DOI: 10.37863/umzh.v74i6.6887

УДК 517.5

Н. С. Ількевич (Житомир. держ. ун-т ім. І. Франка),
Є. О. Севостьянов (Житомир. держ. ун-т ім. І. Франка; Ін-т прикл. математики і механіки НАН України, Слов'янськ Донецької обл.)

ОДНОСТАЙНА НЕПЕРЕРВНІСТЬ СІМЕЙ ВІДОБРАЖЕНЬ З УМОВОЮ НОРМУВАННЯ В ТЕРМІНАХ ПРОСТИХ КІНЦІВ

We study mappings with branching that satisfy certain conditions of distortion for the modulus of paths families. Under the conditions that the domain of definition of mappings has a weakly flat boundary, the mapped domain is regular, and the majorant responsible for the distortion of modulus of the families of paths is integrable; it is proved that the families of all specified mappings with one normalization condition are equicontinuous in the closure of the given domain.

Вивчаються відображення з розгалуженням, які задовольняють деяку умову спотворення модуля сімей кривих. У випадку, коли область визначення відображень має слабко плоску межу, відображена область є регулярною, а мажоранта, яка відповідає за спотворення модуля сімей кривих, — інтегровною, доведено, що сім'ї вказаних відображень з однією умовою нормування є одностайно неперервними в замиканні вихідної області.

1. Вступ. Дану роботу присвячено відображенням з обмеженим і скінченним спотворенням, які активно вивчаються останнім часом (див., наприклад, [9 – 23]). Зокрема, дослідження пов'язані з проблематикою неперервного продовження відображень по простих кінцях. Активне вивчення цього питання відображено у класичних роботах [1 – 7]. Також зауважимо, що сучасний стан цих досліджень, які стосуються відображень з обмеженим і скінченним спотворенням, відображено, наприклад, у [8 – 15].

Нещодавно в наших спільних роботах ми дослідили випадки, в яких відображення з так званою оберненою нерівністю Полецького мають неперервне межове продовження, а їх сім'ї є одностайно неперервними як у внутрішніх, так і межових точках області (див., наприклад, [24 – 27]). У цій статті ми розглянемо ще один важливий випадок, коли відображення можуть мати розгалуження, а області мають складну структуру, при цьому відображення фіксують принаймні одну точку області. Зауважимо, що клас відображень з оберненою нерівністю Полецького включає в себе відображення з обмеженим спотворенням і відображення зі скінченним спотворенням довжини (див., наприклад, [16], теорема 3.2, [21], теорема 6.7.II, і [18], теорема 8.5).

Нехай $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$ і

$$A(y_0, r_1, r_2) = \{y \in \mathbb{R}^n \colon r_1 < |y - y_0| < r_2\}\,. \tag{1}$$

Для заданих множин $E,\ F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ і області $D \subset \mathbb{R}^n$ позначимо через $\Gamma(E, F, D)$ сім'ю всіх кривих $\gamma\colon [a, b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$ таких, що $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ і $\gamma(t) \in D$ при $t \in [a, b]$. Якщо $f : D \to \mathbb{R}^n$ — задане відображення, $y_0 \in f(D)$ і $0 < r_1 < r_2 < d_0 = \sup_{y\in f(D)} |y - - y_0|$, то через $\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)$ позначимо сім'ю всіх кривих γ в області D таких, що $f(\gamma) \in \in \Gamma(S(y_0, r_1), S(y_0, r_2), A(y_0, r_1, r_2))$. Нехай $Q\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ — вимірна за Лебегом функція, а $M(\Gamma)$ — модуль сімей кривих Γ (див., наприклад, [22], розд. 6). Будемо говорити, що f *задовольняє обернену нерівність Полецького* в точці $y_0 \in f(D)$, якщо співвідношення

$$M(\Gamma_f(y_0, r_1, r_2)) \le \int\limits_{f(D)\cap A(y_0,r_1,r_2)} Q(y)\, \eta^n(|y - y_0|)\, dm(y) \tag{2}$$

виконується для довільної вимірної за Лебегом функції $\eta\colon (r_1,r_2)\to[0,\infty]$ такої, що

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)\,dr\geq 1. \tag{3}$$

Зауважимо, що нерівності (2) є відомими в теорії квазірегулярних відображень і виконуються для них при $Q=N(f,D)K$, де

$$N(y,f,D)=\mathrm{card}\,\{x\in D\colon f(x)=y\}\,,$$
$$N(f,D)=\sup\limits_{y\in{\mathbb R}^n}\,N(y,f,D),$$

а $K\geq 1$ — деяка стала, яку можна обчислити як

$$K=\operatorname{ess\,sup}K_O(x,f),\quad K_O(x,f)=\left\|f'(x)\right\|^n/|J(x,f)|$$

при $J(x,f)\neq 0$, $K_O(x,f)=1$ при $f'(x)=0$ і $K_O(x,f)=\infty$ при $f'(x)\neq 0$, але $J(x,f)=0$ (див., наприклад, [16], теорема 3.2, або [21], теорема 6.7.II). Відображення $f\colon D\to{\mathbb R}^n$ називається *дискретним*, якщо прообраз $\left\{f^{-1}(y)\right\}$ кожної точки $y\in{\mathbb R}^n$ складається з ізольованих точок, і *відкритим*, якщо образ будь-якої відкритої множини $U\subset D$ є відкритою множиною в ${\mathbb R}^n$. Відображення f області D на D' називається *замкненим*, якщо $f(E)$ є замкненим в D' для будь-якої замкненої множини $E\subset D$ (див., наприклад, [23], розд. 3). Означення простого кінця, яке використовується нижче, наведено в роботі [28] (див. також [11–12]). Тут і далі $\overline{D}_P$ позначає поповнення області D її простими кінцями, а $E_D=\overline{D}_P\setminus D$ — множина всіх простих кінців у D. Говоримо, що обмежена область D в ${\mathbb R}^n$ *регулярна*, якщо D може бути квазіконформно відображена на область з локально квазіконформною межею, замикання якої є компактом в ${\mathbb R}^n$, крім того, кожен простий кінець $P\subset E_D$ є регулярним. Зауважимо, що замикання $\overline{D}_P$ регулярної області D є *метризовним*. При цьому, якщо $g\colon D_0\rightarrow D$ — квазіконформне відображення області D_0 з локально квазіконформною межею на область D, для $x,y\in \overline{D}_P$ покладемо

$$\rho(x,y):=\left|g^{-1}(x)-g^{-1}(y)\right|, \tag{4}$$

де для $x\in E_D$ елемент $g^{-1}(x)$ розуміється як деяка (єдина) точка межі D_0, коректно визначена з огляду на теорему 4.1 [19].

Межа області D називається *слабко плоскою* в точці $x_0\in\partial D$, якщо для кожного $P>0$ і для будь-якого околу U точки x_0 знайдеться окіл $V\subset U$ цієї ж точки такий, що $M(\Gamma(E,F,D))>P$ для будь-яких континуумів $E,F\subset D$, які перетинають ∂U і ∂V. Межа області D називається слабко плоскою, якщо відповідна властивість виконується в будь-якій точці межі D.

Сформулюємо тепер основний результат даної статті. Для цього для областей $D,D'\subset{\mathbb R}^n$, $n\geq 2$, точок $a\in D$, $b\in D'$ і вимірної за Лебегом функції $Q\colon D'\rightarrow[0,\infty]$ позначимо через $\mathfrak{S}_{a,b,Q}\left(D,D'\right)$ сім'ю всіх відкритих дискретних і замкнених відображень f області D на D', що задовольняють умову (2) для кожного $y_0\in D'$, до того ж $f(a)=b$.

Справджується таке твердження.

Теорема 1. *Припустимо, що область D має слабко плоску межу, жодна із зв'язних компонент якої не вироджена. Якщо $Q \in L^1(D')$ і область D' є регулярною, то будь-яке $f \in \mathfrak{S}_{a,b,Q}(D, D')$ неперервно продовжується до відображення $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}_P$, до того ж $\overline{f}(\overline{D}) = \overline{D'}_P$ і сім'я $\mathfrak{S}_{a,b,Q}\left(\overline{D}, \overline{D'}\right)$, яка складається з усіх продовжених відображень $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}_P$, одностайно неперервна в $\overline{D}$.*

***Зауваження* 1.** Теорему 1 можна застосувати для достатньо широкого спектра областей D'. Зокрема, за теоремою Рімана регулярною областю в $\mathbb{R}^2$ є будь-яка однозв'язна область, межа якої містить більше ніж одну точку. І навіть більше, кожна обмежена скінченно зв'язна плоска область є конформним образом області, межа якої складається зі скінченної кількості кіл і ізольованих точок (див., наприклад, [29], теорема V.6.2). Оскільки для конформних відображень ізольовані точки є усувними, то вихідна область може вважатися регулярною і без вироджених межових компонент.

2. Лема про континуум. Доведення основного результату ґрунтується на певних властивостях відображень зі збереженням діаметра прообразу деякого континуума. Наступну лему за деяких інших припущень на відображення і області, що розглядаються, було доведено в [24] (лема 2, пункт 5), [25] (лема 4.1) і [26] (лема 4.1). Нехай h — хордальна відстань в $\overline{\mathbb{R}^n}$ (див., наприклад, означення 12.1 в [22]).

Лема 1. *Нехай $n \geq 2$, D і D' — області в $\mathbb{R}^n$, до того ж D має слабко плоску межу, жодна компонента зв'язності якої не вироджується в точку, а область D' є регулярною. Нехай також A — невироджений континуум в D' і $\delta > 0$. Припустимо, що f_m — послідовність відкритих дискретних і замкнених відображень області D на D' з такою властивістю: для кожного $m = 1, 2, \ldots$ знайдеться континуум $A_m \subset D$, $m = 1, 2, \ldots$, такий, що $f_m(A_m) = A$ і $h(A_m) \geq \delta > 0$. Якщо кожне f_m задовольняє співвідношення* (2) *для кожного $y_0 \in D'$, до того ж $Q \in L^1(D')$, то знайдеться таке $\delta_1 > 0$, що*

$$h(A_m, \partial D) > \delta_1 > 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

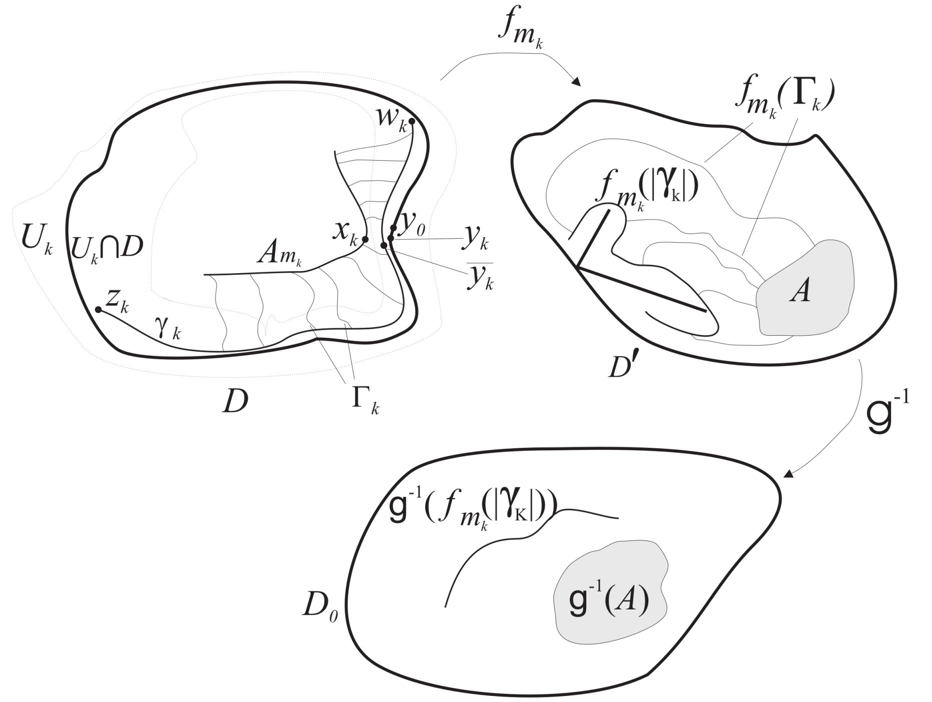
Доведення. Через компактність простору $\overline{\mathbb{R}^n}$ межа області D не порожня і є компактом, так що відстань $h(A_m, \partial D)$ коректно визначено.

Доведення проведемо від супротивного. Припустимо, що висновок леми не є правильним. Тоді для кожного $k \in \mathbb{N}$ знайдеться такий номер $m = m_k$, що $h(A_{m_k}, \partial D) < 1/k$. Можна вважати, що послідовність m_k зростає по k. Оскільки A_{m_k} — компакт, то знайдуться такі $x_k \in A_{m_k}$ і $y_k \in \partial D$, що $h(A_{m_k}, \partial D) = h(x_k, y_k) < 1/k$ (див. рисунок).

Оскільки ∂D — компактна множина, можемо вважати, що $y_k \to y_0 \in \partial D$ при $k \to \infty$. Тоді також $x_k \to y_0 \in \partial D$ при $k \to \infty$.

Нехай K_0 — компонента зв'язності ∂D, яка містить точку y_0. Очевидно, K_0 — континуум в $\overline{\mathbb{R}^n}$. Оскільки ∂D слабко плоска, за теоремою 1 в [31] відображення f_{m_k} має неперервне продовження $\overline{f}_{m_k} : \overline{D} \to \overline{D'}_P$. Нехай ρ — одна з метрик у (4) і $g : D_0 \to D'$ — квазіконформне відображення деякої області D_0 з локально квазіконформною межею на D', яке відповідає метриці ρ у (4). Оскільки $\overline{f}_{m_k}$ неперервне на компакті $\overline{D}$, відображення $\overline{f}_{m_k}$ є рівномірно неперервним у $\overline{D}$ щодо метрики ρ при кожному фіксованому k. Іншими словами, для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta_k = \delta_k(\varepsilon) < 1/k$, що

$$\rho\left(\overline{f}_{m_k}(x), \overline{f}_{m_k}(x_0)\right) < \varepsilon \quad \forall x, x_0 \in \overline{D}, \quad h(x, x_0) < \delta_k, \quad \delta_k < 1/k, \tag{5}$$



де h — хордальна метрика в $\overline{\mathbb{R}^n}$.

Виберемо $\varepsilon > 0$ так, щоб

$$\varepsilon < \frac{1}{2}\,\mathrm{dist}\left(\partial D_0, g^{-1}(A)\right), \tag{6}$$

де $\mathrm{dist}(A, B)$ позначає евклідову відстань між множинами A і B в $\mathbb{R}^n$. Позначимо $B_h(x_0, r) = \left\{x \in \overline{\mathbb{R}^n} : h(x, x_0) < r\right\}$. Для фіксованого $k \in \mathbb{N}$ покладемо

$$B_k := \bigcup_{x_0 \in K_0} B_h(x_0, \delta_k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Оскільки B_k — окіл континуума K_0, за лемою 2.2 [32] знайдеться такий окіл U_k множини K_0, що $U_k \subset B_k$ і $U_k \cap D$ зв'язна. Можна вважати, що U_k відкрита, так що $U_k \cap D$ є лінійно зв'язною (див. [18], пропозиція 13.1). Нехай $h(K_0) = m_0$. Тоді знайдуться такі $z_0, w_0 \in K_0$, що $h(K_0) = h(z_0, w_0) = m_0$. Отже, знайдуться послідовності $\overline{y_k} \in U_k \cap D$, $z_k \in U_k \cap D$ і $w_k \in U_k \cap D$ такі, що $z_k \to z_0$, $\overline{y_k} \to y_0$ і $w_k \to w_0$ при $k \to \infty$. Можна вважати, що

$$h(z_k, w_k) > m_0/2 \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Оскільки множина $U_k \cap D$ лінійно зв'язна, можемо з'єднати точки z_k, $\overline{y_k}$ і w_k, використавши деяку криву $\gamma_k \in U_k \cap D$. Як завжди, позначаємо через $|\gamma_k|$ носій (образ) кривої γ_k в області D. Тоді $f_{m_k}(|\gamma_k|)$ — компактна множина в D'. Якщо $x \in |\gamma_k|$, то знайдеться таке $x_0 \in K_0$, що $x \in B(x_0, \delta_k)$. Зафіксуємо довільне $\omega \in A \subset D$. Оскільки $x \in |\gamma_k|$, і навіть більше, x — внутрішня точка D, можемо використовувати запис $f_{m_k}(x)$ замість $\overline{f}_{m_k}(x)$. Зі співвідношень (5) і (6), а також за нерівністю трикутника отримуємо

$$\rho(f_{m_k}(x),\omega) \geq \rho\left(\omega, \overline{f}_{m_k}(x_0)\right) - \rho\left(\overline{f}_{m_k}(x_0), f_{m_k}(x)\right) \geq$$
$$\geq \operatorname{dist}\left(\partial D_0, g^{-1}(A)\right) - \frac{1}{2}\operatorname{dist}\left(\partial D_0, g^{-1}(A)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{dist}\left(\partial D_0, g^{-1}(A)\right) > \varepsilon \tag{8}$$

для достатньо великих $k \in \mathbb{N}$, де

$$\operatorname{dist}\left(\partial D_0, g^{-1}(A)\right) := \inf_{x\in\partial D_0, y\in g^{-1}(A)} |x-y|.$$

Переходячи до інфімуму у (8) по всіх $x \in |\gamma_k|$ і $\omega \in A$, одержуємо

$$\rho(f_{m_k}(|\gamma_k|), A) > \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

Тепер покажемо, що знайдеться таке $\varepsilon_1 > 0$, що

$$\operatorname{dist}(f_{m_k}(|\gamma_k|), A) > \varepsilon_1 \quad \forall k = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

де $\operatorname{dist}(A, B)$, як завжди, позначає евклідову відстань між множинами $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Справді, нехай нерівність (10) не виконується. Тоді для чисел $\varepsilon_l = 1/l$, $l = 1, 2, \ldots$, знайдуться такі елементи $\xi_l \in |\gamma_{k_l}|$ і $\zeta_l \in A$, що

$$|f_{m_{k_l}}(\xi_l) - \zeta_l| < 1/l, \quad l = 1, 2, \ldots. \tag{11}$$

Можна вважати, що послідовність k_l, $l = 1, 2, \ldots$, є зростаючою. Оскільки A — компакт, можемо також вважати, що послідовність ζ_l збігається до $\zeta_0 \in A$ при $l \to \infty$. За нерівністю трикутника на підставі (11) будемо мати

$$|f_{m_{k_l}}(\xi_l) - \zeta_0| \to 0, \quad l \to \infty. \tag{12}$$

З іншого боку, нагадаємо, що $\rho(f_{m_k}(x),\omega) = \left|g^{-1}(f_{m_k}(x)) - g^{-1}(\omega)\right|$, де $g\colon D_0 \to D'$ — деяке квазіконформне відображення області D_0 на D' (див. (4)). Зокрема, відображення g^{-1} є неперервним у D', отже, з огляду на нерівність трикутника і (12) отримаємо

$$\left|g^{-1}(f_{m_{k_l}}(\xi_l)) - g^{-1}(\zeta_l)\right| \leq$$
$$\leq \left|g^{-1}(f_{m_{k_l}}(\xi_l)) - g^{-1}(\zeta_0)\right| + \left|g^{-1}(\zeta_0) - g^{-1}(\zeta_l)\right| \to 0, \quad l \to \infty. \tag{13}$$

Проте за означенням метрики ρ із (13) випливає, що

$$\rho(f_{m_{k_l}}(|\gamma_{k_l}|), A) \leq$$
$$\leq \rho(f_{m_{k_l}}(\xi_l), \zeta_l) = \left|g^{-1}(f_{m_{k_l}}(\xi_l)) - g^{-1}(\zeta_l)\right| \to 0, \quad l \to \infty,$$

а це суперечить (9). Отримана суперечність свідчить про справедливість співвідношення (10).

Покриємо множину A кулями $B(x, \varepsilon_1/4)$, $x \in A$. Оскільки A — компакт, можемо вважати, що $A \subset \bigcup_{i=1}^{M_0} B(x_i, \varepsilon_1/4)$, $x_i \in A$, $i = 1, 2, \ldots, M_0$, $1 \leq M_0 < \infty$. За означенням, M_0 залежить лише від A, зокрема M_0 не залежить від k. Покладемо

$$\Gamma_k := \Gamma(A_{m_k}, |\gamma_k|, D). \tag{14}$$

Нехай $\Gamma_{ki} := \Gamma_{f_{m_k}}(x_i, \varepsilon_1/4, \varepsilon_1/2)$, тобто Γ_{ki} складається з усіх кривих $\gamma\colon [0,1] \to D$ таких, що $f_{m_k}(\gamma(0)) \in S(x_i, \varepsilon_1/4)$, $f_{m_k}(\gamma(1)) \in S(x_i, \varepsilon_1/2)$ і $\gamma(t) \in A(x_i, \varepsilon_1/4, \varepsilon_1/2)$ при $0 < t < 1$. Покажемо, що

$$\Gamma_k > \bigcup_{i=1}^{M_0} \Gamma_{ki}. \tag{15}$$

Справді, нехай $\widetilde{\gamma} \in \Gamma_k$, тобто $\widetilde{\gamma}\colon [0,1] \to D$, $\widetilde{\gamma}(0) \in A_{m_k}$, $\widetilde{\gamma}(1) \in |\gamma_k|$ і $\widetilde{\gamma}(t) \in D$ при $0 \le t \le 1$. Тоді $\gamma^* := f_{m_k}(\widetilde{\gamma}) \in \Gamma(A, f_{m_k}(|\gamma_k|), D')$. Оскільки кулі $B(x_i, \varepsilon_1/4)$, $1 \le i \le M_0$, утворюють покриття компакта A, знайдеться таке $i \in \mathbb{N}$, що $\gamma^*(0) \in B(x_i, \varepsilon_1/4)$ і $\gamma^*(1) \in \in f_{m_k}(|\gamma_k|)$. За співвідношенням (10) $|\gamma^*| \cap B(x_i, \varepsilon_1/4) \ne \varnothing \ne |\gamma^*| \cap (D' \setminus B(x_i, \varepsilon_1/4))$. Отже, за теоремою 1.I.5.46 [33] знайдеться таке $0 < t_1 < 1$, що $\gamma^*(t_1) \in S(x_i, \varepsilon_1/4)$. Можна вважати, що $\gamma^*(t) \notin B(x_i, \varepsilon_1/4)$ при $t > t_1$. Покладемо $\gamma_1 := \gamma^*|_{[t_1,1]}$. З (10) випливає, що $|\gamma_1| \cap B(x_i, \varepsilon_1/2) \ne \varnothing \ne |\gamma_1| \cap (D' \setminus B(x_i, \varepsilon_1/2))$. Отже, за теоремою 1.I.5.46 [33] знайдеться таке $t_1 < t_2 < 1$, що $\gamma^*(t_2) \in S(x_i, \varepsilon_1/2)$. Можна вважати, що $\gamma^*(t) \in B(x_i, \varepsilon_1/2)$ при всіх $t < t_2$. Вважаючи $\gamma_2 := \gamma^*|_{[t_1,t_2]}$, зауважимо, що крива γ_2 є підкривою γ^*, яка належить $\Gamma(S(x_i, \varepsilon_1/4), S(x_i, \varepsilon_1/2), A(x_i, \varepsilon_1/4, \varepsilon_1/2))$.

Остаточно, $\widetilde{\gamma}$ має таку підкриву $\widetilde{\gamma_2} := \widetilde{\gamma}|_{[t_1,t_2]}$, що $f_{m_k} \circ \widetilde{\gamma_2} = \gamma_2$, до того ж

$$\gamma_2 \in \Gamma(S(x_i, \varepsilon_1/4), S(x_i, \varepsilon_1/2), A(x_i, \varepsilon_1/4, \varepsilon_1/2)).$$

Отже, співвідношення (15) встановлено.

Покладемо

$$\eta(t) = \begin{cases} 4/\varepsilon_1, & t \in [\varepsilon_1/4, \varepsilon_1/2], \\ 0, & t \notin [\varepsilon_1/4, \varepsilon_1/2]. \end{cases}$$

Зауважимо, що η задовольняє співвідношення (3) при $r_1 = \varepsilon_1/4$ і $r_2 = \varepsilon_1/2$. Оскільки відображення f_{m_k} задовольняє співвідношення (2), то, припускаючи тут $y_0 = x_i$, отримуємо

$$M(\Gamma_{f_{m_k}}(x_i, \varepsilon_1/4, \varepsilon_1/2)) \le \left(\frac{4}{\varepsilon_1}\right)^n \|Q\|_1 < c < \infty, \tag{16}$$

де c — деяка додатна стала і $\|Q\|_1$ — L_1-норма функції Q в D'. З (15) і (16), враховуючи напівадитивність модуля сімей кривих, одержуємо

$$M(\Gamma_k) \le \frac{4^n M_0}{\varepsilon_1^n} \int\limits_{D'} Q(y)\, dm(y) \le cM_0 < \infty. \tag{17}$$

З іншого боку, оскільки за умовою область D має слабко плоску межу, з огляду на умову (7) отримуємо, що $M(\Gamma_k) \to \infty$ при $k \to \infty$, а це суперечить (17). Отримана суперечність доводить лему.

3. Доведення теореми 1. Проведемо доведення від супротивного. Припустимо, що $\mathfrak{S}_{a,b,Q}\left(\overline{D}, \overline{D'}\right)$ не є одностайно неперервною в деякій точці $x_0 \in \partial D$. Тоді знайдуться точки $x_m \in D$ і відображення $f_m \in \mathfrak{S}_{a,b,Q}\left(\overline{D}, \overline{D'}\right)$, $m = 1, 2, \ldots$, такі, що $x_m \to x_0$ при $m \to \infty$ і до того ж при деякому $\varepsilon_0 > 0$

$$h(f_m(x_m), f_m(x_0)) \geq \varepsilon_0, \quad m = 1, 2, \ldots . \tag{18}$$

Виберемо довільним чином точку $y_0 \in D'$, $y_0 \neq b$, і з'єднаємо її з точкою b деякою кривою в D', яку ми позначимо α. Покладемо $A := |\alpha|$. Нехай A_m — повне підняття кривої α при відображенні f_m з початком у точці a (воно існує за лемою 3.7 [23]). Зауважимо, що $h(A_m, \partial D) > 0$ за замкненістю відображення f_m (бо, зокрема, відкриті дискретні і замкнені відображення є такими, прообраз компакта при яких є компактом (див. [23], теорема 3.3(4)). Тепер можливі такі випадки: або $h(A_m) \to 0$ при $m \to \infty$, або $h(A_{m_k}) \geq \delta_0 > 0$ при $k \to \infty$ для деякої зростаючої послідовності номерів m_k і деякого $\delta_0 > 0$.

У першому з цих випадків, очевидно, $h(A_m, \partial D) \geq \delta > 0$ при деякому $\delta > 0$. Тоді сім'я відображень $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ одностайно неперервна в точці x_0 за теоремою 2 [31], що суперечить умові (18).

У другому випадку, якщо $h(A_{m_k}) \geq \delta_0 > 0$ при $k \to \infty$, також $h\left(A_{m_k}, \partial D\right) \geq \delta_1 > 0$ при деякому $\delta_1 > 0$ за лемою 1. Знову ж таки, за теоремою 2 [31] сім'я $\{f_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ є одностайно неперервною в точці x_0, а це суперечить умові (18).

Отже, в обох з двох можливих випадків ми прийшли до суперечності з (18), і це вказує на хибність припущення про відсутність одностайної неперервності сім'ї $\mathfrak{S}_{a,b,Q}\left(D, D'\right)$ в $\overline{D}$.

Теорему доведено.

***Приклад* 1.** Розглянемо сім'ю відображень $f_n(z) = z^n$, $n = 1, 2, \ldots,$ $z \in \mathbb{B}^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Зауважимо, що f_n є відображеннями з обмеженим спотворенням як гладкі відображення, дилатація $K_O(x, f)$ яких дорівнює одиниці (див. коментарі після співвідношень (2), (3)). Отже, f_n задовольняє нерівність (2) при $Q(z) = N\left(f_n, \mathbb{B}^2\right) = n$, де, як завжди, N — функція кратності, визначена співвідношеннями

$$N\left(y, f, \mathbb{B}^2\right) = \operatorname{card}\left\{z \in \mathbb{B}^2 : f(z) = y\right\}, \quad N\left(f, \mathbb{B}^2\right) = \sup_{y \in \mathbb{C}} N\left(y, f, \mathbb{B}^2\right)$$

(див., наприклад, [16], теорема 3.2, або [21], теорема 6.7.II). Всі відображення f_n є дискретними, що перевіряється безпосередньо, крім того, зберігають межу одиничного круга і тому є замкненими (див., наприклад, [23], теорема 3.3). Відображення f_n також фіксують точку 0, тому вони задовольняють всі умови теореми 1, але водночас у нерівності (2) немає спільної інтегровної функції Q, яка б забезпечувала всю сім'ю відображень f_n, $n = 1, 2, \ldots$. Внаслідок цього сім'я відображень f_n не є одностайно неперервною на межі одиничного круга, що перевіряється шляхом безпосередніх обчислень.

***Приклад* 2.** Аналогічний приклад можна побудувати у просторі. Нехай $x \in \mathbb{B}^n$, $x = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, x_3, x_4, \ldots, x_n)$, де, як завжди, $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq r < \infty$. Для натурального $m \in \mathbb{N}$ покладемо $f_m(x) = (r\cos m\varphi, r\sin m\varphi, x_3, x_4, \ldots, x_n)$. Шляхом безпосередніх обчислень можна переконатися, що $K_O(x, f_m) = m^{n-1}$ (див., наприклад, [20], приклад 3, п. 4.3.I). Зауважимо, що f_m є відображеннями з обмеженим спотворенням як гладкі відображення в $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-2}$, де $\mathbb{R}^{n-2} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_{n-1} = x_n = 0\}$, дилатація яких дорівнює m^{n-1}. Отже, f_m задовольняє нерівність (2) при $Q = N\left(f_m, \mathbb{B}^n\right) m^{n-1} = m^n$ в області $\mathbb{B}^n$ (див., наприклад, [16], теорема 3.2, або [21], теорема 6.7.II). Всі відображення f_m є дискретними, що перевіряється безпосередньо, крім того, зберігають межу одиничної кулі і тому замкнені (див., наприклад, [23], теорема 3.3). Відображення f_m також фіксують точку 0, але не мають спільної мажоранти Q в (2). Неважко переконатися, що сім'я відображень $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ не є одностайно неперервною на одиничній сфері.

Література

1. C. Caratheodory, *Über die Begrenzung einfach zusammenhangender Gebiete*, Math. Ann., **73**, 323 – 370 (1913).
2. Б. П. Куфарев, *Метризация пространства всех простых концов областей семейства* $\mathfrak{B}$, Мат. заметки, **6**, № 5, 607 – 618 (1969).
3. Г. Д. Суворов, *Семейства плоских топологических отображений*, Изд-во СО АН СССР, Новосибирск (1965).
4. Г. Д. Суворов, *Метрическая теория простых концов и граничные свойства плоских отображений с ограниченными интегралами Дирихле*, Наук. думка, Киев (1981).
5. Г. Д. Суворов, *Обобщенный принцип длины и площади в теории отображений*, Наук. думка, Киев (1985).
6. В. И. Кругликов, *Простые концы пространственных областей с переменными границами*, Докл. АН СССР, **297**, № 5, 1047 – 1050 (1987).
7. В. М. Миклюков, *Относительное расстояние М. А. Лаврентьева и простые концы на непараметрических поверхностях*, Укр. мат. вісн., **1**, № 3, 349 – 372 (2004).
8. E. Afanas'eva, V. Ryazanov, R. Salimov, E. Sevost'yanov, *On boundary extension of Sobolev classes with critical exponent by prime ends*, Lobachevskii J. Math., **41**, № 11, 2091 – 2102 (2020).
9. V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, E. Yakubov, *The Beltrami equations and prime ends*, Укр. мат. вісн., **12**, № 1, 27 – 66 (2015).
10. D. Kovtonyuk, I. Petkov, V. Ryazanov, *On the boundary behavior of mappings with nite distortion in the plane*, Lobachevskii J. Math., **38**, № 2, 290 – 306 (2017).
11. Д. А. Ковтонюк, В. И. Рязанов, *К теории простых концов для пространственных областей*, Укр. мат. журн., **67**, № 4, 467 – 479 (2015).
12. D. A. Kovtonyuk, V. I. Ryazanov, *Prime ends and Orlicz – Sobolev classes*, St. Petersburg Math. J., **27**, № 5, 765 – 788 (2016).
13. V. Ryazanov, S. Volkov, *Prime ends in the Sobolev mapping theory on Riemann surfaces*, Mat. Stud., **48**, № 1, 24 – 36 (2017).
14. V. Ryazanov, S. Volkov, *Prime ends in the mapping theory on the Riemann surfaces*, J. Math. Sci., **227**, № 1, 81 – 97 (2017).
15. V. Ryazanov, S. Volkov, *Mappings with nite length distortion and prime ends on Riemann surfaces*, J. Math. Sci., **248**, № 2, 190 – 202 (2020).
16. O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä, *Definitions for quasiregular mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1, **448**, 1 – 40 (1969).
17. O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *On Q-homeomorphisms*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1, **30**, № 1, 49 – 69 (2005).
18. O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in modern mapping theory*, Springer Sci. + Business Media, LLC, New York (2009).
19. R. Näkki, *Prime ends and quasiconformal mappings*, J. Anal. Math., **35**, 13 – 40 (1979).
20. Yu. G. Reshetnyak, *Space mappings with bounded distortion*, Transl. Math. Monogr., **73** (1989).
21. S. Rickman, *Quasiregular mappings*, Springer-Verlag, Berlin (1993).
22. J. Väisälä, *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings*, Lect. Notes Math., **229**, Springer-Verlag, Berlin etc. (1971).
23. M. Vuorinen, *Exceptional sets and boundary behavior of quasiregular mappings in n-space*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss., **11**, 1 – 44 (1976).
24. Е. А. Севостьянов, С. А. Скворцов, *О сходимости отображений в метрических пространствах с прямыми и обратными модульными условиями*, Укр. мат. журн., **70**, № 7, 952 – 967 (2018).
25. Е. А. Севостьянов, С. А. Скворцов, *О локальном поведении одного класса обратных отображений*, Укр. мат. вестн., **15**, № 3, 399 – 417 (2018).
26. E. A. Sevost'yanov, S. A. Skvortsov, *On mappings whose inverse satisfy the Poletsky inequality*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **45**, 259 – 277 (2020).
27. Є. О. Севостьянов, С. О. Скворцов, О. П. Довгопятий, *Про негомеоморфні відображення з оберненою нерівністю Полецького*, Укр. мат. вісн., **17**, № 3, 414 – 436 (2020).
28. Д. П. Ильютко, Е. А. Севостьянов, *О граничном поведении открытых дискретных отображений на римановых многообразиях. II*, Мат. сб., **211**, № 4, 63 – 111 (2020).

29. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Физматгиз, Москва (1966).
30. O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä, *Topological and metric properties of quasiregular mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1, **488**, 1 – 31 (1971).
31. Є. О. Севостьянов, *Межове продовження відображень з оберненою нерівністю Полецького по простих кінцях*, Укр. мат. журн., **73**, № 7, 951 – 963 (2021).
32. J. Herron, P. Koskela, *Quasiextremal distance domains and conformal mappings onto circle domains*, Complex Var. Theory and Appl., **15**, 167 – 179 (1990).
33. К. Куратовский, *Топология*, т. 2, Мир, Москва (1969).

Одержано 22.08.21