DOI: 10.37863/umzh.v73i12.6890

УДК 514.172

Т. М. Осіпчук (Ін-т математики НАН України, Київ)

ТОПОЛОГІЧНІ ТА ГЕОМЕТРИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ МНОЖИНИ ТОЧОК 1-НЕОПУКЛОСТІ СЛАБКО 1-ОПУКЛОЇ МНОЖИНИ НА ПЛОЩИНІ

In the present work, we consider a class of generalized convex sets in the real plane known as weakly 1-convex sets. For a set in the real Euclidean space $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, it is said that a point of the complement of this set to the whole space $\mathbb{R}^n$ is an ***m-nonconvexity point of the set***, $m = \overline{1, n-1}$, if any m-dimensional plane passing through this point intersects the set. An open set in the space $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, is called to be ***weakly m-convex***, $m = \overline{1, n-1}$, if its boundary contains no m-nonconvexity points of the set. Moreover, in the class of open, weakly 1-convex sets in the plane, we distinguish a subclass of ones with a finite number of connected components and nonempty set of 1-nonconvexity points. In this paper, we investigate mainly the properties of the set of 1-nonconvexity points for the sets from this subclass. In particular, for any set in this subclass, we prove that the set of its 1-nonconvexity points is open; any connected component of the set of its 1-nonconvexity points is the interior of a convex polygon; for any convex polygon, there exists a set in this subclass such that its set of 1-nonconvexity points coincides with the interior of the polygon.

Розглянуто клас узагальнено опуклих множин на дійсній площині, які називаються слабко 1-опуклими. Точка доповнення множини дійсного евклідового простору $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, до всього простору $\mathbb{R}^n$ називається ***точкою m-неопуклості множини***, $m = \overline{1, n-1}$, якщо довільна m-вимірна площина, яка проходить через цю точку, перетинає задану множину. Відкрита множина із простору $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, називається ***слабко m-опуклою***, $m = \overline{1, n-1}$, якщо межа множини не містить точок m-неопуклості цієї множини. При цьому із класу відкритих слабко 1-опуклих множин на площині виділено підклас множин зі скінченним числом компонент зв'язності і непорожньою множиною точок 1-неопуклості. У роботі досліджуються переважно властивості множини точок 1-неопуклості множини підкласу. Зокрема, доведено, що множина точок 1-неопуклості множини підкласу є відкритою; довільна компонента зв'язності множини точок 1-неопуклості множини підкласу — внутрішність опуклого багатокутника; для довільного опуклого багатокутника існує така множина підкласу, що її множина точок 1-неопуклості збігається з внутрішністю багатокутника.

1. Вступ. Як відомо, множина багатовимірного дійсного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ називається ***опуклою***, якщо разом із двома довільними своїми точками вона містить увесь відрізок, що їх сполучає [3]. При цьому перетин довільного числа опуклих множин знову є опуклою множиною. Ця властивість опуклих множин дає можливість визначити мінімальну опуклу множину, яка містить довільну задану, таким чином.

Означення 1 [3]. *Опуклий перетин усіх опуклих множин, які містять задану множину $X \subset \mathbb{R}^n$, називається **опуклою оболонкою** множини X і позначається*

$$\operatorname{conv} X = \bigcap_{K \supset X} K, \quad \text{де} \quad K \text{ — опуклі множини.}$$

Розглянемо деякі інші класи множин, які мають ту властивість, що перетин довільного числа множин класу знову належить цьому класу.

Довільний m-вимірний афінний підпростір простору $\mathbb{R}^n$, $1 \leq m < n$, називається ***m-площиною*** [3].

Означення 2 [2]. *Множина $E \subset \mathbb{R}^n$ називається m-опуклою, $1 \leq m < n$, якщо для кожної точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$ існує m-площина L така, що $x \in L$ і $L \cap E = \varnothing$.*

В роботі [2] досліджено властивості m-опуклих компактів у просторі $\mathbb{R}^n$, пов'язані з оцінкою їхніх груп когомологій. Вивченню властивостей $(n-1)$-опуклих множин у просторі $\mathbb{R}^n$

присвячено роботу [12], а при деяких додаткових умовах — роботи [5, 6]. Зокрема, в роботі [12] отримано топологічну класифікацію $(n-1)$-опуклих множин простору $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, з гладкою межею: *довільна $(n-1)$-опукла множина у просторі $\mathbb{R}^n$ з гладкою межею або є опуклою, або складається не більше ніж із двох необмежених зв'язних компонент, або задається декартовим добутком $E^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$, де $E^1 \subset \mathbb{R}$.*

Неважко показати, що перетин довільного числа m-опуклих множин знову буде m-опуклою множиною [14]. Тоді по аналогії з опуклою оболонкою дається означення мінімальної m-опуклої множини, що містить довільну задану множину простору $\mathbb{R}^n$.

Означення 3 [14]**.** *Перетин усіх m-опуклих множин при фіксованому m, які містять задану множину $X \subset \mathbb{R}^n$, називається **m-опуклою оболонкою** множини X і позначається*

$$\operatorname{conv}_m X = \bigcap_{K \supset X} K, \quad \text{де} \quad K - m\text{-опуклі множини.}$$

Це поняття природно виникло при розв'язанні задачі про тінь, сформульованої в 1982 р. Худайбергановим [16, 17]: *знайти мінімальне число відкритих (замкнених) куль у просторі $\mathbb{R}^n$, які попарно не перетинаються, з центрами на сфері S^{n-1} (див.* [4]*), не містять центр сфери і такі, що довільна пряма, яка проходить через центр сфери, перетинає принаймні одну з куль.*

Ю. Б. Зелінський [9] переформулював цю задачу в термінах 1-опуклої оболонки таким чином: *яка мінімальна кількість відкритих (замкнених) куль у просторі $\mathbb{R}^n$, які попарно не перетинаються, з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами меншими за радіус сфери, забезпечить належність центра сфери 1-опуклій оболонці сім'ї цих куль?*

Цю задачу повністю розв'язано в [9].

Означення 4 [8, 15]**.** *Відкрита множина $E \subset \mathbb{R}^n$ називається слабко m-опуклою, $1 \leq m < n$, якщо для кожної точки $x \in \partial E$ існує m-площина L така, що $x \in L$ і $L \cap E = \varnothing$.*

Будемо використовувати стандартні позначення. Для множини $G \subset \mathbb{R}^n$ нехай $\overline{G}$ — її замикання, $\operatorname{Int} G$ — її внутрішність, $\partial G = \overline{G} \setminus \operatorname{Int} G$ — її межа.

Означення 5 [1]**.** *Кажуть, що множина A апроксимується ззовні сім'єю відкритих множин A^k, $k = 1, 2, \ldots$, якщо $\overline{A^{k+1}}$ міститься в A^k й $A = \cap_k A^k$.*

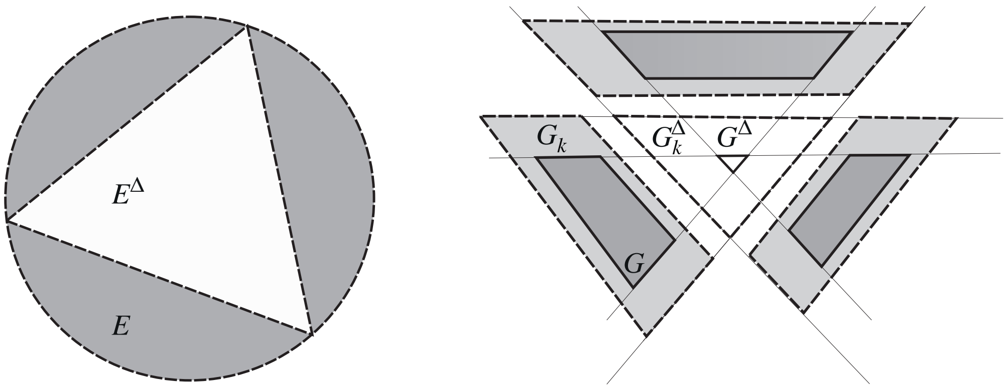
Означення 6 [8, 15]**.** *Замкнена множина із простору $\mathbb{R}^n$ називається слабко m-опуклою, якщо вона апроксимується ззовні сім'єю відкритих слабко m-опуклих множин.*

Геометричні і топологічні властивості слабко m-опуклих множин досліджувались у роботі [7]. Зокрема, в [7] встановлено: *якщо E_1 і E_2 — відповідно слабко k-опукла і слабко m-опукла множини, $k \leq m$, то множина $E_1 \cap E_2$ є слабко k-опуклою.* У роботі [8] досліджувалися властивості класу узагальнено опуклих множин на грасманових багатовидах, тісно пов'язані з властивостями так званих спряжених множин (див. означення 2 [8]). Цей клас містить m-опуклі та слабко m-опуклі множини із простору $\mathbb{R}^n$.

Максимальна зв'язна підмножина A_i, $i = 1, 2, \ldots$, непорожньої множини $A \subset \mathbb{R}^n$ називається *компонентою зв'язності (компонентою)* множини A. При цьому $A = \cup_i A_i$.

Лема 1 [15]**.** *Кожна компонента слабко $(n-1)$-опуклої відкритої множини $E \subset \mathbb{R}^n$ опукла.*

Нехай $\mathbf{C^n_m}$ і $\mathbf{WC^n_m}$ — класи відповідно m-опуклих і слабко m-опуклих множин у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Очевидно, що будь-яка відкрита множина із класу $\mathbf{C^n_m}$ є також множиною із класу



а *б*

Рис. 1

$\mathbf{WC^n_m}$. Зворотне твердження є хибним. Виявилося, що клас $\mathbf{WC^n_m} \setminus \mathbf{C^n_m}$, $n \geq 2$, відкритих слабко m-опуклих і не m-опуклих множин є непорожнім для кожного $m = 1, 2, \ldots, n-1$ [13]. При цьому відкриті множини із класу $\mathbf{WC^n_{n-1}} \setminus \mathbf{C^n_{n-1}}$ є незв'язними. В наступній теоремі оцінюється знизу число компонент зв'язності множин із класу $\mathbf{WC^n_{n-1}} \setminus \mathbf{C^n_{n-1}}$.

Теорема 1 [15]**.** *Відкрита множина із класу* $\mathbf{WC^n_{n-1}} \setminus \mathbf{C^n_{n-1}}$ *складається не менше ніж з трьох компонент зв'язності.*

На рис. 1, *а* зображено відкриту множину E із класу $\mathbf{WC^2_1} \setminus \mathbf{C^2_1}$ з трьома компонентами зв'язності, наведену в роботі [15].

Іншою є оцінка числа компонент зв'язності відкритих множин із класу $\mathbf{WC^n_m} \setminus \mathbf{C^n_m}$, $1 \leq m < n-1$, $n \geq 3$.

Теорема 2 [13]**.** *Існують області у просторі* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, *із класу* $\mathbf{WC^n_m} \setminus \mathbf{C^n_m}$, $1 \leq m < n-1$.

У роботі [13] також наведено приклади відкритої та замкненої множин із класу $\mathbf{WC^n_{n-1}} \setminus \mathbf{C^n_{n-1}}$ з трьома і більше компонентами зв'язності, а також доведено, що, як і у випадку відкритих множин, компактні множини із класу $\mathbf{WC^n_{n-1}} \setminus \mathbf{C^n_{n-1}}$ складаються не менше ніж з трьох компонент зв'язності. На рис. 1, *б* зображено замкнену множину G із класу $\mathbf{WC^2_1} \setminus \mathbf{C^2_1}$ з трьома компонентами зв'язності, наведену у роботі [13].

Означення 7 [13]**.** *Точка* $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$ *називається точкою* m*-неопуклості множини* $E \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq m < n$, *якщо всі* m*-площини, які містять* x, *перетинають множину* E.

Означення 4 вочевидь еквівалентне такому.

Означення 8. *Відкрита множина із простору* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *називається слабко* m*-опуклою,* $1 \leq m < n$, *якщо межа множини не містить точок* m*-неопуклості цієї множини.*

Множину точок $\boldsymbol{m}$***-неопуклості*** множини $E \subset \mathbb{R}^n$ позначатимемо $E^{\triangle}_m$, $1 \leq m < n$. При цьому нехай

$$E^{\triangle} := E^{\triangle}_1, \quad E \subset \mathbb{R}^2.$$

На рис. 1 множини $E^{\triangle}$, $G^{\triangle}$ відкритої та замкненої множин $E, G \in \mathbf{WC^2_1} \setminus \mathbf{C^2_1}$ — це внутрішність та замикання відповідних трикутників. При цьому у підпункті 3.1 буде доведено, що

m-опукла оболонка, $m = 1, 2, \ldots, n-1$, довільної множини $E \subset \mathbb{R}^n$ є об'єднанням самої множини E та її множини точок m-неопуклості $E^{\triangle}_m$.

У цій статті продовжено дослідження Ю. Б. Зелінського і його учнів, вивчаються властивості переважно відкритих множин $E \subset \mathbb{R}^2$ із класу $\mathbf{WC^2_1} \setminus \mathbf{C^2_1}$ та їхніх 1-опуклих оболонок $\mathrm{conv}_1 E$ через дослідження топологічних і геометричних властивостей множин $E^{\triangle}$.

У пункті 2 наведено відомі означення та твердження з теорії опуклих множин і доведено деякі допоміжні твердження, необхідні для встановлення основних результатів.

У підпункті 3.1 встановлено деякі прості властивості множин $\mathrm{conv}_m E$ й $E^{\triangle}_m$, $E \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq m < n$. Зокрема, доведено, що для обмеженої і не m-опуклої множини $E \subset \mathbb{R}^n$ множина $E^{\triangle}_m$ є обмеженою, а m-опукла оболонка довільної відкритої множини з класу $\mathbf{WC^n_m} \setminus \mathbf{C^n_m}$, $1 \leq m < n$, незв'язна.

У підпункті 3.2 досліджено властивості множин $E^{\triangle}$ для відкритих множин $E \in \mathbf{WC^2_1} \setminus \mathbf{C^2_1}$ зі скінченним числом компонент зв'язності. Зокрема, встановлено, що множина $E^{\triangle}$ є відкритою; довільна компонента зв'язності множини $E^{\triangle}$ — внутрішність опуклого багатокутника; для довільного опуклого багатокутника P існують відкрита множина $E \in \mathbf{WC^2_1} \setminus \mathbf{C^2_1}$ така, що $E^{\triangle} = \mathrm{Int}\, P$, а також відкрита множина $E_* \in \mathbf{WC^2_1} \setminus \mathbf{C^2_1}$ така, що $E^{\triangle}_* \in \mathbf{WC^2_1} \setminus \mathbf{C^2_1}$ і $(E^{\triangle}_*)^{\triangle} = \mathrm{Int}\, P$.

2. Допоміжні твердження. Тут і далі, якщо не буде зазначено інше, точки простору $\mathbb{R}^n$ позначатимемо малими латинськими літерами з індексами чи без них; відкритий відрізок між точками $x, y \in \mathbb{R}^n$ позначатимемо xy, а відстань між ними — $|x - y|$; під ε-околом точки x розумітимемо відкриту кулю з центром в x і радіусом ε та позначатимемо $U(x, \varepsilon)$; пряму, яка проходить через точку x, позначатимемо $\gamma(x)$; промінь, який виходить із точки простору, будемо позначати малою грецькою літерою з нижнім індексом, що позначає дану точку, наприклад γ_x, η_x, $x \in \mathbb{R}^n$.

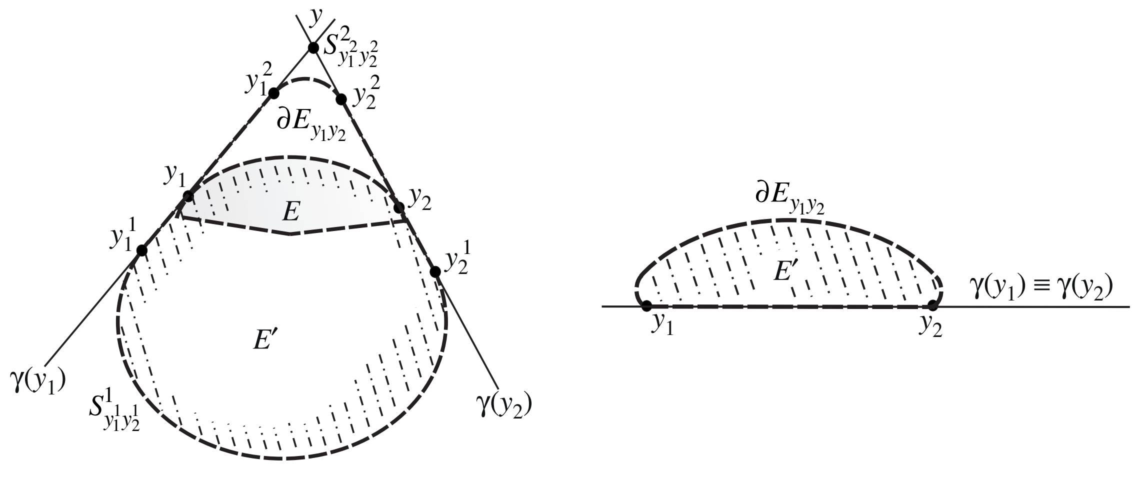
Наведемо допоміжні означення та твердження з теорії опуклих множин, які будуть використані при доведенні теорем у пункті 3.

Означення 9. *Множину, яка є об'єднанням точок усіх прямих, що проходять через точку $x \in \mathbb{R}^n$ і перетинають множину $E \subset \mathbb{R}^n$, називатимемо* ***(двопорожнинним) опорним конусом множини*** E ***щодо точки*** x *і позначатимемо $C_x E$. При цьому вважатимемо, що $x \notin C_x E$, якщо E відкрита й $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, і $x \in C_x E$ — в інших випадках.*

Означення 10. *Множину, яка є об'єднанням точок усіх променів, що виходять з точки $x \in \mathbb{R}^n$ і перетинають множину $E \subset \mathbb{R}^n$, називатимемо* ***(однопорожнинним) опорним конусом множини E щодо точки*** x *і позначатимемо $S_x E$. При цьому вважатимемо, що $x \notin S_x E$, якщо E відкрита й $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, і $x \in S_x E$ — в інших випадках.*

Лема 2. *Нехай $E \subset \mathbb{R}^2$ — відкрита, опукла множина і точка $x \in \mathbb{R}^2 \setminus E$. Тоді $S_x E$ — відкритий кут, не більший ніж π.*

Доведення. Оскільки множина E відкрита і зв'язна, то однопорожнинний опорний конус $S_x E$ вочевидь також є відкритою і зв'язною множиною, а отже, $S_x E$ — відкритий кут. Припустимо, що його величина більша ніж π. Тоді існує пряма $\gamma(x) \subset S_x E$. Нехай η^1_x і η^2_x — доповняльні промені з початком у точці x на прямій $\gamma(x)$. За означенням опорного конуса $S_x E$ існують точки $x^1 \in E \cap \eta^1_x$ і $x^2 \in E \cap \eta^2_x$. Тоді множина E не опукла, оскільки $x \in \overline{x^1 x^2}$ й $x \notin E$. Ми прийшли до суперечності. Отже, наше припущення є хибним і величина кута $S_x E$ не може бути більшою ніж π.



а *б*

Рис. 2

***Наслідок* 1.** *Нехай $E \subset \mathbb{R}^2$ — відкрита, опукла множина й $x \in \mathbb{R}^2 \setminus E$. Тоді опорний конус $C_x E$ є об'єднанням двох відкритих вертикальних кутів, величини яких не перевищують π.*

Означення 11 [3]. *Точка $y \in \partial E$ називається **вершиною** відкритої множини $E \subset \mathbb{R}^2$, якщо її опорний конус $S_y E$ — це кут, величина якого менша ніж π. Точка $y \in \partial E$ відкритої множини $E \subset \mathbb{R}^2$ називається **гладкою**, якщо її опорний конус $S_y E$ — це розгорнутий кут (величина якого дорівнює π).*

Будь-яка точка $y \in \partial E$ опуклої множини $E \subset \mathbb{R}^2$ є або гладкою, або вершиною множини E.

Лема 3 [3]. *Будь-яка опукла множина $E \subset \mathbb{R}^n$ має не більше ніж зчисленну множину вершин.*

Означення 12 [3]. *Пряма γ називається опорною до множини $E \subset \mathbb{R}^2$, якщо E повністю міститься в замкненій півплощині $\overline{L}$, обмеженій прямою γ, і не міститься в жодній іншій замкненій півплощині, яка міститься в $\overline{L}$.*

Лема 4. *Пряма γ опорна до області $D \subset \mathbb{R}^2$, якщо $\gamma \cap \partial D \neq \varnothing$ і $\gamma \cap D = \varnothing$.*

Також кажуть, що γ є ***опорною до множини E в точці*** $y \in \gamma \cap \partial D$.

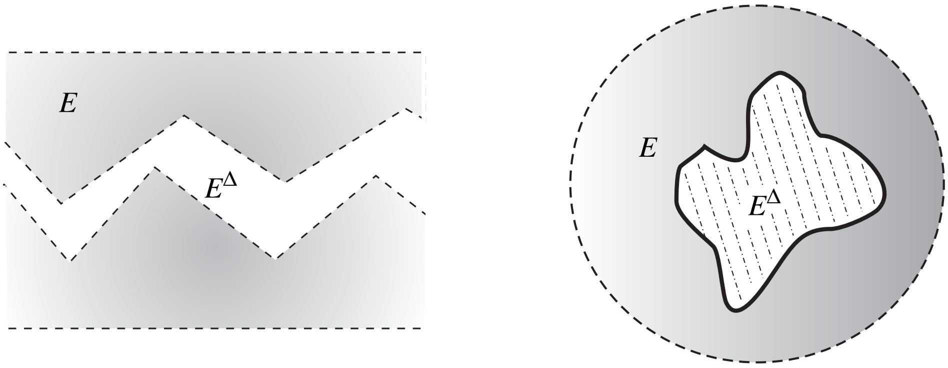
Лема 5 [3]. *Через кожну точку межі опуклої множини $E \subset \mathbb{R}^2$ проходить принаймні одна пряма, опорна до E.*

Лема 6 [3]. *Якщо опукла множина $E \subset \mathbb{R}^n$ має лише гладкі точки межі, то єдина опорна до E пряма, яка проходить через кожну точку $y \in \partial E$, неперервно (в природній топології) залежить від y.*

Лема 7. *Нехай $E \subset \mathbb{R}^2$ — довільна опукла множина і точки $y_1, y_2 \in \partial E$ такі, що всі точки замкненої частини межі $\partial E_{y_1 y_2} \subset \partial E$ між y_1, y_2 гладкі. Тоді існує опукла множина $E' \subset \mathbb{R}^2$ така, що всі точки її межі гладкі й $\partial E_{y_1 y_2} \subset \partial E'$.*

Доведення. Проведемо єдині опорні прямі $\gamma(y_1)$, $\gamma(y_2)$ в точках $y_1, y_2 \in \partial E$.

Якщо прямі $\gamma(y_1)$, $\gamma(y_2)$ перетинаються в деякій точці y або паралельні, то побудуємо кола S^1, S^2 такі, що $\gamma(y_l)$, $l = 1, 2$, дотикаються до S^k, $k = 1, 2$, в деяких точках y_l^k, до того ж $y_1 \in$ $\in y_1^1 y_1^2$, $y_2 \in y_2^1 y_2^2$ і $y \notin y_1^1 y_1^2$, $y \notin y_2^1 y_2^2$ (див. рис. 2, *а*). Нехай дуги $S^1_{y_1^1 y_2^1}$, $S^2_{y_1^2 y_2^2}$ відповідно кіл S^1, S^2 між точками y_1^1, y_2^1 і y_1^2, y_2^2 такі, що множина, обмежена кривою $S^1_{y_1^1 y_2^1} \cup y_1^1 y_1^2 \cup S^2_{y_1^2 y_2^2} \cup$ $\cup\, y_2^1 y_2^2$, є опуклою. При цьому всі її точки є гладкими. Розглянемо множину E_1, обмежену



а *б*

Рис. 3

кривою $\partial E_{y_1y_2}\cup y_1^1y_1^2\cup S^2_{y_1^2y_2^2}\cup y_2^1y_2^2$, і множину E_2, обмежену кривою $S^1_{y_1^1y_2^1}\cup y_1^1y_1^2\cup\partial E_{y_1y_2}\cup y_2^1y_2^2$. Одна з множин E_1, E_2 буде шуканою множиною E'.

Якщо прямі $\gamma(y_1)$, $\gamma(y_2)$ збігаються, то множина, обмежена кривою $\partial E_{y_1y_2}\cup y_1y_2$, буде шуканою множиною E' (див. рис. 2, *б*).

Наслідок 2. *Нехай $E\subset\mathbb{R}^2$ — довільна опукла множина і точки $y_1,y_2\in\partial E$ такі, що всі точки замкненої частини межі $\partial E_{y_1y_2}\subset\partial E$ між y_1, y_2 є гладкими. Тоді єдина опорна до E пряма, яка проходить через кожну точку $y\in\partial E_{y_1y_2}$, неперервно залежить від y.*

Лема 8 [3]. *Якщо множина $E\subset\mathbb{R}^2$ опукла й $y\in\overline{E}$, а $x\in\operatorname{Int}E$, то $\overline{xy}\setminus\{y\}\subset\operatorname{Int}E$.*

Наслідок 3. *Нехай $E\subset\mathbb{R}^2$ — відкрита опукла множина і точки $y_1,y_2\in\partial E$ такі, що пряма $\gamma(y_1,y_2)$, яка проходить через ці точки, перетинає множину E. Тоді відкритий відрізок $y_1y_2\subset E$.*

Доведення. Нехай $x\in\gamma(y_1,y_2)\cap E$. Тоді за лемою 8 $\overline{xy_1}\setminus\{y_1\}\subset E$ й $\overline{xy_2}\setminus\{y_2\}\subset E$, а отже, $(\overline{xy_1}\setminus\{y_1\})\cup(\overline{xy_2}\setminus\{y_2\})=y_1y_2\subset E$.

На площині $\mathbb{R}^2$ введемо полярну систему координат (r,φ) та компактифікуємо $\mathbb{R}^2$ нескінченно віддаленими точками (∞,φ), $\varphi\in[0;2\pi]$. Компактифіковану площину позначимо $\overline{\mathbb{R}^2}$. Під ***ламаною*** $a_1,a_2,\ldots,a_k$, де $a_1,a_k\in\overline{\mathbb{R}^2}$, $a_2,\ldots,a_{k-1}\in\mathbb{R}^2$, $k\geq 3$, будемо розуміти обмежену або необмежену криву без самоперетинів, яка складається з відрізків a_1a_2, $a_2a_3,\ldots,a_{k-1}a_k$, до того ж для довільного $l\in\{2,\ldots,k-1\}$ відрізки $a_{l-1}a_l$, a_la_{l+1} не лежать на одній прямій. Якщо $a_1\equiv a_k$, $a_1,a_k\in\mathbb{R}^2$, то ламана називається ***замкненою***.

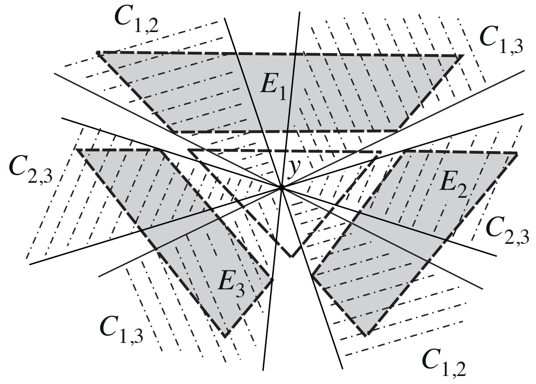
Означення 13. *Замкнену опуклу множину на площині $\mathbb{R}^2$ зі скінченним числом вершин, межа якої — замкнена або необмежена ламана, називатимемо **опуклим багатокутником**.*

3. Властивості множин точок 1-неопуклості множин із класу $\mathbf{WC_1^2}\setminus\mathbf{C_1^2}$. ***3.1. Деякі властивості множин із класу $\mathbf{WC_m^n}\setminus\mathbf{C_m^n}$, $n\geq 2$, $1\leq m<n$.*** Доведемо таке ключове твердження.

Лема 9. *Для довільної множини $E\subset\mathbb{R}^n$*

$$\operatorname{conv}_m E=E\cup E_m^{\triangle},\quad m=1,2,\ldots,n-1. \tag{1}$$

Доведення. Нехай $x\in\operatorname{conv}_m E$. Тоді за означенням 3 точка x належить усім m-опуклим множинам, які містять E. Оскільки для довільної точки $y\in\mathbb{R}^2\setminus(E\cup E_m^{\triangle})$ існує m-площина,



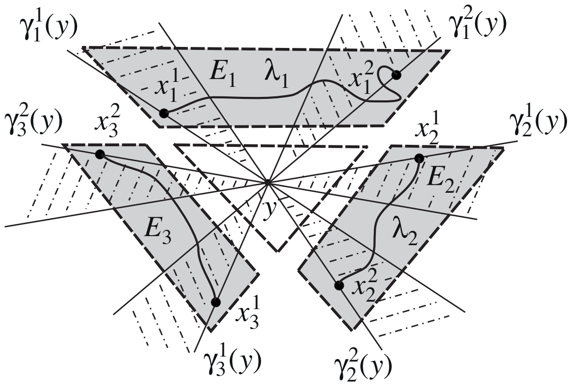


Рис. 4

яка проходить через y і не перетинає множину E, то ця ж m-площина не перетинає множину $E \cup E_m^{\triangle}$, а отже, $E \cup E_m^{\triangle}$ є m-опуклою. Тоді $x \in E \cup E_m^{\triangle}$.

Нехай $x \in E \cup E_m^{\triangle}$. Довільна m-опукла множина K, яка містить E, містить також множину $E_m^{\triangle}$, оскільки в протилежному випадку довільна m-площина, яка проходить через $y \in E_m^{\triangle} \setminus K$, перетинає множину E, а отже, і множину $K \supset E$. Це суперечить тому, що множина K є m-опуклою. Тоді $x \in K \supset E \cup E_m^{\triangle}$, а отже, x належить перетину всіх m-опуклих множин K, які містять E, тобто $x \in \mathrm{conv}_m E$.

Теорема 3. *Нехай множина $E \subset \mathbb{R}^n$ обмежена та не m-опукла, $1 \leq m < n$. Тоді множина $E_m^{\triangle}$ є обмеженою.*

Доведення. Оскільки множина E обмежена, то вона міститься в деякій кулі $B \subset \mathbb{R}^n$, яка вочевидь є m-опуклою, $1 \leq m < n$. Тоді згідно з означенням 3 і формулою (1) $B \supset \mathrm{conv}_m E \supset \supset E_m^{\triangle}$.

На рис. 3, *а* наведено необмежену, не 1-опуклу множину $E \subset \mathbb{R}^2$, множина $E^{\triangle}$ якої також необмежена.

Особливий інтерес викликають множини із класу $\mathbf{WC_m^n} \setminus \mathbf{C_m^n}$. Зокрема, m-опукла оболонка відкритої множини E із класу $\mathbf{WC_m^n} \setminus \mathbf{C_m^n}$, $1 \leq m < n$, незв'язна, на відміну від опуклої оболонки, яка вочевидь для довільної множини $E \subset \mathbb{R}^n$ є зв'язною. Справді, оскільки $E \in \in \mathbf{WC_m^n}$ і E відкрита, то $E_m^{\triangle} \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{E}$, звідки безпосередньо випливає, що множина $E \cup E_m^{\triangle}$ є незв'язною.

Далі розглядатимемо лише множину $E^{\triangle}$ точок 1-неопуклості відкритої множини $E \subset \mathbb{R}^2$.

3.2. Відкриті множини із класу $\mathbf{WC_1^2} \setminus \mathbf{C_1^2}$. На рис. 3, *б* наведено не 1-опуклу, відкриту множину $E \subset \mathbb{R}^2$, множина $E^{\triangle}$ якої є замкненою. Іншим є результат для відкритих множин із класу $\mathbf{WC_1^2} \setminus \mathbf{C_1^2}$ зі скінченним числом компонент зв'язності.

Теорема 4. *Нехай відкрита множина $E \subset \mathbb{R}^2$ належить до класу $\mathbf{WC_1^2} \setminus \mathbf{C_1^2}$ і складається зі скінченного числа компонент. Тоді $E^{\triangle}$ є відкритою.*

Доведення. Нехай y — довільна точка множини $E^{\triangle}$. Покажемо, що вона є внутрішньою.

Оскільки E слабко 1-опукла, то $y \notin \partial E$. Тоді існує таке число $\varepsilon_1 > 0$, що $U(y, \varepsilon_1) \subset \subset (\mathbb{R}^n \setminus \overline{E})$.

Нехай E_i, $i = 1, \ldots, k$, — компоненти множини E, а $C_{i,j} = C_y E_i \cap C_y E_j$, $i, j = 1, \ldots, k$ (див. рис. 4, *а*). Оскільки y — точка 1-неопуклості множини E, то для кожного фіксованого

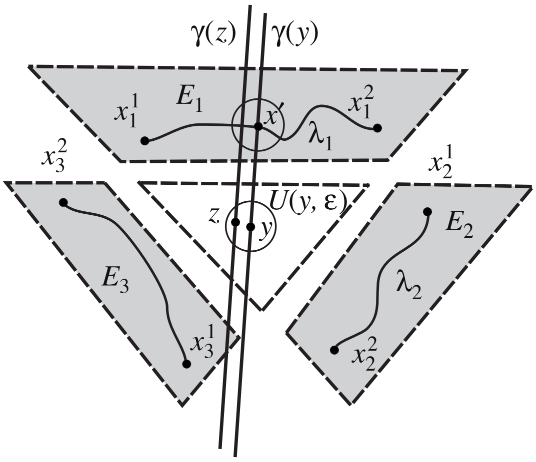


Рис. 5

індексу $i \in \{1, \ldots, k\}$ знайдуться індекси $j(i) \in \{1, \ldots, k\}$ такі, що $C_{i,j(i)} \neq \varnothing$. Тоді $C_{i,j(i)}$ також є об'єднанням вертикальних кутів. Оскільки опорні конуси $C_y E_i$, $i = 1, \ldots, k$, відкриті, зменшимо величини їхніх кутів так, щоб $C_{i,j(i)}$ все ще залишалися непорожніми. Зменшені конуси позначатимемо $\widetilde{C}_y E_i$, $i = 1, \ldots, k$. Тоді $\widetilde{C}_y E_i \subset C_y E_i$. Оскільки за лемою 1 компоненти E_i, $i = 1, \ldots, k$, опуклі, то за наслідком 1 межа кожного конуса $C_y E_i$ складається з однієї або двох прямих, які перетинаються в точці y. Тоді межа $\widetilde{C}_y E_i$ складається з двох прямих, які перетинаються в точці y. Позначимо їх $\gamma_i^1(y)$ і $\gamma_i^2(y)$ (див. рис. 4, *б*). При цьому $\gamma_i^1(y), \gamma_i^2(y) \subset \subset C_y E_i$, тому за означенням 9 $\gamma_i^1(y) \cap E_i \neq \varnothing$, $\gamma_i^2(y) \cap E_i \neq \varnothing$. Нехай

$$x_i^1 \in \gamma_i^1(y) \cap E_i, \qquad x_i^2 \in \gamma_i^2(y) \cap E_i, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Побудуємо криві $\lambda_i \subset E_i$, $i = \overline{1,k}$, що з'єднують точки x_i^1, x_i^2. Тоді для довільної прямої $\gamma(y)$, яка проходить через точку y, існує індекс $i \in \{1, \ldots, k\}$ такий, що $\gamma(y) \cap \lambda_i \neq \varnothing$.

Розглянемо функцію

$$d_j(x) = \inf_{x^0 \in \partial E_j} |x - x^0|, \quad x \in E_j, \quad j = \overline{1,k}.$$

Вона неперервна в області E_j, $j = \overline{1,k}$. Тоді її звуження на компакт λ_j, $j = \overline{1,k}$, досягає мінімуму $d_j > 0$ на цьому компакті, тобто

$$d_j = \min_{x \in \lambda_j} d_j(x), \quad j = \overline{1,k}.$$

Оскільки E має скінченне число компонент, існує

$$d = \min_{j=\overline{1,k}} d_j > 0.$$

Тоді для довільної точки $x \in \lambda_j$, $j = \overline{1,k}$, її окіл $U(x,d) \subset E$. Нехай $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, d\}$. Розглянемо окіл $U(y,\varepsilon)$. Нехай $z \in U(y,\varepsilon)$ і $\gamma(z)$ — довільна пряма, яка проходить через точку z (див. рис. 5). Проведемо пряму $\gamma(y)$, паралельну прямій $\gamma(z)$. Вона перетне деяку криву λ_q, $q \in \{1, \ldots, k\}$, в деякій точці $x' \in \gamma(y) \cap \lambda_q$. Оскільки $U(x',\varepsilon) \subseteq U(x',d) \subset E$ і

$\gamma(z) \cap U(x', \varepsilon) \neq \varnothing$, то $\gamma(z) \cap E \neq \varnothing$. Точку z ми вибирали довільно, тому це означає, що всі точки околу $U(y, \varepsilon)$ є точками 1-неопуклості множини E. Отже, y є внутрішньою точкою множини $E^{\triangle}$.

***Наслідок* 4.** *Нехай відкрита множина $E \subset \mathbb{R}^2$ належить до класу $\mathbf{WC_1^2} \setminus \mathbf{C_1^2}$ і складається зі скінченного числа компонент. Тоді довільна компонента зв'язності множини $E^{\triangle}$ є опуклою.*

Доведення. Довільна компонента зв'язності множини $E^{\triangle}$ вочевидь є компонентою зв'язності множини $\mathrm{conv}_1 E$. Оскільки $\mathrm{conv}_1 E$ відкрита і за означенням 3 1-опукла, то вона також слабко 1-опукла. Тоді за лемою 1 усі компоненти $\mathrm{conv}_1 E$, а отже і компоненти $E^{\triangle}$, є опуклими.

Наслідок доведено.

Оскільки за теоремою 4 точки $\partial E^{\triangle}$ не належать множині $E^{\triangle}$, то для кожної точки $y \in \partial E^{\triangle}$ існує пряма $\gamma(y)$, яка не перетинає множину E. Крім того, за лемою 3 внаслідок опуклості компонент множини $E^{\triangle}$ для кожної компоненти множини $E^{\triangle}$ існують точки межі цієї компоненти такі, що компонента має єдину опорну пряму в кожній такій точці. Тоді справджується така лема.

Лема 10. *Нехай відкрита множина $E \subset \mathbb{R}^2$ зі скінченним числом компонент належить до класу $\mathbf{WC_1^2} \setminus \mathbf{C_1^2}$ і $\widetilde{E^{\triangle}}$ — довільна компонента зв'язності множини $E^{\triangle}$. Тоді*: 1) *якщо пряма $\gamma(y)$, $y \in \partial\widetilde{E^{\triangle}}$, не перетинає множину E, то вона опорна до $\widetilde{E^{\triangle}}$ в точці y*; 2) *якщо $\gamma(y)$ — єдина опорна пряма до компоненти $\widetilde{E^{\triangle}}$ в точці $y \in \partial\widetilde{E^{\triangle}}$, то $\gamma(y) \cap E = \varnothing$.*

Доведення. 1. Оскільки пряма $\gamma(y)$ не перетинає множину E, вона не перетинає множину $E^{\triangle}$, а отже, не перетинає $\widetilde{E^{\triangle}}$, яка за теоремою 4 є відкритою. Тоді за лемою 4 $\gamma(y)$ опорна до множини $\widetilde{E^{\triangle}}$ в точці y.

2. Оскільки за теоремою 4 компонента $\widetilde{E^{\triangle}}$ є відкритою, то $\gamma(y) \cap \widetilde{E^{\triangle}} = \varnothing$. При цьому за умовою $\gamma(y)$ — єдина пряма, яка проходить через точку y і не перетинає $\widetilde{E^{\triangle}}$, а отже, єдина, яка може не перетинати E. З того, що $\widetilde{E^{\triangle}}$ є відкритою, також випливає, що в точці y існує пряма, яка не перетинає множину E. Тому $\gamma(y) \cap E = \varnothing$.

Теорема 5. *Нехай відкрита множина $E \subset \mathbb{R}^2$ зі скінченним числом компонент належить до класу $\mathbf{WC_1^2} \setminus \mathbf{C_1^2}$ і $\widetilde{E^{\triangle}}$ — довільна компонента зв'язності множини $E^{\triangle}$. Нехай зв'язна підмножина $\partial\widetilde{E^{\triangle}}_* \subseteq \partial\widetilde{E^{\triangle}}$ така, що всі точки $\partial\widetilde{E^{\triangle}}_*$ є гладкими. Тоді $\partial\widetilde{E^{\triangle}}_* \neq \partial\widetilde{E^{\triangle}}$ і $\partial\widetilde{E^{\triangle}}_*$ — це відрізок або промінь.*

Доведення. Насамперед зауважимо, що підмножина $\partial\widetilde{E^{\triangle}}_*$ не може бути прямою, оскільки в протилежному випадку прямі, які проходять через точки $\widetilde{E^{\triangle}}$ паралельно прямій $\partial\widetilde{E^{\triangle}}_*$, містяться в $\widetilde{E^{\triangle}}$ і не перетинають множину E, що суперечить означенню 7.

Доведемо теорему від супротивного. Припустимо, що або компонента $\widetilde{E^{\triangle}}$ така, що всі точки $\partial\widetilde{E^{\triangle}}$ гладкі, або існують точки y_0, $y_1 \in \partial\widetilde{E^{\triangle}}$ такі, що частина межі між ними $\partial\widetilde{E^{\triangle}}_* \subset \partial\widetilde{E^{\triangle}}$ не є ані відрізком, ані променем. Тоді існують точки $y_2, y_3 \in \partial\widetilde{E^{\triangle}}_*$, $y_2 \neq y_3$, такі, що частина $\partial\widetilde{E^{\triangle}}_*$ між точками y_2, y_3, яку позначатимемо $\partial\widetilde{E^{\triangle}}_{y_2 y_3}$, не містить відрізків, оскільки в іншому випадку $\partial\widetilde{E^{\triangle}}_*$ — це або пряма, або відрізок, або промінь, що суперечить доведеному вище і нашому припущенню, або ламана, що суперечить тому, що всі точки $\partial\widetilde{E^{\triangle}}_*$ є гладкими.

Нехай $\gamma(y)$ — єдина опорна пряма до множини $\widetilde{E^{\triangle}}$ в кожній точці $y \in \partial\widetilde{E^{\triangle}}_{y_2 y_3}$. Тоді за лемою 10 $\gamma(y)$, $y \in \partial\widetilde{E^{\triangle}}_{y_2 y_3}$, не перетинає множину E. Оскільки за наслідком 2 пряма $\gamma(y)$ неперервно залежить від точки $y \in \partial\widetilde{E^{\triangle}}_{y_2 y_3}$, то, без обмеження загальності, вважаємо точки

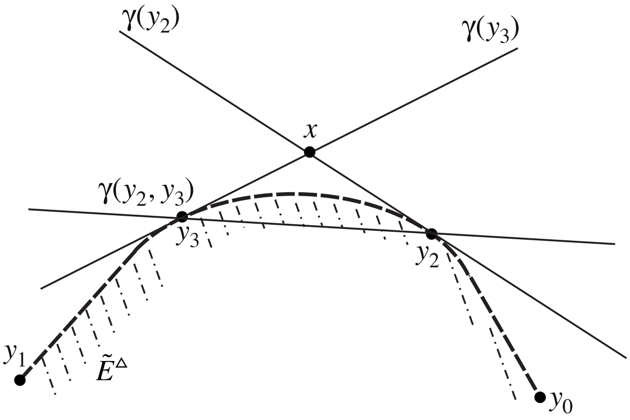


Рис. 6

$y_2,\ y_3$ достатньо близькими для того, щоб прямі $\gamma(y_2),\ \gamma(y_3)$ перетиналися в деякій точці x. Тоді прямі $\gamma(y_2),\ \gamma(y_3)$ є межею конуса $C_x\widetilde{E^{\triangle}}$. Оскільки пряма $\gamma(y)$ неперервно залежить від точки $y \in \partial\widetilde{E^{\triangle}}_{y_2y_3}$ і при цьому $\gamma(y)$ не перетинає множину E, то $E \cap (\mathbb{R}^2 \setminus C_x\widetilde{E^{\triangle}}) = \varnothing$.

Через точки $y_2,\ y_3$ проведемо пряму $\gamma(y_2, y_3)$ (див. рис. 6). Тоді $\gamma(y_2, y_3) = \gamma_{y_2} \cup y_2y_3 \cup \gamma_{y_3}$, де $\gamma_{y_2}, \gamma_{y_3} \subset \gamma(y_2, y_3)$ — замкнені промені з початком відповідно в точках $y_2,\ y_3$ і такі, що $\gamma_{y_2} \cap \gamma_{y_3} = \varnothing$. При цьому $\gamma_{y_2}, \gamma_{y_3} \subset (\mathbb{R}^2 \setminus C_x\widetilde{E^{\triangle}})$. Крім того, оскільки за наслідком 4 множина $\widetilde{E^{\triangle}}$ є опуклою, то за наслідком 3 відкритий відрізок $y_2y_3 \subset \widetilde{E^{\triangle}} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \overline{E}$. Тому $\gamma(y_2, y_3) \cap E = \varnothing$. З іншого боку, $\gamma(y_2, y_3) \cap E \neq \varnothing$, оскільки $\gamma(y_2, y_3)$ проходить через точки множини $\widetilde{E^{\triangle}}$.

Отже, ми прийшли до суперечності і наше припущення є хибним. Тоді обмежена частина $\partial\widetilde{E^{\triangle}}$, всі точки якої гладкі, є відрізком, а необмежена — променем.

***Наслідок* 5.** *Нехай відкрита множина $E \subset \mathbb{R}^2$ зі скінченним числом компонент належить до класу $\mathbf{WC_1^2} \setminus \mathbf{C_1^2}$ і $\widetilde{E^{\triangle}}$ — довільна компонента зв'язності множини $E^{\triangle}$. Тоді*: 1) *$\partial\widetilde{E^{\triangle}}$ містить принаймні одну вершину $\widetilde{E^{\triangle}}$*; 2) *частина межі множини $\widetilde{E^{\triangle}}$ між двома її довільними сусідніми вершинами — це відрізок*; 3) *необмежена частина межі множини $\widetilde{E^{\triangle}}$ з однією вершиною — це промінь.*

Лема 11. *Нехай відкрита множина $E \subset \mathbb{R}^2$ зі скінченним числом компонент зв'язності належить до класу $\mathbf{WC_1^2} \setminus \mathbf{C_1^2}$ і $a \in \partial\widetilde{E^{\triangle}}$ — вершина компоненти зв'язності $\widetilde{E^{\triangle}}$ множини $E^{\triangle}$. Тоді множина $\mathbb{R}^2 \setminus C_a\widetilde{E^{\triangle}}$ містить принаймні одну компоненту зв'язності множини E.*

Доведення. За наслідком 5 $\partial\widetilde{E^{\triangle}}$ — це ламана. Розглянемо прямі $\gamma'(a),\ \gamma''(a)$, які містять сусідні сторони ламаної $\partial\widetilde{E^{\triangle}}$ зі спільною вершиною a. Нехай $b' \in \gamma'(a),\ b'' \in \gamma''(a)$ — деякі точки цих двох сторін, відмінні від вершин. Тоді прямі $\gamma'(a),\ \gamma''(a)$ — єдині опорні прямі множини $\widetilde{E^{\triangle}}$ відповідно в точках $b',\ b''$, які за лемою 10 не перетинають множину E. Прямі $\gamma'(a),\ \gamma''(a)$ також є межею множини $C_a\widetilde{E^{\triangle}}$ (див. рис. 7, *а*).

Проведемо пряму $\gamma(b', b'')$, через точки $b',\ b''$. Тоді $\gamma(b', b'') = \gamma_{b'} \cup b'b'' \cup \gamma_{b''}$, де $b'b''$ — відкритий відрізок, який за наслідком 3 міститься в $\widetilde{E^{\triangle}} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \overline{E}$, і $\gamma_{b'}, \gamma_{b''}$ — замкнені промені на прямій $\gamma(b', b'')$ з початком відповідно в точках $b',\ b''$ такі, що $\gamma_{b'} \cap \gamma_{b''} = \varnothing$, а отже такі, що $\gamma_{b'}, \gamma_{b''} \subset \left(\mathbb{R}^2 \setminus C_a\widetilde{E^{\triangle}}\right)$. Оскільки $\gamma(b', b'')$ проходить через точки множини $\widetilde{E^{\triangle}}$, то за означенням множини $E^{\triangle}$ $\gamma(b', b'') \cap E \neq \varnothing$. Таким чином, $\left(\mathbb{R}^2 \setminus C_a\widetilde{E^{\triangle}}\right) \cap E \neq \varnothing$. Оскільки

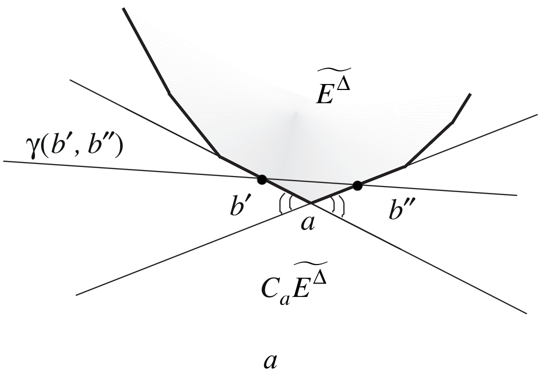


Рис. 7

$\partial\left(\mathbb{R}^2 \setminus C_a\widetilde{E^\triangle}\right) = \gamma'(a) \cup \gamma''(a)$, то $\partial\left(\mathbb{R}^2 \setminus C_a\widetilde{E^\triangle}\right) \cap E = \varnothing$. Отже, множина $\mathbb{R}^2 \setminus C_a\widetilde{E^\triangle}$ містить принаймні одну компоненту зв'язності множини E.

***Зауваження* 1.** Лема 11, зокрема, показує, що умова єдиності опорної прямої у твердженні 2 леми 10 є суттєвою. Справді, всі прямі $\gamma(a) \subset \mathbb{R}^2 \setminus C_a\widetilde{E^\triangle}$ є опорними до $\widetilde{E^\triangle}$ в точці a. Тоді, оскільки E відкрита, безліч прямих $\gamma(a) \subset \mathbb{R}^2 \setminus C_a\widetilde{E^\triangle}$ перетинають множину E.

Теорема 6. *Нехай відкрита множина $E \subset \mathbb{R}^2$ зі скінченним числом компонент s належить до класу $\mathbf{WC_1^2} \setminus \mathbf{C_1^2}$. Тоді довільна компонента множини $E^\triangle$ має скінченне число вершин p, до того ж $p \leq 2s$.*

Доведення. Нехай $\widetilde{E^\triangle}$ — деяка довільна компонента зв'язності множини $E^\triangle$. За лемою 3 та умовою 1 наслідку 5 p є скінченним або зчисленним. Занумеруємо вершини $\widetilde{E^\triangle}$ щодо обходу межі множини $\widetilde{E^\triangle}$ проти годинникової стрілки та позначимо їх $a_1, a_2, \ldots, a_p$. Розглянемо множину $\mathbb{R}^2 \setminus C_{a_j}\widetilde{E^\triangle}$, $j = 1, 2, \ldots, p$, яка є об'єднанням двох замкнених вертикальних кутів. Кут, який знаходиться справа від точки a_j відносно вибраного обходу, позначимо $C^1_{a_j}$, а той, що знаходиться зліва, — $C^2_{a_j}$. Тоді $\mathbb{R}^2 \setminus C_{a_j}\widetilde{E^\triangle} = C^1_{a_j} \cup C^2_{a_j}$, $j = 1, 2, \ldots, p$ (див. рис. 7, *б*).

Покажемо, що жодні два відкриті кути із сім'ї кутів $\operatorname{Int} C^1_{a_j}$, $j = \overline{1, p}$, не перетинаються. Розглянемо кут $C^1_{a_1}$ (див. рис. 8, *а*). Його межа поділяє площину на дві зв'язні компоненти: $\operatorname{Int} C^1_{a_1}$ і $\mathbb{R}^2 \setminus C^1_{a_1}$, при цьому $\widetilde{E^\triangle} \subset \mathbb{R}^2 \setminus C^1_{a_1}$. Розглянемо далі кут $C^1_{a_2}$. Одна його сторона належить стороні кута $C^1_{a_1}$, а друга містить відрізок $a_2a_3 \subset \partial\widetilde{E^\triangle}$, отже, $\operatorname{Int} C^1_{a_2} \subset \mathbb{R}^2 \setminus C^1_{a_1}$. Тоді $\operatorname{Int} C^1_{a_1} \cap \operatorname{Int} C^1_{a_2} = \varnothing$.

Далі розглянемо множину $C^1_{a_1a_2} := C^1_{a_1} \cup C^1_{a_2}$. Її межа $\partial C^1_{a_1a_2}$ поділяє площину на дві компоненти: $\operatorname{Int} C^1_{a_1a_2}$ та $\mathbb{R}^2 \setminus C^1_{a_1a_2}$, при цьому $\widetilde{E^\triangle} \subset \mathbb{R}^2 \setminus C^1_{a_1a_2}$. Розглянемо далі кут $C^1_{a_3}$. Одна його сторона належить $\partial C^2_{a_1a_2}$, а друга містить відрізок $a_3a_4 \subset \partial\widetilde{E^\triangle}$, отже, $\operatorname{Int} C^1_{a_3} \subset \mathbb{R}^2 \setminus C^1_{a_1a_2}$. Тоді $\operatorname{Int} C^1_{a_1a_2} \cap \operatorname{Int} C^1_{a_3} = \varnothing$.

Провівши аналогічні міркування для решти кутів $C^1_{a_j}$, $j = \overline{3, p}$, отримаємо

$$\operatorname{Int} C^1_{a_1a_2\ldots a_{k-1}} \cap \operatorname{Int} C^1_{a_k} = \varnothing, \quad k = 2, \ldots, p, \tag{2}$$

де

$$C^1_{a_1a_2\ldots a_{k-1}} := \bigcup_{j=1}^{k-1} C^1_{a_j}.$$

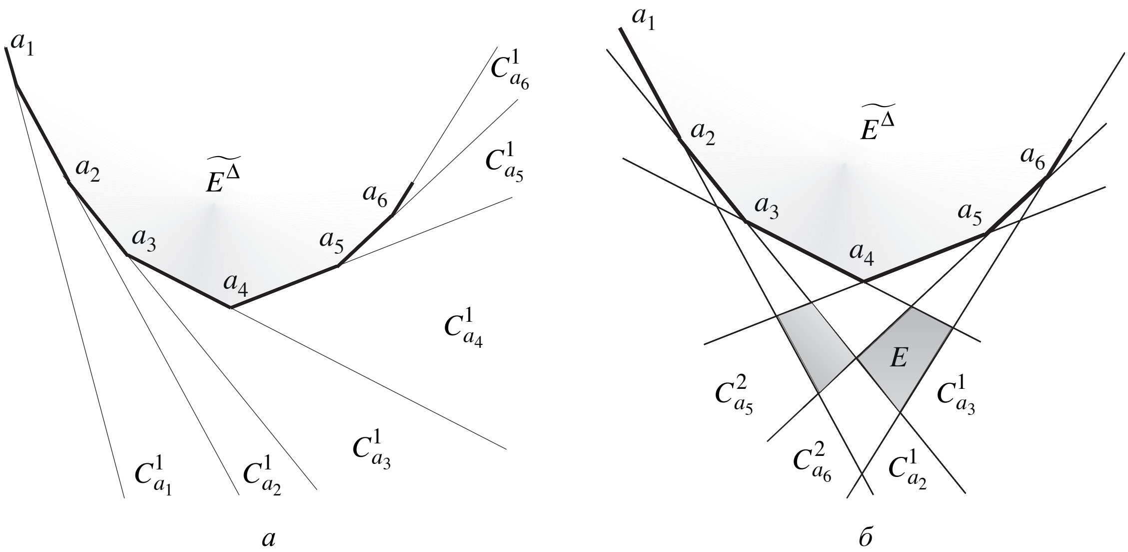


Рис. 8

Звідси випливає, що
$$\operatorname{Int} C^1_{a_i} \cap \operatorname{Int} C^1_{a_j} = \varnothing, \quad i, j = \overline{1, p}, \quad i \neq j.$$
Справді, якщо припустити, що існують індекси $l, q \in \{1, \ldots, p\}$, де без обмеження загальності $l < q$, такі, що $\operatorname{Int} C^1_{a_l} \cap \operatorname{Int} C^1_{a_q} \neq \varnothing$, то $\operatorname{Int} C^1_{a_l} \subset \operatorname{Int} C^1_{a_1 a_2 \ldots a_{q-1}}$ й $\operatorname{Int} C^1_{a_1 a_2 \ldots a_{q-1}} \cap \operatorname{Int} C^1_{a_q} \neq \varnothing$, що суперечить умові (2).

Тоді жодні два відкриті кути із сім'ї кутів $\operatorname{Int} C^2_{a_j}$, $j = \overline{1, p}$, не перетинаються, як вертикальні до відповідних кутів $\operatorname{Int} C^1_{a_j}$, $j = \overline{1, p}$. Але між собою ці сім'ї можуть перетинатися. При цьому вочевидь ніякі три і більше кутів $\operatorname{Int} C^k_{a_j}$, $k = 1, 2$, $j = 1, 2, \ldots, p$, не перетинаються одночасно. Тобто кожна компонента E_i, $k = \overline{1, s}$, може одночасно міститися не більше ніж у двох множинах $\mathbb{R}^2 \setminus C_{a_j} \widetilde{E^{\triangle}}$, $j = \overline{1, p}$ (див. рис. 8, *б*).

Оскільки за лемою 11 кожна множина $\mathbb{R}^2 \setminus C_{a_j} \widetilde{E^{\triangle}}$, $j = \overline{1, p}$, містить деяку компоненту множини E, існує відображення (не обов'язково однозначне) всієї множини вершин $A :=$ $:= \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ у множину компонент $\{E_1, E_2, \ldots, E_s\}$. При цьому, за доведеним вище, кожна компонента E_i, $k = \overline{1, s}$, одночасно відповідає не більше ніж двом вершинам з A. Тому $p \leq 2s$. Оскільки за умовою теореми число компонент s множини E скінченне, то p також є скінченним.

Теорема 7. *Нехай обмежена відкрита множина $E \subset \mathbb{R}^2$ зі скінченним числом компонент належать до класу $\mathbf{WC^2_1} \setminus \mathbf{C^2_1}$. Тоді кожна компонента зв'язності $\widetilde{E^{\triangle}}$ множини $E^{\triangle}$ — внутрішність опуклого багатокутника.*

Доведення. За теоремою 4, наслідком 4 і теоремою 6 $\widetilde{E^{\triangle}}$ відкрита, опукла і має скінченне число вершин. За наслідком 5 $\partial \widetilde{E^{\triangle}}$ — ламана. Тоді за означенням 13 множина $\widetilde{E^{\triangle}} \cup \partial \widetilde{E^{\triangle}}$ — опуклий багатокутник. Очевидно, що $\operatorname{Int}(\widetilde{E^{\triangle}} \cup \partial \widetilde{E^{\triangle}}) = \widetilde{E^{\triangle}}$.

Покажемо, що справедливим є й обернене твердження.

Твердження 1. *Для довільного опуклого багатокутника P існує відкрита множина E з класу $\mathbf{WC^2_1} \setminus \mathbf{C^2_1}$ така, що $E^{\triangle} = \operatorname{Int} P$.*

Спочатку доведемо кілька допоміжних тверджень.

Лема 12. *Нехай відкрита множина* $E \in \mathbf{WC^2_1}$ *і* $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s\}$ *— скінченна множина довільних прямих. Тоді* $E \setminus \bigcup_j \gamma_j \in \mathbf{WC^2_1}$.

Доведення. Без обмеження загальності вважаємо, що $E \cap \gamma_j \neq \varnothing$, $j = \overline{1, s}$. Нехай $x \in \partial\Big(E \setminus \bigcup_j \gamma_j\Big)$. Тоді $x \in \partial E$ або $x \in \bigcup_j \gamma_j$. Якщо $x \in \partial E$, то існує пряма $\gamma(x)$, яка не перетинає множину E, а отже, не перетинає множину $\Big(E \setminus \bigcup_j \gamma_j\Big) \subset E$. Якщо $x \in \bigcup_j \gamma_j$, то $x \in \gamma_q$, $q \in \{1, \ldots, s\}$. Тоді пряма, яка не перетинає $\Big(E \setminus \bigcup_j \gamma_j\Big)$, — це γ_q. Отже, множина $E \setminus \bigcup_j \gamma_j \in \mathbf{WC^2_1}$.

Лема 13. *Нехай відкрита множина* $E \notin \mathbf{C^2_1}$ *і* $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s\}$ *— скінченна множина довільних прямих. Тоді*

$$\Big(E \setminus \bigcup_j \gamma_j\Big)^{\triangle} = E^{\triangle} \setminus \bigcup_j \gamma_j.$$

Доведення. Якщо $E^{\triangle} \subset \bigcup_j \gamma_j$, то, з одного боку, $E^{\triangle} \setminus \bigcup_j \gamma_j = \varnothing$, а з іншого —

$$\Big(E \setminus \bigcup_j \gamma_j\Big)^{\triangle} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \Big(E \setminus \bigcup_j \gamma_j\Big) = (\mathbb{R}^2 \setminus E) \cup \Big(\bigcup_j \gamma_j\Big).$$

Через кожну точку $x \in (\mathbb{R}^2 \setminus E) \setminus \bigcup_j \gamma_j$ проходить пряма, яка не перетинає множину E, а отже, не перетинає множину $E \setminus \bigcup_j \gamma_j \subset E$. Якщо $x \in \bigcup_j \gamma_j$, то $x \in \gamma_q$ для деякого $q \in \{1, 2, \ldots, s\}$ і $\gamma_q \cap \Big(E \setminus \bigcup_j \gamma_j\Big) = \varnothing$, тобто $E \setminus \bigcup_j \gamma_j \in \mathbf{C^2_1}$ і $\Big(E \setminus \bigcup_j \gamma_j\Big)^{\triangle} = E^{\triangle} \setminus \bigcup_j \gamma_j = \varnothing$.

Нехай $x \in E^{\triangle} \setminus \bigcup_j \gamma_j \neq \varnothing$. Оскільки $x \in E^{\triangle}$, то довільна пряма $\gamma(x)$ перетинає E. Оскільки $x \notin \bigcup_j \gamma_j$, то пряма $\gamma(x)$ не збігається з жодною з прямих γ_j, $j = \overline{1, s}$. Тоді для кожного $j = \overline{1, s}$ або $\gamma(x) \cap \gamma_j = \varnothing$, або прямі $\gamma(x)$, γ_j перетинаються в одній точці. Оскільки E відкрита, то множина $\gamma(x) \cap E$ також є відкритою щодо своєї афінної оболонки. Тоді множина

$$(\gamma(x) \cap E) \setminus \bigcup_j (\gamma(x) \cap \gamma_j) = (\gamma(x) \cap E) \setminus \Big(\gamma(x) \cap \bigcup_j (\gamma_j)\Big) = \gamma(x) \cap \Big(E \setminus \bigcup_j \gamma_j\Big)$$

відкрита щодо своєї афінної оболонки, а отже, непорожня, тобто $x \in \Big(E \setminus \bigcup_j \gamma_j\Big)^{\triangle}$.

Нехай $x \in \Big(E \setminus \bigcup_j \gamma_j\Big)^{\triangle}$. Тоді довільна пряма $\gamma(x)$ перетинає множину $E \setminus \bigcup_j \gamma_j$. Оскільки $E \setminus \bigcup_j \gamma_j \subset E$, то $\gamma(x) \cap E \neq \varnothing$. Отже, $x \in E^{\triangle}$. При цьому $x \notin \bigcup_j \gamma_j$, оскільки в протилежному випадку існує таке $q \in \{1, \ldots, s\}$, що $x \in \gamma_q$ і $\gamma_q \cap \Big(E \setminus \bigcup_j \gamma_j\Big) = \varnothing$, що суперечить вибору точки x. Отже, $x \in E^{\triangle} \setminus \bigcup_j \gamma_j$.

Наслідок 6. *Нехай відкрита множина* $E \subset \mathbb{R}^2$ *належить до класу* $\mathbf{WC^2_1} \setminus \mathbf{C^2_1}$ *і складається зі скінченного числа компонент, а* $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s\}$ *— скінченна множина довільних прямих.*

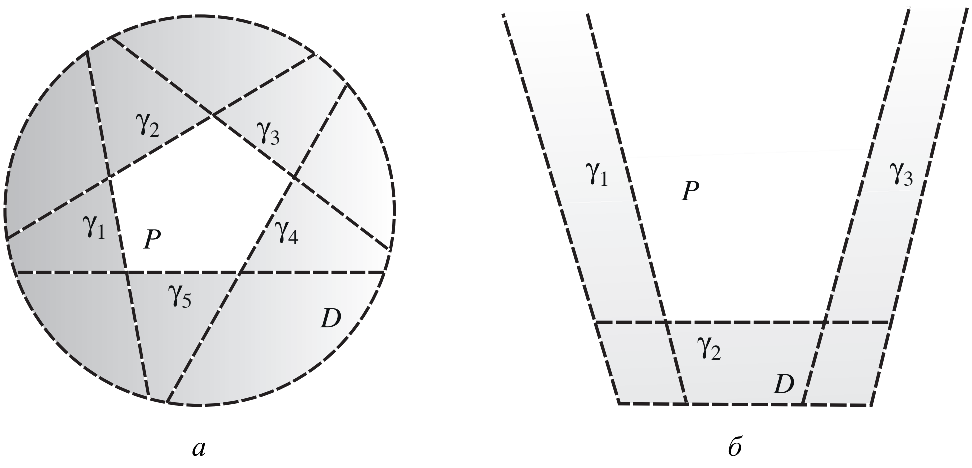


Рис. 9

Тоді $E \setminus \bigcup\limits_j \gamma_j \in \mathbf{WC_1^2} \setminus \mathbf{C_1^2}$, *до того ж*

$$\Bigl(E \setminus \bigcup_j \gamma_j\Bigr)^{\triangle} = E^{\triangle} \setminus \bigcup_j \gamma_j. \tag{3}$$

Доведення. За лемою 12 $E \setminus \bigcup\limits_j \gamma_j \in \mathbf{WC_1^2}$. Оскільки множина E відкрита, то за теоремою 4 $E^{\triangle}$ також є відкритою. Тоді множина $E^{\triangle} \setminus \bigcup\limits_j \gamma_j$ також відкрита, а отже непорожня, і за лемою 13 виконується умова (3), тобто $E \setminus \bigcup\limits_j \gamma_j \notin \mathbf{C_1^2}$.

Теорема 8. *Нехай задано множину* $E := (D \setminus \operatorname{Int} P) \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{s} \gamma_k \subset \mathbb{R}^2$, *де* P — *опуклий багатокутник;* γ_k, $k = \overline{1, s}$, — *прямі, які містять сторони* P; D — *довільна відкрита опукла множина, яка містить* P. *Тоді* $E \in \mathbf{WC_1^2} \setminus \mathbf{C_1^2}$ *і* $E^{\triangle} = \operatorname{Int} P$.

Доведення. Межа множини E складається з точок ∂D, через які за лемою 5 проходять прямі, що не перетинають D, а отже не перетинають множину E, та відрізків, що містяться на прямих, які за побудовою не перетинають E. Тому множина E слабко 1-опукла (див. рис. 9, *а* (з обмеженим багатокутником P) та *б* (з необмеженим багатокутником)).

Розглянемо множину $D \setminus P$. Вона відкрита і не 1-опукла, до того ж

$$(D \setminus P)^{\triangle} = P. \tag{4}$$

Тоді $(D \setminus P) \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{s} \gamma_k = E$ і за лемою 13, враховуючи (4), маємо

$$E^{\triangle} = (D \setminus P)^{\triangle} \setminus \bigcup_{k=1}^{s} \gamma_k = P \setminus \bigcup_{k=1}^{s} \gamma_k = \operatorname{Int} P.$$

Тепер справедливість твердження 1 безпосередньо випливає з теореми 8.

Лема 14. *Нехай множина* $E \notin \mathbf{C_1^2}$ *і* $P^0 \subseteq E^{\triangle}$. *Тоді* $\Bigl(E \cup P^0\Bigr)^{\triangle} = E^{\triangle} \setminus P^0$.

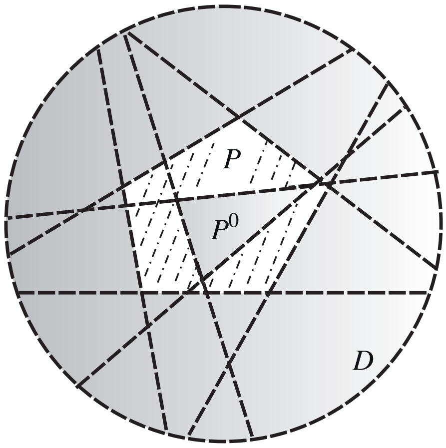


Рис. 10

Доведення. Якщо $P^0 = E^{\triangle}$, що рівносильно $E^{\triangle} \setminus P^0 = \varnothing$, то $E \cup P^0 = \mathrm{conv}_1 E$, а отже, $\left(E \cup P^0\right)^{\triangle} = \varnothing$.

Нехай тепер $P^0 \subsetneq E^{\triangle}$ і $x \in E^{\triangle} \setminus P^0$. Оскільки $x \in E^{\triangle}$, то довільна пряма $\gamma(x)$ перетинає множину E, а отже перетинає множину $E \cup P^0$, тобто $x \in \left(E \cup P^0\right)^{\triangle}$. Нехай $x \in \left(E \cup P^0\right)^{\triangle}$. Тоді довільна пряма $\gamma(x)$ перетинає E або P^0. Але якщо $\gamma(x) \cap P^0 \neq \varnothing$, то $\gamma(x) \cap E \neq \varnothing$, оскільки $P^0 \subsetneq E^{\triangle}$. Тоді $x \in E^{\triangle}$ і за означенням 7 $x \notin P^0$. Отже, $x \in E^{\triangle} \setminus P^0$.

Теорема 9. *Для довільного опуклого багатокутника P^0 існує відкрита множина E_* з класу $\mathbf{WC_1^2} \setminus \mathbf{C_1^2}$ така, що $E_*^{\triangle}$ також належать до класу $\mathbf{WC_1^2} \setminus \mathbf{C_1^2}$ і $(E_*^{\triangle})^{\triangle} = \mathrm{Int}\, P^0$.*

Доведення. Нехай P — довільний опуклий багатокутник, такий, що $P^0 \subset \mathrm{Int}\, P$, і D — довільна відкрита опукла множина, яка містить P (див. рис. 10). Побудуємо прямі γ_k^0, $k = \overline{1, p}$, які містять сторони P^0, і прямі γ_k, $k = \overline{1, s}$, які містять сторони P. Тоді за теоремою 8 множини

$$E^0 := (\mathrm{Int}\, P \setminus \mathrm{Int}\, P^0) \setminus \bigcup_{k=1}^{p} \gamma_k^0, \qquad E := (D \setminus \mathrm{Int}\, P) \setminus \bigcup_{k=1}^{s} \gamma_k \tag{5}$$

належать до класу $\mathbf{WC_1^2} \setminus \mathbf{C_1^2}$ і

$$(E^0)^{\triangle} = \mathrm{Int}\, P^0, \qquad E^{\triangle} = \mathrm{Int}\, P. \tag{6}$$

За лемою 14 і внаслідок (6) маємо

$$(E \cup \mathrm{Int}\, P^0)^{\triangle} = E^{\triangle} \setminus \mathrm{Int}\, P^0 = \mathrm{Int}\, P \setminus \mathrm{Int}\, P^0. \tag{7}$$

Тепер розглянемо множину $E_* := (E \cup \mathrm{Int}\, P^0) \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{p} \gamma_k^0$. За лемою 13, враховуючи (7) і (5), отримуємо

$$E_*^{\triangle} = (E \cup \mathrm{Int}\, P^0)^{\triangle} \setminus \bigcup_{k=1}^{p} \gamma_k^0 = \left(\mathrm{Int}\, P \setminus \mathrm{Int}\, P^0\right) \setminus \bigcup_{k=1}^{p} \gamma_k^0 = E^0 \neq \varnothing.$$

Отже, $E_* \notin \mathbf{C_1^2}$ і, враховуючи (6), одержуємо $(E_*^{\triangle})^{\triangle} = \mathrm{Int}\, P^0$.

Покажемо, що $E_* \in \mathbf{WC_1^2}$. Спочатку зазначимо, що

$$E_* = (E \cup \operatorname{Int} P^0) \setminus \bigcup_{k=1}^{p} \gamma_k^0 = \left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{p} \gamma_k^0 \right) \cup \operatorname{Int} P^0$$

і $\partial E_* = \partial \left(E \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{p} \gamma_k^0 \right) \cup \partial(\operatorname{Int} P^0)$.

За наслідком 6 відкрита множина $E \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{p} \gamma_k^0$ належить до класу $\mathbf{WC_1^2} \setminus \mathbf{C_1^2}$ і $\left(E \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{p} \gamma_k^0 \right)^{\triangle} =$ $= E^{\triangle} \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{p} \gamma_k^0$. Оскільки $\operatorname{Int} P^0 \subset E^{\triangle} \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{p} \gamma_k^0$, то пряма $\gamma(x)$, яка проходить через точку $x \in \partial \left(E \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{p} \gamma_k^0 \right)$ і не перетинає множину $E \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{p} \gamma_k^0$, не перетинає також $\operatorname{Int} P^0$, а отже і множину E_*. Якщо $x \in \partial(\operatorname{Int} P^0)$, то існує $q \in \{1, \ldots, p\}$ таке, що $x \in \gamma_q^0$ і $\gamma_q^0 \cap E_* = \varnothing$. Отже, для довільної точки $x \in \partial E_*$ існує пряма $\gamma(x)$, яка не перетинає множину E_*.

Література

1. Л. А. Айзенберг, *О разложении голоморфных функций многих комплексных переменных на простейшие дроби*, Сиб. мат. журн., **8**, № 5, 1124 – 1142 (1967).
2. Ю. Б. Зелинский, *Многозначные отображения в анализе*, Наук. думка, Киев (1993).
3. К. Лейхтвейс, *Выпуклые множества*, Наука, Москва (1985).
4. Б. А. Розенфельд, *Многомерные пространства*, Наука, Москва (1966).
5. А. И. Герасин, *Об $(n-1)$-выпуклых множествах*, Некоторые вопросы анализа и дифференциальной топологии, Ин-т математики АН УССР, Киев (1988), с. 8 – 14.
6. А. И. Герасин, *Обозримость $(n-1)$-выпуклых множеств*, Комплексный анализ, алгебра и топология, Ин-т математики АН УССР, Киев (1990), с. 20 – 28.
7. Х. К. Дакхіл, Ю. Б. Зелінський, Б. А. Кліщук, *Про слабко m-опуклі множини*, Доп. НАН України, № 4, 3 – 6 (2017).
8. Ю. Б. Зелинский, И. В. Момот, *О (n, m)-выпуклых множествах*, Укр. мат. журн., **53**, № 3, 422 – 427 (2001).
9. Ю. Б. Зелинский, И. Ю. Выговская, М. В. Стефанчук, *Обобщенно выпуклые множества и задача о тени*, Укр. мат. журн., **67**, № 12, 1658 – 1666 (2015).
10. Ю. Б. Зелинский, *Обобщенно выпуклые оболочки множеств и задача о тени*, Укр. мат. вісн., **12**, № 2, 278 – 289 (2015).
11. Ю. Б. Зелінський, *Варіації до задачі про „тінь”*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **14**, № 1, 163 – 170 (2017).
12. В. Л. Мельник, *Топологічна класифікація $(n-1)$-опуклих множин*, Укр. мат. журн., **50**, № 9, 1236 – 1243 (1998).
13. Т. М. Осіпчук, *Топологічні властивості слабко m-опуклих множин*, Праці Ін-ту прикл. математики і механіки НАН України, **34**, 75 – 84 (2020).
14. М. В. Стефанчук, *Узагальнено опуклі множини та їх застосування*, Дис. . . . канд. фіз.-мат. наук, Київ (2016).
15. Х. К. Дакхіл, *Задачі про тінь та відображення постійної кратності*, Дис. . . . канд. фіз.-мат. наук, Київ (2017).
16. Г. Худайберганов, *Об одной задаче Грауэрта*, Докл. АН УзССР, № 3, 7 – 8 (1975).
17. Г. Худайберганов, *Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров*, Деп. в ВИНИТИ, № 1772-85 Деп.

Одержано 25.08.21