)$ і $\tilde{G}_m(H)$ відповідно. Ці групи, очевидно, ізоморфні групам $G_1(H)$ і $G_m(H)$ відповідно [2].

Позначимо через $\mathcal{E}$ множину всіх розв'язків $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t))$ довільної із систем рівнянь (2) і (3) або рівняння (4). Будемо називати цю множину інваріантною відносно відображення $\tilde{U}_{m,\varphi}$, якщо розв'язками відповідної системи або рівняння також будуть функції $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \big(\tilde{U}_{m,\varphi}\mathbf{x}\big)(t) = (U_\varphi x_1(t), \ldots, U_\varphi x_m(t))$ і множина таких функцій буде збігатися з $\mathcal{E}$. Якщо ця властивість виконується для кожного $\varphi \in \mathbb{R}$, то множину $\mathcal{E}$ будемо називати інваріантною відносно групи $\tilde{G}_m(H)$.

Покажемо інваріантність $\mathcal{E}$ відносно групи $\tilde{G}_m(H)$.

Спочатку розглянемо систему рівнянь (2). Позначимо через $\mathcal{E}_1$ множину всіх розв'язків цієї системи.

Справджується таке твердження.

Теорема 1. *Нехай* $\mathcal{E}_1 \neq \varnothing$ *і*

$$P_i \in \mathfrak{P}_{1,\Omega_m} \quad \text{для всіх} \quad i = \overline{1,m}. \tag{5}$$

Тоді множина розв'язків системи рівнянь (2) *інваріантна відносно групи* $\tilde{G}_m(H)$.

Доведення. Позначимо через

$$a_i = a_i(t), \quad i = \overline{1,m}, \tag{6}$$

довільний розв'язок системи (2). Завдяки (5)

$$U_\varphi P_i = P_i U_{m,\varphi} \quad \text{для всіх} \quad i = \overline{1,m} \quad \text{і} \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Тому

$$\frac{d^n U_\varphi a_i(t)}{dt^n} \equiv U_\varphi \frac{d^n a_i(t)}{dt^n} \equiv U_\varphi P_i(a_1(t), \ldots, a_m(t)) \equiv P_i(U_\varphi a_1(t), \ldots, U_\varphi a_m(t))$$

для всіх $i = \overline{1,m}$ і $\varphi \in \mathbb{R}$. Звідси випливає, що і сукупність функцій

$$b_i = U_\varphi a_i(t), \quad i = \overline{1,m}, \tag{7}$$

є розв'язком системи (2) для кожного $\varphi \in \mathbb{R}$.

Отже, якщо (6) є розв'язком системи (2), то (7) також є розв'язком цієї системи.

Звідси та з довільності вибору розв'язку (6) системи (2) і відображення $U_\varphi \in G_1(H)$ випливає твердження теореми.

Теорему 1 доведено.

***Зауваження* 2.** Однієї неперервності відображень $P_i : \Omega_m \to H$, $i = \overline{1,m}$, недостатньо, щоб $\mathcal{E}_1 \neq \varnothing$, оскільки $\dim H = \infty$ (див. [3]). Додаткові вимоги до $P_i : \Omega_m \to H$, $i = \overline{1,m}$, що гарантують існування розв'язків досліджуваної системи, можна знайти в [4].

Тепер розглянемо систему рівнянь (3). Позначимо через $\mathcal{E}_2$ множину всіх розв'язків цієї системи.

Справджується таке твердження.

Теорема 2. *Нехай* $\mathcal{E}_2 \neq \varnothing$,

$$F_i \in \mathfrak{F}_{1,k,\Omega_m} \quad \text{для всіх} \quad i = \overline{1,m} \tag{8}$$

і

$$P_{ji} \in \mathfrak{F}_{0,2,\Omega_1} \quad \text{для всіх} \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,m}, \quad i \neq j. \tag{9}$$

Тоді множина розв'язків системи рівнянь (3) *інваріантна відносно групи* $\tilde{G}_m(H)$.

Доведення. Позначимо через

$$c_i = c_i(t), \quad i = \overline{1,m}, \tag{10}$$

довільний розв'язок системи (3), а через $\mathbf{c}(t)$ функцію $(c_1(t), \ldots, c_m(t))$. Завдяки (8) і (9)

$$\frac{d^n U_\varphi c_i(t)}{dt^n} \equiv U_\varphi \frac{d^n c_i(t)}{dt^n} \equiv$$

$$\equiv U_\varphi F_i\left(\mathbf{c}(t-\tau_{1i}(t)), \mathbf{c}(t-\tau_{2i}(t)), \ldots, \mathbf{c}(t-\tau_{mi}(t))\right) \equiv$$

$$\equiv F_i\left(U_{m,\varphi}\mathbf{c}(t-\tau_{1i}(t)), U_{m,\varphi}\mathbf{c}(t-\tau_{2i}(t)), \ldots, U_{m,\varphi}\mathbf{c}(t-\tau_{mi}(t))\right)$$

і

$$\tau_{ji}(t) \equiv P_{ji}(c_j(t-\tau_{ji}(t)), c_i(t)) \equiv P_{ji}(U_\varphi c_j(t-\tau_{ji}(t)), U_\varphi c_i(t))$$

для всіх $i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,m},\ i \neq j$, і $\varphi \in \mathbb{R}$. Тому для кожного $\varphi \in \mathbb{R}$ функції

$$d_i = U_\varphi c_i(t), \quad i = \overline{1,m}, \tag{11}$$

є розв'язком системи (3).

Отже, якщо (10) є розв'язком системи (3), то (11) також є розв'язком цієї системи.

Звідси та з довільності вибору розв'язку (10) системи (3) і відображення $U_\varphi \in G_1(H)$ випливає твердження теореми.

Теорему 2 доведено.

Перейдемо до розгляду різницевого рівняння (4). Позначимо через $\mathcal{E}_3$ множину всіх розв'язків цього рівняння.

Справджується таке твердження.

Теорема 3. *Нехай $\mathcal{E}_3 \neq \varnothing$ і*

$$FU_{m,\varphi} = U_{m,\varphi}F \quad \text{для всіх } \varphi \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Тоді множина неперервних розв'язків рівняння (4) *інваріантна відносно групи $\tilde{G}_m(H)$.*

Доведення. Позначимо через

$$\mathbf{z}(t) = (z_1(t), \ldots, z_m(t)) \tag{13}$$

довільний неперервний розв'язок рівняння (4). Завдяки (12)

$$U_{m,\varphi}\mathbf{z}(t) \equiv U_{m,\varphi}F(\mathbf{z}(t-1)) \equiv F(U_{m,\varphi}\mathbf{z}(t-1))$$

для всіх $\varphi \in \mathbb{R}$. Звідси випливає, що функція

$$\hat{\mathbf{z}}(t) = U_{m,\varphi}\mathbf{z}(t) \tag{14}$$

є розв'язком рівняння (4) для кожного $\varphi \in \mathbb{R}$.

Отже, якщо (13) є розв'язком рівняння (4), то (14) також є розв'язком цього рівняння.

Звідси та з довільності вибору розв'язку (13) рівняння (4) і відображення $U_{m,\varphi}$ випливає твердження теореми.

Теорему 3 доведено.

4. Умови нестійкості та обмеженості розв'язків рівнянь (2) – (4). Встановлена в п. 3 властивість інваріантності множин розв'язків рівнянь (2) – (4) відносно групи $\tilde{G}_m(H)$ дає змогу отримати умови нестійкості та обмеженості деяких розв'язків цих рівнянь.

Основними в статті є наступні три твердження.

Теорема 4. *Нехай виконано умови теореми* 1 *і самоспряжений оператор* $A \in L(H, H)$ *має неперервний обернений. Якщо розв'язок* (6) *системи* (2) *необмежений і*

$$\sup_{t \geq t_0,\, i=\overline{1,m},\, l=\overline{1,n-1}} \left\| \frac{d^l \vec{a}_i(t)}{dt^l} \right\|_H < +\infty, \tag{15}$$

то цей розв'язок є нестійким.

Теорема 5. *Нехай виконано умови теореми* 2 *і самоспряжений оператор* $A \in L(H, H)$ *має неперервний обернений. Якщо розв'язок* (10) *системи* (3) *необмежений і*

$$\sup_{t \geq t_0,\, i=\overline{1,m},\, l=\overline{1,n-1}} \left\| \frac{d^l \vec{c}_i(t)}{dt^l} \right\|_H < +\infty, \tag{16}$$

то цей розв'язок є нестійким.

Теорема 6. *Нехай виконано умови теореми* 3 *і самоспряжений оператор* $A \in L(H, H)$ *має неперервний обернений. Якщо неперервний розв'язок* (13) *рівняння* (4) *необмежений, то цей розв'язок є нестійким.*

При доведенні цих теорем використовується така лема.

Лема. *Нехай самоспряжений оператор* $A \in L(H, H)$ *має неперервний обернений. Тоді виконуються співвідношення*

$$\|U_\varphi x - x\|_H = 2 \left\| \left(\sin \frac{\varphi}{2} A \right) x \right\|_H \leq 2 \operatorname{sh} \left(\frac{|\varphi|}{2} \|A\|_{L(H,H)} \right) \|x\|_H, \qquad \varphi \in \mathbb{R}, \quad x \in H, \tag{17}$$

$$\|U_{m,\varphi} \mathbf{x} - \mathbf{x}\|_{H^m} \leq 2 \operatorname{sh} \left(\frac{|\varphi|}{2} \|A\|_{L(H,H)} \right) \|\mathbf{x}\|_{H^m}, \qquad \varphi \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in H^m, \tag{18}$$

і для всіх достатньо малих $\varphi \neq 0$ *оператор* $\sin \dfrac{\varphi}{2} A$ *має неперервний обернений.*

Доведення. Використаємо співвідношення

$$I - \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi A} + e^{-i\varphi A}\right) = I - \cos \varphi A = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} A,$$

$$\left\| \sin \frac{\varphi}{2} A \right\|_{L(H,H)} = \left\| \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(-1)^s}{(2s+1)!} \frac{\varphi^{2s+1}}{2^{2s+1}} A^{2s+1} \right\|_{L(H,H)} \leq$$

$$\leq \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{1}{(2s+1)!} \frac{|\varphi|^{2s+1}}{2^{2s+1}} \|A\|_{L(H,H)}^{2s+1} =$$

$$= \operatorname{sh} \left(\frac{|\varphi|}{2} \|A\|_{L(H,H)} \right),$$

що випливають з теорії функцій лінійних обмежених операторів (див., наприклад, [4], розділ I, § 2). Із цієї теорії з урахуванням самоспряженості оператора A також випливає, що

$$\left(\sin\frac{\varphi}{2}A\right)^* = \sin\frac{\varphi}{2}A$$

і

$$\left(e^{i\varphi A}\right)^* = e^{-i\varphi A}.$$

Із наведених співвідношень та унітарності оператора $U_\varphi = e^{i\varphi A}$ отримуємо

$$\|U_\varphi x - x\|_H^2 = \left\|e^{i\varphi A}x - x\right\|_H^2 = \left(e^{i\varphi A}x - x, e^{i\varphi A}x - x\right) =$$
$$= \left(e^{i\varphi A}x, e^{i\varphi A}x\right) - \left(e^{i\varphi A}x, x\right) - \left(x, e^{i\varphi A}x\right) + (x,x) =$$
$$= (x,x) - \left(e^{i\varphi A}x, x\right) - \left(e^{-i\varphi A}x, x\right) + (x,x) =$$
$$= 2(x,x) - \left(\left(e^{i\varphi A} + e^{-i\varphi A}\right)x, x\right) = 2(x,x) - 2\left((\cos\varphi A)x, x\right) =$$
$$= 2((I - \cos\varphi A)x, x) = 4\left(\left(\sin^2\frac{\varphi}{2}A\right)x, x\right) =$$
$$= 4\left(\left(\sin\frac{\varphi}{2}A\right)x, \left(\sin\frac{\varphi}{2}A\right)^* x\right) = 4\left(\left(\sin\frac{\varphi}{2}A\right)x, \left(\sin\frac{\varphi}{2}A\right)x\right) =$$
$$= 4\left\|\left(\sin\frac{\varphi}{2}A\right)x\right\|_H^2 \le 4\left\|\sin\frac{\varphi}{2}A\right\|_{L(H,H)}^2 \|x\|_H^2 \le$$
$$\le 4\,\mathrm{sh}^2\left(\frac{|\varphi|}{2}\|A\|_{L(H,H)}\right)\|x\|_H^2$$

для всіх $\varphi \in \mathbb{R}$ і $x \in H$. Звідси випливає співвідношення (17).

Співвідношення (18) можна отримати, використавши (17). Справді,

$$\|U_{m,\varphi}\mathbf{x} - \mathbf{x}\|_{H^m} = \|U_{m,\varphi}(x_1,\ldots,x_m) - (x_1,\ldots,x_m)\|_{H^m} =$$
$$= \|(U_\varphi x_1,\ldots,U_\varphi x_m) - (x_1,\ldots,x_m)\|_{H^m} =$$
$$= \|(U_\varphi x_1 - x_1,\ldots,U_\varphi x_m - x_m)\|_{H^m} =$$
$$= \sqrt{\|U_\varphi x_1 - x_1\|_H^2 + \ldots + \|U_\varphi x_m - x_m\|_H^2} =$$
$$= \sqrt{\left\|\left(\sin\frac{\varphi}{2}A\right)x_1\right\|_H^2 + \ldots + \left\|\left(\sin\frac{\varphi}{2}A\right)x_m\right\|_H^2} \le$$
$$\le \sqrt{4\left\|\sin\frac{\varphi}{2}A\right\|_{L(H,H)}^2\left(\|x_1\|_H^2 + \ldots + \|x_m\|_H^2\right)} =$$
$$= 2\left\|\sin\frac{\varphi}{2}A\right\|_{L(H,H)}\|\mathbf{x}\|_{H^m} \le$$
$$\le 2\,\mathrm{sh}\left(\frac{|\varphi|}{2}\|A\|_{L(H,H)}\right)\|\mathbf{x}\|_{H^m}$$

для всіх $\varphi \in \mathbb{R}$ і $\mathbf{x} \in H^m$.

Оскільки за теоремою Данфорда (див. [4], розділ I, § 2) для спектра $\sigma\left(\sin\frac{\varphi}{2}A\right)$ оператора $\sin\frac{\varphi}{2}A$ виконується рівність

$$\sigma\Big(\sin\frac{\varphi}{2}A\Big) = \Big\{\sin\frac{\varphi}{2}\lambda \colon \lambda \in \sigma(A)\Big\} \tag{19}$$

і спектр $\sigma(A)$ є компактною множиною, що не містить точки 0 (оскільки оператор A має неперервний обернений), то

$$\sin\frac{\varphi}{2}\lambda \neq 0$$

для всіх $\lambda \in \sigma(A)$ і достатньо малих $\varphi \neq 0$. Тому на підставі (19)

$$0 \notin \sigma\Big(\sin\frac{\varphi}{2}A\Big)$$

для всіх достатньо малих $\varphi \neq 0$. Цього достатньо, щоб оператор $\sin\dfrac{\varphi}{2}A$ мав неперервний обернений для всіх достатньо малих $\varphi \neq 0$.

Лему доведено.

***Доведення теореми* 4.** Оскільки розв'язок (6) системи (2) необмежений і виконується співвідношення (15), то для векторної функції $\mathbf{a}(t) = (a_1(t), \ldots, a_m(t))$, що є розв'язком системи (2),

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \|\mathbf{a}(t)\|_{H^m} = +\infty. \tag{20}$$

Зафіксуємо довільне як завгодно мале число $\varepsilon > 0$. Завдяки лемі (див. (18)) і співвідношенню (15) існує число φ_ε, для якого

$$0 < \varphi_\varepsilon < \frac{2}{\|A\|_{L(H,H)}},$$

$$\|U_{m,\varphi_\varepsilon}\mathbf{a}(t_0) - \mathbf{a}(t_0)\|_{H^m} + \sum_{l=1}^{n-1}\left\| U_{m,\varphi_\varepsilon}\left.\frac{d^l\mathbf{a}(t)}{dt^l}\right|_{t=t_0} - \left.\frac{d^l\mathbf{a}(t)}{dt^l}\right|_{t=t_0}\right\|_{H^m} < \varepsilon \tag{21}$$

і оператор $\sin\dfrac{\varphi_\varepsilon}{2}A$ має неперервний обернений.

Згідно з теоремою 1 та її доведенням функція $\mathbf{b}(t) = U_{m,\varphi_\varepsilon}\mathbf{a}(t)$ також є розв'язком системи (2). За лемою

$$\|\mathbf{b}(t) - \mathbf{a}(t)\|_{H^m} = \|U_{m,\varphi_\varepsilon}\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}(t)\|_{H^m} =$$
$$= \sqrt{\|U_{\varphi_\varepsilon}a_1(t) - a_1(t)\|_H^2 + \ldots + \|U_{\varphi_\varepsilon}a_m(t) - a_m(t)\|_H^2} =$$
$$= \sqrt{\Big\|\Big(\sin\frac{\varphi_\varepsilon}{2}A\Big)a_1(t)\Big\|_H^2 + \ldots + \Big\|\Big(\sin\frac{\varphi_\varepsilon}{2}A\Big)a_m(t)\Big\|_H^2}$$

для всіх $t \geq t_0$, а завдяки (20) та тому, що оператор $\sin\dfrac{\varphi_\varepsilon}{2}A$ має неперервний обернений, для деякого $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \Big\|\Big(\sin\frac{\varphi_\varepsilon}{2}A\Big)a_{i_0}(t)\Big\|_H = +\infty.$$

Тому

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \sqrt{\Big\|\Big(\sin\frac{\varphi_\varepsilon}{2}A\Big)a_1(t)\Big\|_H^2 + \ldots + \Big\|\Big(\sin\frac{\varphi_\varepsilon}{2}A\Big)a_m(t)\Big\|_H^2} = +\infty,$$

тобто

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \|U_{m,\varphi_\varepsilon}\mathbf{a}(t) - \mathbf{a}(t)\|_{H^m} = +\infty. \tag{22}$$

Отже, співвідношення (22) виконується, яким би малим у нерівності (21) не було число $\varepsilon > 0$. Це означає нестійкість розв'язку (6) системи (2).

Теорему 4 доведено.

***Доведення теореми* 5.** Оскільки розв'язок (10) системи (3) є необмеженим і виконується співвідношення (16), то для векторної функції $\mathbf{c}(t) = (c_1(t), \ldots, c_m(t))$, що є розв'язком системи (3),

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \|\mathbf{c}(t)\|_{H^m} = +\infty. \tag{23}$$

Зафіксуємо довільне як завгодно мале число $\varepsilon > 0$.

При обгрунтуванні нестійкості розв'язку $\mathbf{c}(t)$ системи рівнянь (3) через наявність у (3) відхилень $\tau_{ji}(t)$ аргументу потрібно враховувати значення функції $\mathbf{c}(t)$ та її похідних $\dfrac{d\mathbf{c}(t)}{dt}, \ldots$ $\ldots, \dfrac{d^{n-1}\mathbf{c}(t)}{dt^{n-1}}$ на деякому початковому проміжку $[t_0 - \Delta, t_0]$, довжина якого залежить від співвідношень

$$\tau_{ji}(t) = P_{ji}(\vec{r}_j(t - \tau_{ji}(t)), \vec{r}_i(t)), \qquad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,m}, \quad i \neq j,$$

що є складовими досліджуваної системи.

Будемо вважати, що початковий проміжок $[t_0 - \Delta, t_0]$ нам відомий і функція $\mathbf{c}(t)$ є неперервно диференційовною на $[t_0 - \Delta, t_0]$. Завдяки такому припущенню, лемі (див. (18)) і співвідношенню (16) існує число φ_ε, для якого

$$0 < \varphi_\varepsilon < \frac{2}{\|A\|_{L(H,H)}},$$

$$\max_{s\in[t_0-\Delta,t_0]} \|U_{m,\varphi_\varepsilon}\mathbf{c}(s) - \mathbf{c}(s)\|_{H^m} +$$

$$+\sum_{l=1}^{n-1} \max_{s\in[t_0-\Delta,t_0]} \left\| U_{m,\varphi_\varepsilon}\frac{d^l\mathbf{c}(s)}{ds^l} - \frac{d^l\mathbf{c}(s)}{ds^l}\right\|_{H^m} < \varepsilon \tag{24}$$

і оператор $\sin\dfrac{\varphi_\varepsilon}{2}A$ має неперервний обернений.

Співвідношення (24) означає, що векторні функції $\mathbf{c}(t)$ і $U_{m,\varphi_\varepsilon}\mathbf{c}(t)$ та їхні похідні до $(n-1)$-го порядку на початковому проміжку відрізняються (за нормою) менше, ніж на ε.

Згідно з теоремою 2 та її доведенням векторна функція $\mathbf{d}(t) = U_{m,\varphi_\varepsilon}\mathbf{c}(t)$ також є розв'язком системи (3). Завдяки лемі з урахуванням означення норми в H^m

$$\|\mathbf{d}(t) - \mathbf{c}(t)\|_{H^m} = \|U_{m,\varphi_\varepsilon}\mathbf{c}(t) - \mathbf{c}(t)\|_{H^m} =$$

$$= \sqrt{\|U_{\varphi_\varepsilon}c_1(t) - c_1(t)\|_H^2 + \ldots + \|U_{\varphi_\varepsilon}c_m(t) - c_m(t)\|_H^2} =$$

$$= \sqrt{\left\|\left(\sin\frac{\varphi_\varepsilon}{2}A\right)c_1(t)\right\|_H^2 + \ldots + \left\|\left(\sin\frac{\varphi_\varepsilon}{2}A\right)c_m(t)\right\|_H^2},$$

а завдяки (23) і оборотності оператора $\sin\dfrac{\varphi_\varepsilon}{2}A$

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \left\| \left(\sin\frac{\varphi_\varepsilon}{2}A\right) c_{i_0}(t) \right\|_H = +\infty$$

для деякого $i_0 \in \{1,\ldots,m\}$. Тому

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \|U_{m,\varphi_\varepsilon}\mathbf{c}(t) - \mathbf{c}(t)\|_{H^m} = +\infty. \tag{25}$$

Таким чином, співвідношення (25) виконується, яким би малим у нерівності (24) не було число $\varepsilon > 0$. Це означає нестійкість розв'язку (9) системи (3).

Теорему 5 доведено.

***Доведення теореми* 6.** Вважаємо, що неперервний на $[t_0-1,+\infty)$ розв'язок (13) рівняння (4) є необмеженим.

Зафіксуємо довільне як завгодно мале число $\varepsilon > 0$. Завдяки лемі існує число φ_ε, для якого

$$0 < \varphi_\varepsilon < \frac{2}{\|A\|_{L(H,H)}},$$

$$\max_{s\in[t_0-1,t_0]} \|U_{m,\varphi_\varepsilon}\mathbf{z}(s) - \mathbf{z}(s)\|_{H^m} < \varepsilon \tag{26}$$

і оператор $\sin\dfrac{\varphi_\varepsilon}{2}A$ має неперервний обернений.

Співвідношення (26) означає, що векторні функції $\mathbf{z}(t)$ і $U_{m,\varphi_\varepsilon}\mathbf{z}(t)$ на початковому проміжку $[t_0-1,t_0]$ відрізняються (за нормою) менше, ніж на ε.

Згідно з теоремою 3 та її доведенням векторна функція $\hat{\mathbf{z}}(t) = U_{m,\varphi_\varepsilon}\mathbf{z}(t)$ також є розв'язком рівняння (4). Завдяки лемі з урахуванням означення норми в H^m

$$\|\hat{\mathbf{z}}(t) - \mathbf{z}(t)\|_{H^m} = \|U_{m,\varphi_\varepsilon}\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}(t)\|_{H^m} =$$

$$= \sqrt{\|U_{\varphi_\varepsilon}z_1(t) - z_1(t)\|_H^2 + \ldots + \|U_{\varphi_\varepsilon}z_m(t) - z_m(t)\|_H^2} =$$

$$= \sqrt{\left\|\left(\sin\frac{\varphi_\varepsilon}{2}A\right) z_1(t)\right\|_H^2 + \ldots + \left\|\left(\sin\frac{\varphi_\varepsilon}{2}A\right) z_m(t)\right\|_H^2},$$

а завдяки (23) і оборотності оператора $\sin\dfrac{\varphi_\varepsilon}{2}A$

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \left\| \left(\sin\frac{\varphi_\varepsilon}{2}A\right) z_{i_0}(t) \right\|_H = +\infty$$

для деякого $i_0 \in \{1,\ldots,m\}$. Тому

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \|U_{m,\varphi_\varepsilon}\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}(t)\|_{H^m} = +\infty. \tag{27}$$

Таким чином, співвідношення (27) виконується, яким би малим у нерівності (26) не було число $\varepsilon > 0$. Це означає нестійкість розв'язку (13) рівняння (4).

Теорему 6 доведено.

Із теорем 4 – 6 випливають такі твердження.

***Наслідок* 1.** *Нехай виконано умови теореми* 1, *самоспряжений оператор* $A \in L(H,H)$ *має неперервний обернений і розв'язок* (6) *системи* (2) *задовольняє співвідношення* (15).

Якщо цей розв'язок стійкий, то він є обмеженим.

***Наслідок* 2.** *Нехай виконано умови теореми* 2, *самоспряжений оператор* $A \in L(H,H)$ *має неперервний обернений і розв'язок* (10) *системи* (3) *задовольняє співвідношення* (16).

Якщо цей розв'язок стійкий, то він є обмеженим.

***Наслідок* 3.** *Нехай виконано умови теореми* 3 *і самоспряжений оператор* $A \in L(H,H)$ *має неперервний обернений.*

Якщо неперервний розв'язок (13) *рівняння* (4) *стійкий, то він є обмеженим.*

5. Приклад системи рівнянь, до якої застосовні результати із пп. 3 і 4. Спочатку наведемо потрібні для подальшого позначення й означення.

Нехай $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ — простір, елементами якого є вектори $\vec{r} = (x_1, x_2)$ з координатами $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, з евклідовою нормою

$$|\vec{r}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Позначимо через $G_1(\mathbb{R}^2)$ мультиплікативну групу всіх відображень $T_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi \in \mathbb{R}$, для кожного з яких

$$T_\varphi \vec{r} = T_\varphi(x_1, x_2) = (x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi, x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi).$$

Ця група є аналогом групи $G_1(H)$. Відомо, що $T_\varphi(x_1, x_2)$ — результат повороту точки (вектора) (x_1, x_2) на кут φ навколо центра обертання $(0,0)$ і відображення T_φ визначається матрицею $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ [5]. Можна показати, використавши теорему Стоуна (див. [1], розділ X, § 4), що

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = e^{\varphi \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)}, \quad \varphi \in \mathbb{R},$$

і матриця $A = -i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ є твірною групи $G_1(\mathbb{R}^2)$.

Зафіксуємо довільне число $m \in \mathbb{N}$ і розглянемо евклідовий простір $E^m = \underbrace{\mathbb{R}^2 \times \ldots \times \mathbb{R}^2}_{m \text{ разів}}$ елементів $\mathbf{r} = (\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_m)$, де $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_m \in \mathbb{R}^2$, з нормою $\|\mathbf{r}\|_{E^m} = \sqrt{|\vec{r}_1|^2 + \ldots + |\vec{r}_m|^2}$. Визначимо відображення $T_{m,\varphi} : E^m \to E^m$ рівністю

$$T_{m,\varphi}(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_m) = (T_\varphi \vec{r}_1, \ldots, T_\varphi \vec{r}_m).$$

Очевидно, що відображення $T_{m,\varphi}$ здійснює поворот вектора $(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_m)$ на кут φ і множина $G_m(\mathbb{R}^2) = \{T_{m,\varphi} : \varphi \in \mathbb{R}\}$ є мультиплікативною групою.

Нехай $C([t_0, +\infty), \mathbb{R}^2)$ і $C([t_0, +\infty), E^m)$ — векторні простори визначених і неперервних на $[t_0, +\infty)$ функцій зі значеннями в $\mathbb{R}^2$ і E^m відповідно. Зазначимо, що елементи цих просторів можуть бути необмеженими на $[t_0, +\infty)$.

Позначимо через $\tilde{T}_\varphi$ і $\tilde{T}_{m,\varphi}$ відображення $\tilde{T}_\varphi : C([t_0, +\infty), \mathbb{R}^2) \to C([t_0, +\infty), \mathbb{R}^2)$ і $\tilde{T}_{m,\varphi} : C([t_0, +\infty), E^m) \to C([t_0, +\infty), E^m)$, що визначаються співвідношеннями

$$\big(\tilde{T}_\varphi \vec{r}\big)(t) = T_\varphi \vec{r}(t), \quad t \geq t_0 - 1,$$

і

$$\big(\tilde{T}_{m,\varphi} \mathbf{r}\big)(t) = (T_\varphi \vec{r}_1(t), \ldots, T_\varphi \vec{r}_m(t)), \quad t \geq t_0 - 1,$$

де $\mathbf{r}(t) = (\vec{r}_1(t), \ldots, \vec{r}_m(t))$. Тут $\vec{r}, \vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_m$ — елементи простору $C([t_0, +\infty), \mathbb{R}^2)$. Множини таких відображень утворюють однопараметричні групи, які будемо позначати через $\tilde{G}_1(\mathbb{R}^2)$ і $\tilde{G}_m(\mathbb{R}^2)$ відповідно. Ці групи, очевидно, ізоморфні групам $G_1(\mathbb{R}^2)$ і $G_m(\mathbb{R}^2)$ відповідно.

Використовуючи розглянуті позначення та означення, наведемо застосування результатів із пп. 3 і 4.

Приклад. Розглянемо матеріальні точки $M_0, M_1, \ldots, M_n$ з масами $m_0, m_1, \ldots, m_n$, що рухаються у площині. Для вивчення руху цих точок використаємо прямокутну систему координат xOy з початком координат у точці O. Систему координат вважатимемо інерціальною. У статтях [6, 7] показано, що у випадку, коли швидкість гравітації збігається зі швидкістю світла (це узгоджується з теорією відносності А. Ейнштейна, в якій постулюється, що швидкість гравітації збігається зі швидкістю світла, та з дослідженнями С. М. Копєйкіна й Е. Фомалонта про фундаментальну межу швидкості гравітації [9]), рух точок $M_0,\ M_1, \ldots, M_n$ описується системою рівнянь із відхилювальним аргументом

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2\vec{r}_i(t)}{dt^2} = \sum_{j\in\{0,1,\ldots,n\}\setminus\{i\}} \frac{Gm_j}{|\vec{r}_j(t-\tau_{ji}(t)) - \vec{r}_i(t)|^3}(\vec{r}_j(t-\tau_{ji}(t)) - \vec{r}_i(t)),\\
&\tau_{ji}(t) = \frac{|\vec{r}_j(t-\tau_{ji}(t)) - \vec{r}_i(t)|}{c},\\
&i=\overline{0,n}, \quad j=\overline{0,n}, \quad i\neq j,
\end{aligned} \tag{28}$$

де

$$\frac{Gm_im_j}{|\vec{r}_j(t-\tau_{ji}(t)) - \vec{r}_i(t)|^3}(\vec{r}_j(t-\tau_{ji}(t)) - \vec{r}_i(t))$$

— сила притягування точки M_i точкою M_j (на підставі закону всесвітнього тяжіння з урахуванням запізнення $\tau_{ji}(t)$ гравітації) [6, 7] і c — швидкість гравітації.

Ця система у випадку $c=+\infty$ (тоді $\tau_{ji}(t)\equiv 0,\ i=\overline{0,n},\ j=\overline{0,n},\ i\neq j$) має вигляд

$$\frac{d^2\vec{r}_i(t)}{dt^2} = \sum_{j\in\{0,1,\ldots,n\}\setminus\{i\}} \frac{Gm_j}{|\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)|^3}(\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(t)), \quad i=\overline{0,n}. \tag{29}$$

Система (29) є основним об'єктом досліджень у класичній небесній механіці [8].

Зазначимо, що у випадку $n=9$ систему рівнянь (28) можна використовувати для вивчення руху планет Сонячної системи, якщо не враховувати дію на них інших складових цієї системи (астероїдів, комет тощо) та Галактики [6].

Покажемо, що до системи (28) застосовні теореми 2 і 5.

Використаємо множину

$$\check{\Omega}_{n+1} = \Big\{(\vec{r}_0, \ldots, \vec{r}_n) \in E^{n+1} : \vec{r}_i \neq \vec{r}_j,\ i=\overline{0,n},\ j=\overline{0,n},\ i\neq j\Big\},$$

що, очевидно, задовольняє співвідношення (1) при $m=n+1$.

Розглянемо відображення $P_{1,i}\colon \check{\Omega}_{n+1} \to \mathbb{R}^2,\ i=\overline{0,n}$, що визначаються за допомогою правих частин системи (28):

$$P_{1,i}(\vec{r}_0, \ldots, \vec{r}_n) = \sum_{j\in\{0,1,\ldots,n\}\setminus\{i\}} \frac{Gm_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3}(\vec{r}_j - \vec{r}_i), \quad i=\overline{0,n}. \tag{30}$$

Ці відображення є елементами множини $\mathfrak{P}_{1,\check{\Omega}_{n+1}}$, оскільки

$$T_\varphi \sum_{j\in\{0,1,\ldots,n\}\setminus\{i\}} \frac{Gm_j}{|\vec{r}_j-\vec{r}_i|^3}(\vec{r}_j-\vec{r}_i) =$$

$$= \sum_{j\in\{0,1,\ldots,n\}\setminus\{i\}} \frac{Gm_j}{|T_\varphi\vec{r}_j-T_\varphi\vec{r}_i|^3}(T_\varphi\vec{r}_j-T_\varphi\vec{r}_i), \quad i=\overline{0,n},$$

для кожного відображення $T_\varphi \in G_1(\mathbb{R}^2)$ і суми

$$\sum_{j\in\{0,1,\ldots,n\}\setminus\{i\}} \frac{Gm_j}{|\vec{r}_j-\vec{r}_i|^3}(\vec{r}_j-\vec{r}_i), \quad i=\overline{0,n},$$

очевидно, є неперервними на $\check{\Omega}_{n+1}$.

Також розглянемо відображення $P_{0,ji} : \check{\Omega}_2 \to \mathbb{R}_+$, $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,n}$, $i\neq j$, що відповідають правим частинам другого рівняння системи (28) і визначаються рівностями

$$P_{0,ji}(\vec{r}_j,\vec{r}_i) = \frac{|\vec{r}_j-\vec{r}_i|}{c}, \qquad i=\overline{0,n}, \quad j=\overline{0,n}, \quad i\neq j.$$

Ці відображення є елементами множини $\mathfrak{P}_{0,\check{\Omega}_2}$, оскільки вони неперервні і

$$\frac{|T_\varphi\vec{r}_j-T_\varphi\vec{r}_i|}{c} = \frac{|\vec{r}_j-\vec{r}_i|}{c}, \qquad i=\overline{0,n}, \quad j=\overline{0,n}, \quad i\neq j.$$

Тоді на підставі теореми 2 множина розв'язків системи (28) інваріантна відносно групи $\widetilde{G}_{n+1}(\mathbb{R}^2)$. Тому до цієї системи застосовна теорема 5. У статті [7] показано, що у випадку двох тіл $(n=1)$ система (28) може мати необмежені розв'язки, які є нестійкими. Ці розв'язки нестійкі і за теоремою 5, якщо їхні похідні першого порядку обмежені.

Аналогічне твердження справджується для системи (28) і при довільному $n\in\mathbb{N}$ (за теоремою 5).

Теорема 7. *Якщо система* (28) *має необмежений розв'язок, перша похідна якого обмежена, то він є нестійким.*

6. Зауваження та літературні вказівки. Задачу про інваріантність множин розв'язків рівнянь (2) – (4) відносно групи $\widetilde{G}_m(H)$ розглянуто вперше. Така задача, згідно з п. 5, потрібна як для класичної, так і для некласичної (зі скінченною швидкістю гравітації) небесної механіки і є корисною, наприклад, для теорії диференціальних рівнянь. Звідси, зокрема, випливає, що множини задач, до яких застосовні наведені в пп. 3 і 4 результати, не є порожніми.

Запропонований у п. 4 метод доведення нестійкості необмежених розв'язків диференціальних рівнянь, різницевих рівнянь та рівнянь із відхилювальним аргументом у гільбертовому просторі з використанням інваріантності множин розв'язків цих рівнянь відносно групи $\widetilde{G}_m(H)$ є новим.

Очевидно, що замість систем (2) – (4) можна розглядати складніші системи. Твердження з пп. 3 і 4 та їхнє обґрунтування зберігаються і для них.

Виконання співвідношень (15) і (16) в теоремах 4 і 5 є природним. Наприклад, у небесній механіці, що використовує в якості математичної моделі руху n тіл систему (28) (див. [6, 7]), швидкість руху тіл не може бути більшою за швидкість руху світла c.

Теорема 7 є узагальненням відповідного твердження для двох тіл зі скінченною швидкістю гравітації (див. [7], п. 11).

Література

1. К. Морен, *Методы гильбертова пространства*, Мир, Москва (1965).
2. Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы*, Гостехиздат, Москва (1954).
3. А. Н. Годунов, *О теореме Пеано в банаховых пространствах*, Функцион. анализ и его прил., **9**, вып. 1, 59 – 60 (1975).
4. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, Москва (1970).
5. А. Д. Мышкис, *Лекции по высшей математике*, Наука, Москва (1969).
6. В. Ю. Слюсарчук, *Математична модель Сонячної системи з урахуванням швидкості гравітації*, Нелінійні коливання, **21**, № 2, 238 – 261 (2018).
7. В. Ю. Слюсарчук, *Некеплеровість та нестійкість руху двох тіл, спричинені скінченністю швидкості гравітації*, Нелінійні коливання, **21**, № 3, 397 – 419 (2018).
8. В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. Н. Нейштадт, *Математические аспекты классической и небесной механики*, УРСС, Москва (2002).
9. С. М. Копейкин, Э. Фомалонт, *Фундаментальный предел скорости гравитации и его измерение*, Земля и Вселенная, **3** (2004).

Одержано 02.08.19