DOI: 10.37863/umzh.v74i2.6885

УДК 519.61

П. Ф. Жук (Нац. авіац. ун-т, Київ)

МНОЖИНА РІВНЯ АСИМПТОТИЧНОЇ ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ МЕТОДУ НАЙШВИДШОГО СПУСКУ

The asymptotic rate of convergence of the method of steepest descent is considered as a function of the initial approximation. In this work, we study the level set of this rate, i.e., the set of initial approximations, for which it takes a given value. A method for constructing this set is proposed and its connected components are found.

Асимптотична швидкість збіжності методу найшвидшого спуску розглядається як функція від початкового наближення. У даній роботі вивчається множина рівня цієї швидкості, тобто множина початкових наближень, для яких вона має задане значення. Запропоновано спосіб побудови цієї множини і знайдено її компоненти зв’язності.

Вступ. Метод найшвидшого спуску (SD), запропонований Коші [1] для скінченновимірних просторів, є одним із найбільш відомих методів оптимізації та розв’язання операторних рівнянь. Канторович [2] узагальнив цей метод на нескінченновимірні простори. Теоретичне дослідження нелінійних ітераційних методів варіаційного типу (до яких відноситься і метод SD) викликає значні труднощі, оскільки їхні послідовні наближення вже через кілька ітерацій складним чином залежать від початкового наближення. Тому зазвичай обмежуються (див., наприклад, [3, 4]) оцінкою норми оператора переходу ітераційного процесу.

Але такий підхід для ряду практично важливих ітераційних методів є занадто грубим. Так, у роботах [5, 6] на підставі обчислювальних експериментів було показано, що зміна стратегії вибору ітераційного параметра градієнтного методу може істотно збільшувати його швидкість збіжності, однак обґрунтувати ці висновки на основі оцінок норм операторів переходу не вдалося.

Отже, актуальним завданням залишається розробка нових підходів до вивчення швидкості збіжності нелінійних ітераційних процесів. І навіть більше, потребує уточнення саме поняття швидкості збіжності як функції від початкового наближення.

Для методу SD при мінімізації квадратичного додатно визначеного функціонала таке уточнення можна здійснити на основі його асимптотичної поведінки. У статті [7] на підставі обчислювальних експериментів було висловлено припущення, що в цьому випадку послідовності нормованих градієнтів методу SD за парними і непарними ітераціями збігаються і їхні границі належать площині натягненої на власні вектори матриці функціонала, що відповідають найменшому і найбільшому власним значенням цієї матриці. Це припущення було доведено в статті [8]. На підставі цього результату в роботі [9] введено поняття асимптотичної швидкості збіжності методу SD і вказано суттєву за мірою Лебега область її значень (без доведення). Аналогічні результати для задач на власні значення було отримано в роботах [10 – 12].

У статті [13] Дж. Форсайт висловив припущення, що результат [8] можна узагальнити на s-кроковий метод SD (цю гіпотезу не доведено і не спростовано досі, див. [14]). Деякий прогрес в цьому напрямку було досягнуто в роботах [15 – 20]: у [16] описано множину граничних точок послідовностей нормованих градієнтів s-крокового методу, в [18, 19] доведено, що послідовності ітераційних параметрів цього методу за парними і непарними ітераціями збігаються, а в [20] детально розглянуто випадок $s = 2$.

Після появи новаторської роботи [6] увага до градієнтних методів значно зросла. В роботі [6] на підставі обчислювальних експериментів було показано, що шляхом зміни величини кроку можна значно збільшити швидкість збіжності методу SD. У наступних роботах (див., наприклад, [21 – 23] і наведену там бібліографію) багато зусиль було затрачено на виявлення причин і розробку нових стратегій вибору величини кроку для методів швидкого градієнтного спуску. При цьому теоретичні обґрунтування запропонованих стратегій в основному спиралися на роботи [8, 13]. Але, як зазначено в [24], нормовані градієнти таких методів демонструють хаотичну поведінку, що вимагає розробки нових теоретичних підходів до їх аналізу.

Зазначимо, що раніше подібний [6] результат було отримано у статті [5]. Там на підставі обчислювальних експериментів показано, що чергування ітерацій методу SD і методу мінімальних нев'язок (так званий двоступеневий градієнтний спуск) призводить до істотного прискорення цих методів, узятих окремо. Узагальненню та теоретичному аналізу двоступеневого градієнтного спуску присвячено роботу [25]. Там показано, що за допомогою оцінок норм операторів переходів спостережуване прискорення пояснити не можна.

У роботах [26, 27] асимптотичну швидкість збіжності методу SD було досліджено на неперервність і диференційовність. Доведено, що для майже всіх за мірою Лебега початкових наближень вона неперервна та неперервно диференційовна. Показано також, що точками розриву можуть бути лише точки з виродженням, тобто такі початкові наближення, які або самі, або їхні наступні наближення містять компоненти точного розв'язку. В роботі [28] вивчено властивості множини точок з виродженням і запропоновано спосіб їх побудови за допомогою введених там обернених операторів (зауважимо, що для методу SD в роботах [26 – 28] було використано спеціальну симплексну форму).

У даній роботі, що є продовженням робіт [26 – 28], вивчається множина рівня асимптотичної швидкості збіжності методу SD, тобто множина початкових наближень з фіксованим значенням цієї швидкості (на необхідність подібного дослідження вказувалося, наприклад, у [29]). У п. 2 запропоновано спосіб побудови цієї множини за допомогою обернених операторів, а в п. 3 визначено його структуру у вигляді компонент зв'язності і запропоновано спосіб їх побудови.

Перспективним напрямком для подальших досліджень є, на думку автора, поширення отриманих результатів на s-кроковий метод найшвидшого спуску.

1. Постановка задачі. Нехай H — скінченновимірний дійсний гільбертовий простор зі скалярним добутком (u, v) і нормою $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$, а $A\colon H \to H$ — лінійний самоспряжений і позитивно визначений оператор, спектр якого складається лише з простих власних значень (це припущення не є принциповим, але спрощує формулювання результатів).

Метод найшвидшого спуску (SD) розв'язання операторного рівняння $Au = f$, або, що те саме, мінімізації квадратичного функціонала $F(u) = 0{,}5(Au, u) - (f, u)$ в просторі H, задається рекурентним співвідношенням

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} - \tau_k w^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{1.1}$$

де $u^{(0)} \in H$ — довільне початкове наближення, $w^{(k)} = Au^{(k)} - f$ — нев'язка на k-й ітерації, а ітераційний параметр τ_k задовольняє умову мінімуму величини функціонала $F(u^{(k+1)}) =$

$= 0{,}5(Au^{(k+1)}, u^{(k+1)}) - (f, u^{(k+1)})$ і обчислюється за формулою

$$\tau_k = \frac{\|w^{(k)}\|^2}{(Aw^{(k)}, w^{(k)})}. \tag{1.2}$$

Метод SD має таку асимптотичну властивість [3]: якщо перше наближення $u^{(1)}$ не є точним розв'язком u^* рівняння $Au = f$, то існує числова послідовність

$$\tilde{\rho}_k(u^{(0)}) = \sqrt{\big(F(u^{(k+1)}) - F(u^*)\big) \,/ (F(u^{(k)}) - F(u^*))}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

яка монотонно не спадає і збігається.

Позначимо через $\tilde{\rho}_\infty(u^{(0)})$ її границю і визначимо на H функцію

$$\tilde{V}(u^{(0)}) = \begin{cases} \infty, & \text{якщо} \quad u^{(1)} = u^*, \\ -\ln \tilde{\rho}_\infty(u^{(0)}), & \text{якщо} \quad u^{(1)} \neq u^*, \end{cases} \tag{1.3}$$

яку будемо називати асимптотичною швидкістю збіжності методу SD.

Основним завданням даної роботи є вивчення множини рівня функції $\tilde{V}$, тобто множини початкових наближень із заданим значенням асимптотичної швидкості збіжності. Для вирішення цього завдання зручно представити метод найшвидшого спуску в симплексній формі.

Нехай $\{e_i, i = 1, 2, \ldots, n+1\}$ — ортонормована система власних векторів оператора A. Вибравши їх в якості базису простору H, ототожнимо цей простір з арифметичним простором $\mathbb{R}^{n+1}$. Позначимо через $S_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $S_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, S_n = (0, \ldots, 0, 1)$, $S_{n+1} = (0, \ldots, 0)$ вершини стандартного симплекса

$$\bar{S} = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1,\, x_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

простору $\mathbb{R}^n$, а через $S_\omega = \bar{S} \setminus \{S_1, \ldots, S_{n+1}\}$ симплекс $\bar{S}$ без вершин.

Нехай $\lambda_1 < \ldots < \lambda_{n+1}$ — власні значення оператора A (припускаємо, що вони прості; їх сукупність позначимо через Λ). Визначимо відображення $T \colon S_\omega \to S_\omega$ за формулою $\hat{x} = Tx$, де $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_{n+1} = 1 - x_1 - \ldots - x_n$, $\mu(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$, $\beta(x) = \sum_{i=1}^{n+1} (\mu(x) - \lambda_i)^2 x_i$, $\hat{x}_i = (\mu(x) - \lambda_i)^2 x_i / \beta(x)$, $i = 1, \ldots, n$, $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$. Подовжимо далі відображення T на весь симплекс $\bar{S}$, покладаючи $TS_i = S_i$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$.

Симплексною формою методу SD будемо називати ітераційний процес $x^{(k+1)} = Tx^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots$. Він тісно пов'язаний з ітераційним процесом (1.1), (1.2), а саме, якщо $x^{(0)} = \chi(w^{(0)}) \in S_\omega$, то

$$x^{(k)} = \chi(w^{(k)}), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1.4}$$

де відображення $\chi \colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \bar{S}$ задано формулою $x_i = w_i^2 \Big/ \sum_{j=1}^{n+1} w_j^2$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

З рівності (1.4) випливає, що послідовність

$$\rho_k(x^{(0)}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^{-1} \big(1 - \lambda_i \,/\, \mu(x^{(k)})\big)^2 x_i^{(k)} \Big/ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^{-1} x_i^{(k)}}$$

збігається при $x^{(0)} = \chi(w^{(0)}) \in S_\omega$ з послідовністю $\tilde{\rho}_k(u^{(0)})$ і

$$\tilde{V}(u^{(0)}) = V(x^{(0)}) = \begin{cases} \infty, & \text{якщо} \quad x^{(0)} \notin S_\omega, \\ -\ln \rho_\infty(x^{(0)}), & \text{якщо} \quad x^{(0)} \in S_\omega, \end{cases} \tag{1.5}$$

де $\rho_\infty(x^{(0)}) = \lim_{k\to\infty} \rho_k(x^{(0)})$.

Функцію V, визначену на симплексі $\bar{S}$ формулою (1.5), будемо називати асимптотичною швидкістю збіжності методу SD в симплексній формі. Таким чином, дослідження асимптотичної швидкості збіжності методу SD, заданої формулою (1.3), зводиться до вивчення функції V, заданої виразом (1.5).

Розглянемо асимптотичну поведінку методу SD в симплексній формі.

Нехай $1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n+1$ — деякі цілі числа. Позначимо через $\bar{S}_{i_1\ldots i_m}$ грань симплекса $\bar{S}$ з вершинами $S_{i_1}, \ldots, S_{i_m}$, через

$$S_{i_1\ldots i_m} = \left\{ x \mid x = \alpha_1 S_{i_1} + \ldots + \alpha_m S_{i_m},\, \alpha_p > 0,\, p = 1, \ldots, m,\, \sum_{p=1}^{m} \alpha_p = 1 \right\}$$

внутрішність цієї грані, через $S = S_{1\ldots n+1}$ внутрішність симплекса $\bar{S}$, а через $\partial S = \bar{S} \setminus S$ його поверхню. З означення відображення T випливає, що $T\bar{S}_{i_1\ldots i_m} \subseteq \bar{S}_{i_1\ldots i_m}$ і, крім того, нерухомі точки відображення T^2 утворюють множину $\bigcup_{1\le i<j\le n+1} \bar{S}_{ij}$.

Асимптотична поведінка методу SD в симплексній формі випливає з результатів роботи [8] і співвідношення (1.4): якщо $x \in S_{i_1\ldots i_m}$, то послідовності точок $\{T^{2k}x,\, k = 0, 1, \ldots\}$, $\{T^{2k+1}x,\, k = 0, 1, \ldots\}$ збігаються і їхні границі є нерухомими точками відображення T^2:

$$x^\infty = \lim_{k\to\infty} T^{2k} \in S_{i_1 i_m}, \qquad \hat{x}^\infty = \lim_{k\to\infty} T^{2k+1} x = T x^\infty \in S_{i_1 i_m}. \tag{1.6}$$

Таким чином, якщо ввести відображення T^∞, задане формулою $T^\infty x = \lim_{k\to\infty} T^{2k} x$, то зі співвідношень (1.6) випливає, що на множині S_ω визначено функції ξ, i, j такі, що для будь-якого $x \in S_\omega$ мають місце рівності

$$\begin{aligned} x^\infty &= T^\infty x = \xi(x) S_{i(x)} + (1 - \xi(x)) S_{j(x)}, \\ \hat{x}^\infty &= T x^\infty = (1 - \xi(x)) S_{i(x)} + \xi(x) S_{j(x)}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

де $0 < \xi(x) < 1$, $1 \le i(x) < j(x) \le n+1$. Крім того, якщо визначити на множині S_ω функцію ρ:

$$\rho(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^{-1} \big(1 - \lambda_i \,/\, \mu(x)\big)^2 x_i \Bigg/ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^{-1} x_i},$$

де $x_{n+1} = 1 - x_1 - \ldots - x_n$, $\mu(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$, то з монотонності послідовності $\rho_k(x^{(0)})$ і рівності (1.7) випливає, що для будь-якого $x \in S_\omega$ справджуються співвідношення

$$\begin{gathered} \rho(x) \le \rho(Tx) \le \ldots \le \rho(T^k x) \le \ldots \to \rho_\infty(x) = \rho(x^\infty) = \rho(Tx^\infty), \\ \rho_\infty(x) = \gamma(x) \Big/ \sqrt{\gamma^2(x) + \lambda_{i(x)} \lambda_{j(x)}}, \end{gathered} \tag{1.8}$$

де $\gamma(x) = (\lambda_{j(x)} - \lambda_{i(x)})\sqrt{\xi(x)(1-\xi(x))}$. Зокрема,

$$V(x) = V(T^k x) = V(x^\infty), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Тут і далі будемо припускати що $n \geq 2$ і $\min_{i=2,3,\ldots,n} \left|(\lambda_1 + \lambda_{n+1})/2 - \lambda_i\right|$ досягається лише на одному індексі i (який позначимо через i^0) і $\lambda \equiv \lambda_{i^0} \leq (\lambda_1 + \lambda_{n+1})/2$ (це припущення не обмежує загальності результатів, але спрощує запис).

Позначимо

$$\rho_{\max} = (\lambda_{n+1} - \lambda_1)/(\lambda_{n+1} + \lambda_1), \qquad V_{\min} = -\ln \rho_{\max},$$

$$\gamma = \lambda_1 \lambda_{n+1}/(\lambda(\lambda_1 + \lambda_{n+1} - \lambda)), \qquad \rho_{\min} = \sqrt{(1-\gamma)/(1+\gamma)},$$

$$V_{\max} = -\ln \rho_{\min}, \qquad \Delta = [V_{\min}, V_{\max}), \qquad \bar{\Delta} = [V_{\min}, V_{\max}].$$

Зауважимо, що $V_{\min}$ — мінімальне значення функції V на симплексі $\bar{S}$ (див. [26], (1.16)), а $\bar{\Delta}$ — суттєва (за мірою Лебега) область значень цієї функції на $\bar{S}$ [26] (теорема 2.1).

Нам будуть потрібні також множини

$$S^* = \left\{ x \in \bar{S} \mid 0 < x_1,\, x_1 + \ldots + x_n < 1 \right\}, \qquad S_* = \bar{S} \setminus S^*, \qquad \mathcal{M} = \left\{ x \in S^* \mid V(x) \in \Delta \right\}.$$

З [26] (формула (2.1)) маємо, що $S \subset S^* \subset \bar{S}$, $S_* \subset \partial S$, $TS^* = S^*$, $TS_* = S_*$, $T^\infty S^* = S_{1,n+1}$.

Нехай x — довільна точка симплекса $\bar{S}$. Розглянемо ітераційну послідовність $T^k x$, $k = 0, 1, \ldots$. Можливі два випадки.

1. Існує скінченне число $k \in \{0, 1, \ldots\}$ таке, що $T^k x \in \partial S$. У цьому випадку існує єдине число

$$k(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \in \partial S, \\ p, & \text{якщо} \quad T^{p-1}x \in S, \quad T^p x \in \partial S, \quad p \geq 1, \end{cases}$$

яке будемо називати номером виродження точки x, а саму точку x — вектором із виродженням. При $k(x) = 0$ вектор x будемо називати виродженим, а при $k(x) \geq 1$ — вектором, що вироджується. Позначимо через $\bar{\mathcal{V}}$ множину векторів із виродженням, а через $\mathcal{V}$ множину векторів, що вироджуються. Оскільки множиною вироджених векторів є ∂S, справджуються рівності

$$\bar{\mathcal{V}} = \partial S \cup \mathcal{V}, \qquad \partial S \cap \mathcal{V} = \varnothing.$$

2. Для будь-якого скінченного числа $k \in \{0, 1, \ldots\}$ $T^k x \in S$. Такий вектор x будемо називати вектором без виродження; множину всіх векторів без виродження позначимо через $\mathcal{U}$. Очевидно, що

$$\bar{S} = \partial S \cup \mathcal{V} \cup \mathcal{U}.$$

2. Побудова множини рівня. Під множиною рівня c функції V будемо розуміти множину

$$\bar{V}^{-1}(c) = \left\{ x \in \bar{S} \mid V(x) = c \right\},$$

де c — довільне дійсне число.

Задача побудови множини $\bar{V}^{-1}(c)$ рекурсивна. Справді, запишемо $\bar{V}^{-1}(c)$ у вигляді об'єднання двох неперетинних множин $X = \bar{V}^{-1}(c) \cap S^*$ і $Y = \bar{V}^{-1}(c) \cap S_*$. Оскільки за означенням

$S_* = \{\, x \in \bar{S} \mid x_1 = 0 \,\} \cup \{\, x \in \bar{S} \mid x_1 + \ldots + x_n = 1 \,\}$, то S_* — замкнена множина, що є об'єднанням двох $(n-1)$-вимірних граней симплекса $\bar{S}$.

Таким чином, задача побудови множини рівня для n-вимірного симплекса $\bar{S}$ зводиться до побудови множини X і множини рівня для $(n-1)$-вимірного симплекса. Тому далі об'єктом дослідження буде множина $V^{-1}(c) = \{x \in S^* \mid V(x) = c\}$, яку будемо також називати множиною рівня функції V (на множині S^*).

Оскільки $V_{\min}$ — мінімальне значення функції V на симплексі $\bar{S}$, то множина $V^{-1}(c)$ буде порожньою при $c < V_{\min}$. Тому цікавим є лише випадок $c \in [V_{\min}, \infty)$. У цьому випадку (див. (1.6)) множина $V^{-1}(c) \cap S_{1,n}$ складається з двох точок: x_c і $\hat{x}_c = Tx_c$ (при $c = V_{\min}$ вони збігаються).

Виходячи зі співвідношень (1.7), (1.8), множину $V^{-1}(c)$ можна виразити через множини рівня функції ξ, визначеної в (1.7):

$$V^{-1}(c) = \xi^{-1}(x_c) \cup \xi^{-1}(\hat{x}_c), \tag{2.1}$$

де $\xi^{-1}(y) = \big\{\, x \in S^* \mid \xi(x) = \xi(y) \big\}$. Зауважимо, що множини $\xi^{-1}(x_c),\ \xi^{-1}(\hat{x}_c)$ не перетинаються при $c \neq V_{\min}$ і збігаються при $c = V_{\min}$.

Будова множини рівня якісно змінюється в залежності від того, чи належить значення c суттєвій області значень функції V чи ні. Тому розглянемо два випадки.

1. Припустимо спочатку, що $c \in \Delta$. Покажемо, що в цьому випадку рівняння

$$\xi(x) = \xi(x_c) \tag{2.2}$$

визначає неявну функцію в околі точки x_c.

Позначимо

$$x_{1c} = \xi(x_c), \qquad \mathbb{R}^n_+ = \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0,\, i = 1, \ldots, n\big\}, \qquad \mathbb{R}^{n-1}_1 = \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\big\},$$
$$K_\varepsilon = \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{1c} - \varepsilon < x_1 < x_{1c} + \varepsilon, -\varepsilon < x_i < \varepsilon,\, i = 2, \ldots, n\big\}, \qquad K^+_\varepsilon = K_\varepsilon \cap \mathbb{R}^n_+.$$

За лемою 2.4 [26] множина $\mathcal{M}$ відкрита в $\bar{S}$, отже, для деякого $\varepsilon > 0$ $K^+_\varepsilon \subseteq \mathcal{M}$. Тоді з [27] випливає, що $\xi \in C^1(K^+_\varepsilon)$. Тому (див., наприклад, [30, с. 127]) існує розширення $\bar{\xi}$ функції ξ на область K_ε зі збереженням класу гладкості. При цьому з [27] випливає рівність $\bar{\xi}'_{x_1}(x_c) = 1$, тобто для функції $\bar{\xi}$ в точці x_c виконано умови теореми про неявну функцію. За цією теоремою рівняння (2.2) локально розв'язне відносно x_1:

$$x_1 = \zeta_c(\tilde{x}), \tag{2.3}$$

де $\tilde{x} = (0, x_2, \ldots, x_n) \in \tilde{O}(\delta, 0) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}_1$, $\tilde{O}\,(\delta, 0)$ — окіл нуля в просторі $\mathbb{R}^{n-1}_1$ (відкрита куля радіуса δ), а функція $\zeta_c \in C^1(\tilde{O}(\delta, 0))$.

Теорема 2.1. *Якщо $c \in \Delta$, то в деякому околі $O(x_c)$ точки x_c множина $V^{-1}(c)$ є $(n-1)$-вимірною поверхнею класу гладкості C^1, що задана рівнянням* (2.3).

Доведення. Для досить малих $\varepsilon > 0$ множина рівня $\xi^{-1}(x_c)$ в околі $O(\varepsilon, x_c)$ задається рівнянням (2.3) і є $(n-1)$-вимірною поверхнею класу гладкості C^1.

При $x_c = \hat{x}_c$ маємо $V^{-1}(c) = \xi^{-1}(x_c)$, отже, твердження теореми є правильним.

Припустимо тепер, що $x_c \neq \hat{x}_c$. Тоді існує $\varepsilon > 0$, при якому множини $\xi^{-1}(\hat{x}_c)$ і $O(\varepsilon, x_c)$ не перетинаються. Справді, в іншому випадку існувала б послідовність $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ точок з множини $\xi^{-1}(\hat{x}_c)$, яка б збігалася до точки x_c. Але тоді внаслідок неперервності функції ξ при $c \in \Delta$ (див. [26], теорема 3.1) послідовність $\xi(x^{(1)}), \xi(x^{(2)}), \ldots$ збігалась би до $\xi(x_c)$, що суперечить умові $x_c \neq \hat{x}_c$. Таким чином, необхідне значення $\varepsilon > 0$ існує. Твердження теореми тепер випливає з розвинення (2.1).

Теорему 2.1 доведено.

***Зауваження* 2.1.** Теорема 2.1 справедлива і для точки $\hat{x}_c$.

Спираючись на теорему 2.1, побудуємо множину $V^{-1}(c)$ за допомогою багатозначного оператора T^{-1} (див. [28], теорема 1). Покладемо

$$\bar{G} = \tilde{O}\,(\delta, 0) \cap \mathbb{R}^n_+, \qquad \bar{\Sigma}^o = \big\{ \big(\zeta_c(\tilde{x}), \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n\big) \mid \tilde{x} = (0, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n) \in \bar{G} \big\}.$$

Теорема 2.2. *Якщо* $c \in \Delta$, *то*

$$V^{-1}(c) = \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k} \bar{\Sigma}^o. \tag{2.4}$$

Доведення. Припустимо, що точка $x \in V^{-1}(c)$. Тоді або $T^{2k}x \to x_c$, або $T^{2k+1}x \to x_c$ при $k \to \infty$. Отже, при деякому цілому невід'ємному числу m точка $T^m x$ потрапить в окіл $O(x_c)$ точки x_c, що задовольняє теорему 2.1. Оскільки $T^m x \in V^{-1}(c)$, то за теоремою 2.1 $T^m x \in \bar{\Sigma}^o$, тобто $x \in T^{-m}\bar{\Sigma}^o$.

Припустимо тепер, що точка $x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}\bar{\Sigma}^o$. Тоді $x \in T^{-m}\bar{\Sigma}^o$ при деякому числу m, тобто $T^m x \in \bar{\Sigma}^o$. За теоремою 2.1 $\bar{\Sigma}^o \subseteq V^{-1}(c)$, отже, $x \in V^{-1}(c)$.

Теорему 2.2 доведено.

2. Розглянемо тепер випадок $c \in [V_{\max}, \infty)$. За означенням множини $\mathcal{M}$ маємо $V^{-1}(c) \cap \mathcal{M} = \varnothing$, і з [27] випливає, що функція V в цьому випадку в будь-якій точці множини рівня $V^{-1}(c)$ не диференційовна. Оскільки за теоремою 3.1 [26] $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$, то

$$V^{-1}(c) \subseteq \bar{\mathcal{V}}.$$

Отже, при $c \in [V_{\max}, \infty)$ будь-яка точка x множини рівня $V^{-1}(c)$ є вектором з виродженням, тобто або вона сама знаходиться на поверхні симплекса $\bar{S}$, або там знаходиться деяка її ітерація $T^k x$. Множину рівня в цьому випадку запишемо у вигляді

$$V^{-1}(c) = V^{-1}_{\partial S}(c) \cup V^{-1}_{S}(c),$$

де $V^{-1}_{\partial S}(c) = V^{-1}(c) \cap \partial S$, $V^{-1}_{S}(c) = V^{-1}(c) \cap S$. Множина $V^{-1}_{\partial S}(c)$ є слідом множини $V^{-1}(c)$ на поверхні симплекса $\bar{S}$, а тому складається з множин рівня функції V на $(n-1)$-вимірних симплексах (гранях симплекса $\bar{S}$).

Розглянемо множину $V^{-1}_{S}(c)$. Вона складається з векторів, що вироджуються. Вкажемо спосіб її побудови за припущення, що множина $V^{-1}_{\partial S}(c)$ є відомою.

Нехай $y \in V^{-1}_{\partial S}(c)$ — деяка внутрішня точка деякої $(n-1)$-вимірної грані симплекса $\bar{S}$, характеристичне рівняння якої (див. [28], (2.6)) має корінь з Λ (множину таких точок позначимо через $\mathcal{B}_{\partial S}$). Тоді рівняння $Tx = y$ має нескінченно багато розв'язків, що задаються формулою (2.11) [28] і утворюють півінтервал $x = x(\alpha)$, $\alpha \in [0, \infty)$. Позначимо через $X(y)$ інтервал $x = x(\alpha)$, $\alpha \in (0, \infty)$, а через $\mathcal{B}_S$ множину

$$\mathcal{B}_S = \bigcup_{y \in \mathcal{B}_{\partial S}} X(y).$$

Доведемо, що множину $V_S^{-1}(c)$ можна записати у вигляді

$$V_S^{-1}(c) = \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}\mathcal{B}_S. \tag{2.5}$$

Справді, припустимо спочатку, що точка $x \in V_S^{-1}(c)$. Тоді $x \in \mathcal{V}$, отже, $T^{k(x)-1}x \in S$, $T^{k(x)}x \in \partial S$, де $k(x)$ — номер виродження точки x. Покладемо $z = T^{k(x)-1}x$, $y = Tz$. Оскільки точка y належить внутрішності деякої $(n-1)$-вимірної грані симплекса $\bar{S}$, то $y \in V_{\partial S}^{-1}(c)$. Далі, оскільки $Tz = y$, $z \in S$, $y \in \partial S$, то $\mu(z) \in \Lambda$, тобто характеристичне рівняння для точки y має корінь з Λ. Таким чином, $y \in \mathcal{B}_{\partial S}$ і $z \in X(y) \subseteq \mathcal{B}_S$, отже, $x \in T^{-(k(x)-1)}\mathcal{B}_S$.

Припустимо тепер, що точка $x \in T^{-k}\mathcal{B}_S$ при деякому невід'ємному числу k. Тоді $T^k x \in \mathcal{B}_S$, отже, $T^k x \in X(y)$ для деякого $y \in \mathcal{B}_{\partial S}$. З означення інтервалу $X(y)$ випливає, що $T^k x \in S$, $T^{k+1}x = y \in \partial S$, отже, $x \in \mathcal{V}$ і, оскільки $y \in V_{\partial S}^{-1}(c)$, то $x \in V_S^{-1}(c)$. Рівність (2.5) доведено.

3. Структура множини рівня. Формула (2.4) дозволяє побудувати множину рівня асимптотичної швидкості збіжності методу SD, але не показує структури цієї множини. Знайдемо компоненти зв'язності множини $V^{-1}(c)$.

Позначимо через G внутрішність множини $\bar{G}$ в топології простору $\mathbb{R}^{n-1}$. Покладемо $\partial G = \bar{G} \setminus G$, $\Sigma^o = \Big\{\big(\zeta_c(\tilde{x}), \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n\big) \mid \tilde{x} = (0, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n) \in G\Big\}$, $\partial\Sigma^o = \bar{\Sigma}^o \setminus \Sigma^o$. Тоді

$$\Sigma^o \subseteq S, \qquad \partial\Sigma^o \subseteq \partial S, \qquad \bar{\Sigma}^o = \Sigma^o \cup \partial\Sigma^o. \tag{3.1}$$

З (2.4), (3.1) маємо

$$V^{-1}(c) = \Sigma \cup \partial\Sigma, \tag{3.2}$$

де $\Sigma = \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}\Sigma^o$, $\partial\Sigma = \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}\partial\Sigma^o$.

Доведемо, що множина $\partial\Sigma$ не залежить від вибору околу $\tilde{O}(\delta, 0)$ (хоча множини Σ^o, $\partial\Sigma^o$ залежать).

Лема 3.1. *Якщо $c \in \Delta$, то множина $\partial\Sigma$ дорівнює $V^{-1}(c) \cap \bar{\mathcal{V}}$ і не залежить від вибору околу $\tilde{O}(\delta, 0)$.*

Доведення. Припустимо, що точка $x \in \partial\Sigma$. Тоді $x \in V^{-1}(c)$ і для деякого числа $k \in \{0, 1, \ldots\}$ $T^k x \in \partial\Sigma^o$. Зі співвідношень (3.1) випливає, що $T^k x \in \partial S$, тому $x \in \bar{\mathcal{V}}$. Отже, $x \in V^{-1}(c) \cap \bar{\mathcal{V}}$.

Припустимо тепер, що точка $x \in V^{-1}(c) \cap \bar{\mathcal{V}}$. Оскільки $x \in \bar{\mathcal{V}}$, то $T^k x \in \partial S$ при $k \geq k(x)$, де $k(x)$ — номер виродження точки x. Далі, оскільки $x \in V^{-1}(c)$, то і $T^{k(x)}x \in V^{-1}(c)$. Але тоді за теоремою 2.2 існує число $m \in \{0, 1, \ldots\}$ таке, що $T^m\big(T^{k(x)}x\big) \in \bar{\Sigma}^o$. Отже, $T^{k(x)+m}x \in \partial\Sigma^o$, тобто $x \in \partial\Sigma$.

Таким чином, $\partial\Sigma = V^{-1}(c) \cap \bar{\mathcal{V}}$. Залишилося зазначити, що права частина цієї рівності не залежить від вибору околу $\tilde{O}(\delta, 0)$, отже, і множина $\partial\Sigma$ не залежить від вибору цього околу.

Лему 3.1 доведено.

Множина Σ, взагалі кажучи, залежить від вибору околу $\tilde{O}(\delta, 0)$. Покажемо, що за винятком скінченного числа значень $c \in \Delta$ окіл $\tilde{O}(\delta, 0)$ можна вибрати так, щоб множини Σ і $\partial\Sigma$ не перетиналися (зауважимо, що це твердження не випливає з того, що не перетинаються множини Σ^o і $\partial\Sigma^o$).

Розглянемо множину $\{\, x \in T^{\infty}\mathcal{M} \mid \mu(x) \in \Lambda \,\}$. Оскільки $n \geq 2$, то ця множина непорожня і скінченна; позначимо її елементи через $x^{(1)}, \ldots, x^{(l)}$, $1 \leq l \leq n-1$ $\big($це точки вигляду $\big((\lambda_{n+1} - \lambda_i)/(\lambda_{n+1} - \lambda_1), 0, \ldots, 0\big)\big)$. Покладемо

$$c_i = V(x^{(i)}), \quad i = 1, \ldots, l, \qquad \Delta^* = \Delta \setminus \{c_1, \ldots, c_l\}.$$

Лема 3.2. *Якщо* $c \in \Delta^*$, *то існує окіл* $\tilde{O}(\delta, 0)$ *такий, що* $\Sigma \cap \partial\Sigma = \varnothing$.

Доведення. Оскільки $c \in \Delta^*$, то $x_c, \hat{x}_c \notin \{\, x^{(1)}, \ldots, x^{(l)}\}$ і $\mu(x_c), \mu(\hat{x}_c) \notin \Lambda$. Тому існують околи $O_1\big(x_c\big)$ і $O\,(\hat{x}_c)$ відповідних точок такі, що

$$\mu(x) \notin \Lambda \quad \forall x \in O_1(x_c) \cup O(\hat{x}_c). \tag{3.3}$$

За наслідком 2.2 [26] існує окіл $O_2(x_c)$ точки x_c такий, що $T^k O_2(x_c) \subseteq O_1(x_c) \cup O(\hat{x}_c)$, $k = 0, 1, \ldots$. Тому зі співвідношення (3.3) випливає, що

$$S \cap O_2(x_c) \cap \bar{\mathcal{V}} = \varnothing. \tag{3.4}$$

Покладемо $O_3(x_c) = O_2(x_c) \cap O(x_c)$, де $O\big(x_c\big)$ — окіл, який гарантує теорема 2.1, і виберемо окіл $\tilde{O}(\delta, 0)$ так, щоб $\bar{\Sigma}^o \subseteq O_3(x_c)$. Тоді з рівності (3.4) випливає, що $\Sigma^o \cap \bar{\mathcal{V}} = \varnothing$. Це означає, що і $\Sigma \cap \bar{\mathcal{V}} = \varnothing$, оскільки для будь-якої точки $x \in \Sigma \cap \bar{\mathcal{V}}$ існує таке число $k \in \{0, 1, \ldots\}$, що $T^k x \in \Sigma^o \cap \bar{\mathcal{V}}$. Залишилось зауважити, що за лемою 3.1 $\partial\Sigma \subseteq \bar{\mathcal{V}}$.

Лему 3.2 доведено.

Лема 3.3. *Якщо* $c \in \Delta$ *і* $\Sigma \cap \partial\Sigma = \varnothing$, *то* $\Sigma \subseteq \mathcal{U}$.

Доведення проведемо від супротивного. Припустимо, що точка $x \in \Sigma \setminus \mathcal{U}$. Тоді $x \in \bar{\mathcal{V}}$ і за лемою 3.1 $x \in \partial\Sigma$, тобто $\Sigma \cap \partial\Sigma \neq \varnothing$. Прийшли до суперечності.

Лема 3.4. *Якщо* $c \in \Delta$, *то існує окіл* $\tilde{O}\,(\delta, 0)$ *такий, що для будь-якої точки* $x \in \Sigma$ *маємо* $\xi'(x) \neq 0$.

Доведення. Оскільки $c \in \Delta$, то $\Sigma \subseteq V^{-1}(c) \subseteq \mathcal{M}$. Отже, згідно з [27], похідна $\xi'(x)$ існує і неперервна в будь-якій точці $x \in \Sigma$. Оскільки $\xi'_{x_1}(x_c) = 1$, то $\xi'(x_c) \neq 0$ й існує окіл $\tilde{O}(\delta, 0)$ такий, що $\xi'(x) \neq 0$ на множині Σ^o. Покажемо, що для цього околу $\tilde{O}(\delta, 0)$ похідна $\xi'(x)$ не дорівнює нулю і на множині Σ.

Припустимо протилежне: $\xi'(x) = 0$ для деякої точки $x \in \Sigma$. З означення множини Σ випливає, що $T^k x \in \Sigma^o$ для деякого числа $k \in \{0, 1, \ldots\}$, тому

$$\xi'(T^k x) \neq 0. \tag{3.5}$$

Але, з іншого боку, $\xi'(x) = \xi'(T^k x)\mathcal{J}(x, T^k)$, отже,

$$\xi'(T^k x)\mathcal{J}(x, T^k) = 0. \tag{3.6}$$

Розглянемо матрицю Якобі $\mathcal{J}(x, T^k)$. Оскільки $T^k x \in \Sigma^o \subseteq S$, то

$$\Lambda(x, k) = \big\{\mu(T^i x),\, i = 0, 1, \ldots, k-1\big\} \cap \Lambda = \varnothing,$$

отже, за теоремою 4 [28] матриця $\mathcal{J}(x, T^k)$ невироджена. Таким чином, система лінійних однорідних рівнянь (3.6) має лише тривіальний розв'язок $\xi'(T^k x) = 0$, що суперечить нерівності (3.5).

Лему 3.4 доведено.

***Зауваження* 3.1.** Припустимо, що $\Sigma \cap \partial\Sigma = \varnothing$. Тоді з леми 3.3 випливає, що $\Sigma \subseteq \mathcal{U}$. Тому матриця Якобі $\mathcal{J}(x, T^k)$ невироджена для будь-яких $x \in \Sigma$ і $k \in \{0, 1, \ldots\}$ [28] (лема 2). Візьмемо довільну точку $x \in \Sigma$. Оскільки $\xi'(x_c) \neq 0$, то для досить великого числа k також $\xi'(T^k x) \neq 0$. Але тоді з невиродженості матриці $\mathcal{J}(x, T^k)$ випливає, що $\xi'(x) \neq 0$. Тобто з умови $\Sigma \cap \partial\Sigma = \varnothing$ маємо, що $\xi'(x) \neq 0 \ \forall x \in \Sigma$.

Перейдемо тепер до диз'юнктивного розвинення множини Σ при умові, що $c \in \Delta^*$, а окіл $\tilde{O}\,(\delta, 0)$ такий, що $\Sigma \cap \partial\Sigma = \varnothing$.

Оскільки $c \in \Delta^*$, то $\mu(x_c), \mu(\hat{x}_c) \notin \Lambda$ й існують числа $i^{(1)}, i^{(2)} \in \{1, 2, \ldots, n\}$ такі, що $\mu(x_c) \in \left(\lambda_{i^{(1)}},\ \lambda_{i^{(1)}+1}\right)$, $\mu(\hat{x}_c) \in \left(\lambda_{i^{(2)}},\ \lambda_{i^{(2)}+1}\right)$. На множині S визначено обернені оператори $T^{-1}_{i^{(1)}}$, $T^{-1}_{i^{(2)}}$ та їх добуток $L = T^{-1}_{i^{(1)}} T^{-1}_{i^{(2)}} : S \to S$. Покладемо

$$\mathcal{E}^o = \Sigma^o, \qquad \mathcal{E}^{k+1} = L\mathcal{E}^k, \quad k = 0, 1, \ldots,$$
$$\mathcal{E} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{E}^k. \tag{3.7}$$

Лема 3.5. *Якщо $c \in \Delta^*$ і $\Sigma \cap \partial\Sigma = \varnothing$, то $\mathcal{E} \subseteq \Sigma$.*

Доведення. Припустимо, що $x \in \mathcal{E}$. Тоді $x = L^k y$, де $y \in \Sigma^o$. Отже, $y = T^{2k} x \in \Sigma^o$, тобто $x \in T^{-2k}\Sigma^o \subseteq \Sigma$.

Лема 3.6. *Якщо $c \in \Delta^*$ і $\Sigma \cap \partial\Sigma = \varnothing$, то $\mathcal{E}$ є компонентою зв'язності множини Σ.*

Доведення. З означення множини Σ^o випливає, що вона зв'язна. Оскільки оператор L є неперервним на S, то і множини $\mathcal{E}^k$, $k = 0, 1, \ldots$, за побудовою, також є зв'язними. Покажемо, що

$$\mathcal{E}^k \cap \Sigma^o \neq \varnothing \quad \forall k = 1, 2, \ldots. \tag{3.8}$$

Справді, нехай $x^{(m)} \in \Sigma^o$, $m = 1, 2, \ldots$, — довільна збіжна до точки x_c послідовність, а $y^{(m)} = Lx^{(m)}$. Послідовність $y^{(m)}$ обмежена, оскільки розташована у множині S. Кожна її гранична точка y є, очевидно, розв'язком рівняння $T^2 y = x_c$, яке еквівалентне системі рівнянь $Tw = x_c$, $Ty = w$. За теоремою 1 [28] ця система рівнянь має єдиний розв'язок: $w = \hat{x}_c$, $y = x_c$. Отже, послідовність $y^{(m)} = Lx^{(m)}$, $m = 1, 2, \ldots$, збігається до точки x_c.

Аналогічно доводимо, що послідовності $L^k x^{(m)}$, $m = 1, 2, \ldots$, збігаються до точки x_c для будь-якого числа $k = 1, 2, \ldots$. Отже, для будь-якого $k = 1, 2, \ldots$ існує число m, що залежить від k, таке, що точки $x^{(m)}$, $L^k x^{(m)}$ належать множині Σ^o. Але тоді $L^k x^{(m)} \in \mathcal{E}^k \cap \Sigma^o$ і співвідношення (3.8) є правильним. З цього співвідношення і зв'язності множин $\mathcal{E}^k$, $k = 0, 1, \ldots$, випливає зв'язність множини $\mathcal{E}$.

Далі, з неперервності операторів T, L на S випливає, що для будь-якої точки x множини $\mathcal{E}$ існує окіл $O(x)$ такий, що $O(x) \cap \Sigma \subseteq \mathcal{E}$, тобто множина $\mathcal{E}$ є компонентою зв'язності множини Σ.

Лему 3.6 доведено.

Розглянемо поряд з множиною $\mathcal{E}$ множину $\hat{\mathcal{E}} = T\mathcal{E}$.

Лема 3.7. *Якщо $c \in \Delta^*$ і $\Sigma \cap \partial\Sigma = \varnothing$, то $\hat{\mathcal{E}}$ — зв'язна підмножина множини Σ і*

$$\mu(\mathcal{E}) \subseteq (\lambda_{i^{(1)}}, \lambda_{i^{(1)}+1}), \qquad \mu(\hat{\mathcal{E}}) \subseteq (\lambda_{i^{(2)}}, \lambda_{i^{(2)}+1}). \tag{3.9}$$

Доведення. Перше твердження випливає з леми 3.6 і неперервності оператора T на S. Далі, оскільки функція μ неперервна на симплексі $\bar{S}$, то множини $\mu(\mathcal{E}), \mu(\hat{\mathcal{E}})$ також зв'язні. Зазначимо, що точки x_c і $\hat{x}_c$ є граничними для множин $\mathcal{E}$ і $\hat{\mathcal{E}}$ відповідно, тому $\mu(\mathcal{E}) \cap (\lambda_{i^{(1)}}, \lambda_{i^{(1)}+1}) \neq \varnothing$, $\mu(\hat{\mathcal{E}}) \cap (\lambda_{i^{(2)}}, \lambda_{i^{(2)}+1}) \neq \varnothing$. Отже, якщо хоча б одне із включень (3.9) не виконано, то існує точка $x \in \mathcal{E} \cup \hat{\mathcal{E}}$, для якої $\mu(x) \in \Lambda$. Але тоді $x \in \bar{\mathcal{V}}$ і за лемою 3.3 $x \notin \Sigma$, що суперечить включенню $\mathcal{E} \cup \hat{\mathcal{E}} \subseteq \Sigma$.

Лему 3.7 доведено.

Лема 3.8. *Якщо* $c \in \Delta^*$ *і* $\Sigma \cap \partial\Sigma = \varnothing$, *то* $\hat{\mathcal{E}} = T\mathcal{E}$, $\mathcal{E} = T_{i^{(1)}}^{-1}\hat{\mathcal{E}}$, $\mathcal{E} = T\hat{\mathcal{E}}$, $\hat{\mathcal{E}} = T_{i^{(2)}}^{-1}\mathcal{E}$.

Доведення. За означенням $\hat{\mathcal{E}} = T\mathcal{E}$, отже, відображення $T\colon \mathcal{E} \to \hat{\mathcal{E}}$ є сюр'єктивним. Покажемо, що воно бієктивне.

Розглянемо рівняння $Tx = y$, де $y \in \hat{\mathcal{E}}$. Оскільки $y \in S$, то воно має n розв'язків: $x^{(j)}(y) = T_j^{-1}y$, $j = 1, \ldots, n$. За теоремою 2 [28] $\mu(x^{(j)}(y)) \in (\lambda_j, \lambda_{j+1})$, $j = 1, \ldots, n$, тому якщо $x^{(j)}(y) \in \mathcal{E}$, то з леми 3.7 випливає, що $j = i^{(1)}$.

Отже, відображення $T\colon \mathcal{E} \to \hat{\mathcal{E}}$ є бієктивним і перші дві рівності доведено.

Далі, з означення (3.7) множини $\mathcal{E}$ випливає, що $T^2\mathcal{E} = \mathcal{E}$, тому $T\hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E}$. Аналогічно попередньому випадку доводимо, що відображення $T : \hat{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}$ бієктивне і оберненим до нього є $T_{i^{(2)}}^{-1}$.

Лему 3.8 доведено.

Лема 3.9. *Якщо* $x_c \neq \hat{x}_c$, *то* $\mathcal{E} \cap \hat{\mathcal{E}} = \varnothing$, *інакше* $\mathcal{E} = \hat{\mathcal{E}}$.

Доведення. Оскільки $T^\infty\mathcal{E} = \{x_c\}$, $T^\infty\hat{\mathcal{E}} = \{\hat{x}_c\}$, то за умови $x_c \neq \hat{x}_c$ множини $\mathcal{E}$ і $\hat{\mathcal{E}}$, очевидно, не перетинаються.

Розглянемо випадок $x_c = \hat{x}_c$. Нехай x — довільна точка з множини $\mathcal{E}$. Оскільки послідовність $T^k x$, $k = 1, 2, \ldots$, збігається до точки x_c, то існує число m, яке залежить від x, таке, що $T^{2m+1}x \in \Sigma^o$. Тоді точка $L^m T^{2m+1}x$ належить множині $\mathcal{E}$. Але за лемою 3.8 $L^m T^{2m+1}x = Tx$, отже, $Tx \in \mathcal{E}$. Таким чином, $T\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}$, тобто $\hat{\mathcal{E}} \subseteq \mathcal{E}$. Далі, враховуючи, що $T^2\mathcal{E} = \mathcal{E}$, $T^2\mathcal{E} \subseteq T\mathcal{E}$, маємо $\mathcal{E} \subseteq \hat{\mathcal{E}}$. Отже, $\mathcal{E} = \hat{\mathcal{E}}$.

Лему 3.9 доведено.

Побудуємо всю сукупність компонент зв'язності множини Σ при $x_c \neq \hat{x}_c$ (випадок $x_c = \hat{x}_c$ легко зводиться до цього випадку).

З лем 3.6 – 3.9 випливає, що множини $\mathcal{E}$ і $\hat{\mathcal{E}}$ є компонентами зв'язності множини Σ. Назвемо їх компонентами зв'язності нульового рангу і покладемо $\mathfrak{B}_0 = \{\mathcal{E}\}$, $\hat{\mathfrak{B}}_0 = \{\hat{\mathcal{E}}\}$.

Далі, утворюємо множини $X_i = T_i^{-1}\mathcal{E}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i^{(2)}\}$, і $\hat{X}_i = T_i^{-1}\hat{\mathcal{E}}$, $i \in$ $\in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i^{(1)}\}$. Оскільки відображення $T\colon X_i \to \mathcal{E}$, $T\colon \hat{X}_i \to \hat{\mathcal{E}}$ є ізоморфізмами, то ці множини також є компонентами зв'язності множини Σ (відмінними від $\mathcal{E}$ і $\hat{\mathcal{E}}$). Назвемо їх компонентами зв'язності першого рангу і покладемо $\mathfrak{B}_1 = \big\{X_i,\, i \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i^{(2)}\}\big\}$, $\hat{\mathfrak{B}}_1 = \big\{\hat{X}_i,\, i \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i^{(1)}\}\big\}$.

Множини $\mathfrak{B}_1$, $\hat{\mathfrak{B}}_1$ містять по $n - 1$ різних компонент зв'язності першого рангу. Точки цих компонент не належать компонентам зв'язності нульового рангу, але відображаються на них оператором T.

Аналогічно утворюємо компоненти зв'язності другого рангу:

$$\mathfrak{B}_2 = \{T_i^{-1}X \mid i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ X \in \mathfrak{B}_1\}, \qquad \hat{\mathfrak{B}}_2 = \{T_i^{-1}\hat{X} \mid i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \hat{X} \in \hat{\mathfrak{B}}_1\}.$$

Множини $\mathfrak{B}_2$, $\hat{\mathfrak{B}}_2$ містять по $(n-1)n$ різних компонент зв'язності другого рангу. Точки цих компонент не належать компонентам зв'язності першого і нульового рангів, але відображаються на них операторами T і T^2 відповідно.

У загальному випадку компоненти зв'язності k-го рангу визначаються рекурентно:

$$\mathfrak{B}_k = \{T_i^{-1}X \mid i \in \{1,\ldots,n\},\, X \in \mathfrak{B}_{k-1}\}, \;\; \hat{\mathfrak{B}}_k = \{T_i^{-1}\hat{X} \mid i \in \{1,\ldots,n\},\, \hat{X} \in \hat{\mathfrak{B}}_{k-1}\}.$$

Множини $\mathfrak{B}_k$, $\hat{\mathfrak{B}}_k$ містять по $(n-1)n^{k-1}$ різних компонент зв'язності k-го рангу. Точки цих компонент не належать компонентам зв'язності менших рангів, але відображаються на них операторами T, $T^2,\ldots,T^k$ відповідно.

Позначимо через $\mathfrak{B}$ множину всіх компонент зв'язності множини Σ. Оскільки будь-яка точка x множини Σ належить компоненті зв'язності деякого рангу (тому що $T^k x \in \mathcal{E}$ для деякого натурального числа k), то

$$\mathfrak{B} = \bigcup_{k=0}^{\infty}(\mathfrak{B}_k \cup \hat{\mathfrak{B}}_k).$$

Таким чином, множина Σ складається зі зліченної множини $\mathfrak{B}$ непорожніх попарно неперетинних компонент зв'язності.

Теорема 3.1. *Якщо* $c \in \Delta^*$ *і* $\Sigma \cap \partial\Sigma = \varnothing$, *то множина рівня* $V^{-1}(c)$ *має зліченне диз'юнктивне розвинення*:

$$V^{-1}(c) = \bigcup_{X \in \mathfrak{B}} X \cup \partial\Sigma.$$

Доведення безпосередньо випливає з означення множини $\mathfrak{B}$ і розвинення (3.2).

Теорема 3.1 описує структуру і вказує алгоритм побудови множини $V^{-1}(c)$.

***Зауваження* 3.2.** З означення множин $\mathfrak{B}_k$ випливають рівності $T\mathfrak{B}_k = \mathfrak{B}_{k-1}$, $T\hat{\mathfrak{B}}_k = \hat{\mathfrak{B}}_{k-1}$, $k = 1,2,\ldots$, $T\mathfrak{B}_0 = \hat{\mathfrak{B}}_0$, $T\hat{\mathfrak{B}}_0 = \mathfrak{B}_0$, де дія оператора T поширена на множини $\mathfrak{B}_k$ за формулою $T\{X,Y,\ldots\} = \{TX,TY,\ldots\}$. Тому ітераційний процес методу найшвидшого спуску можна записати у вигляді переходів під дією оператора T:

$$\mathfrak{B}_k \rightarrowtail \mathfrak{B}_{k-1} \rightarrowtail \mathfrak{B}_{k-2} \rightarrowtail \ldots \rightarrowtail \mathfrak{B}_0 \rightleftarrows \hat{\mathfrak{B}}_0,$$

якщо початкове наближення належить компоненті зв'язності рангу k з множини $\mathfrak{B}_k$, і у вигляді переходів

$$\hat{\mathfrak{B}}_k \rightarrowtail \hat{\mathfrak{B}}_{k-1} \rightarrowtail \hat{\mathfrak{B}}_{k-2} \rightarrowtail \ldots \rightarrowtail \hat{\mathfrak{B}}_0 \rightleftarrows \mathfrak{B}_0,$$

якщо початкове наближення належить компоненті зв'язності рангу k з множини $\hat{\mathfrak{B}}_k$.

Література

1. A. Cauchy, *Méthode générale pour la résolution des systèmes d'équations simultanées*, Comptes Rend. Hebd. Seances Acad. Sci. Paris, **25**, 536 – 538 (1847).
2. Л. В. Канторович, *Функциональный анализ и прикладная математика*, Успехи мат. наук, **3**, № 6 (28), 89 – 185 (1948).
3. А. А. Самарский, Е. С. Николаев, *Методы решения сеточных уравнений*, Наука, Москва (1978).
4. J. M. Ortega, W. C. Rheinboldt, *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*, Acad. Press, New York, London (1970).

5. В. В. Ермаков, Н. Н. Калиткин, *Двухступенчатый градиентный спуск*, Журн. вычислит. математики и мат. физики, **20**, № 4, 1040 – 1045 (1980).
6. J. Barzilai, J. M. Borwein, *Two-point step size gradient methods*, IMA J. Numer. Anal., **8**, 141 – 148 (1988).
7. G. E. Forsythe, T. S. Motzkin, *Asymptotic properties of the optimum gradient method (abstract)*, Bull. Amer. Math. Soc., **57** (1951).
8. H. Akaike, *On a successive transformation of probability distribution and its application to the analysis of the optimum gradient method*, Ann. Inst. Statist. Math., **11**, 1 – 16 (1959).
9. И. В. Емелин, *О быстроте сходимости метода наискорейшего спуска*, Успехи мат. наук, **32**, № 1 (193), 163 – 164 (1977).
10. П. Ф. Жук, *Об асимптотических свойствах метода наискорейшего спуска в задачах на собственные значения*, Журн. вычислит. математики и мат. физики, **21**, № 2, 271 – 285 (1981).
11. П. Ф. Жук, В. Г. Приказчиков, *Эффективная оценка сходимости неявного итерационного метода в задачах на собственные значения*, Дифференц. уравнения, **18**, № 7, 1197 – 1202 (1982).
12. П. Ф. Жук, *Асимптотическая скорость сходимости метода наискорейшего спуска в задачах на собственные значения*, Журн. вычислит. математики и мат. физики, **24**, № 4, 605 – 607 (1984).
13. G. E. Forsythe, *On the asymptotic directions of the s-dimensional optimum gradient method*, Numer. Math., **11**, № 1, 57 – 76 (1968).
14. J. Liesen, *The Forsythe conjecture*, XXI Householder Symp. Numer. Linear Algebra. Book Abstracts, June 14 – 19, 249 – 250 (2020).
15. А. Ф. Заболоцкая, *Асимптотическое поведение s-шагового метода скорейшего спуска в гильбертовом пространстве*, Журн. вычислит. математики и мат. физики, **19**, № 1, 228 – 232 (1979).
16. П. Ф. Жук, *Асимптотические свойства s-шагового метода скорейшего спуска*, Журн. вычислит. математики и мат. физики, **22**, № 2, 269 – 279 (1982).
17. П. Ф. Жук, Л. Н. Бондаренко, *Об одной гипотезе Дж. Форсайта*, Мат. сб., **121 (163)**, № 4 (8), 435 – 453 (1983).
18. П. Ф. Жук, *Асимптотическое поведение s-шагового метода наискорейшего спуска в задачах на собственные значения в гильбертовом пространстве*, Мат. сб., **184**, № 12, 87 – 122 (1993).
19. П. Ф. Жук, *Асимптотическое поведение s-шагового метода наискорейшего спуска при минимизации квадратичного функционала в гильбертовом пространстве*, Журн. вычислит. математики и мат. физики, **35**, № 2, 163 – 177 (1995).
20. L. Pronzato, H. P. Wynn, A. Zhigljavsky, *A dynamical-system analysis of the optimum s-gradient algorithm*, Optimal Design and Related Areas in Optimization and Statistics, Springer, New York (2009), p. 39 – 80.
21. L. Pronzato, A. Zhigljavsky, *Gradient algorithms for quadratic optimization with fast convergence rates*, Comput. Optim. and Appl., **50**, 597 – 617 (2011).
22. R. De Asmundis, D. Di Serafino, F. Riccio, G. Toraldo, *On spectral properties of steepest descent methods*, IMA J. Numer. Anal., **33**, № 4, 1416 – 1435 (2013).
23. Y. Huang, Y. H. Dai, X. W. Liu, H. Zhang, *Gradient methods exploiting spectral properties*, Optim. Methods and Software, **35**, № 4, 681 – 705 (2020).
24. K. van den Doel, U. Ascher, *The chaotic nature of faster gradient descent methods*, J. Sci. Comput., **51**, 560 – 581 (2012).
25. Л. Н. Бондаренко, П. Ф. Жук, *Комбинированные итерационные методы вариационного типа*, Журн. вычислит. математики и мат. физики, **28**, № 9, 1283 – 1296 (1988).
26. П. Ф. Жук, А. А. Мусина, *Асимптотическая скорость сходимости двухслойного итерационного метода вариационного типа*, Укр. мат. журн., **12**, 1622 – 1635 (2013).
27. П. Ф. Жук, *Область диференційованості асимптотичної швидкості збіжності методу найшвидшого спуску*, Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики, **11**, № 4, 102 – 110 (2014).
28. П. Ф. Жук, А. А. Мусина, *Об операторе перехода метода наискорейшего спуска*, Мат. моделирование, **8**, 65 – 80 (2014).
29. В. С. Козякин, М. А. Красносельский, *О нескольких задачах, связанных с методом минимальных невязок*, Журн. вычислит. математики и мат. физики, **19**, № 2, 508 – 510 (1979).
30. В. П. Михайлов, *Дифференциальные уравнения в частных производных*, Наука, Москва (1976).

Одержано 21.08.21