DOI: 10.37863/umzh.v74i2.6906

УДК 519.653

С. Г. Солодкий, С. А. Стасюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ОПТИМІЗАЦІЮ МЕТОДІВ ЧИСЕЛЬНОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

For the problem of numerical differentiation for bivariate functions with mixed smoothness, we find the exact orders of the minimal radius of Galerkin information and construct a truncation method, which is optimal in the sense of the indicated quantity.

Для задачі чисельного диференціювання функцій двох змінних із мішаною гладкістю знайдено точні порядки мінімального радіуса гальоркінської інформації, а також побудовано варіант методу зрізання, що є оптимальним у сенсі цієї величини.

1. Вступ. Постановка задачі. Нехай $C = C(Q)$ — простір неперервних на $Q = [-1,1]^2$ функцій двох змінних із нормою $\|f\|_C = \max_{(t,\tau)\in Q} f(t,\tau)$. Через $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ позначимо ортонормовану на $[-1,1]$ систему поліномів Лежандра

$$\varphi_k(t) = \sqrt{k+1/2}\,(2^k k!)^{-1}\,\frac{d^k}{dt^k}\big[(t^2-1)^k\big], \quad k = 0,1,2,\ldots .$$

Під $L_2 = L_2(Q)$ розумітимемо простір сумовних з квадратом на Q функцій $f(t,\tau)$ зі скалярним добутком

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} f(t,\tau)\, g(t,\tau)\, d\tau\, dt$$

і стандартною нормою

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k,j=0}^{\infty} \big|\langle f, \varphi_{k,j}\rangle\big|^2 < \infty,$$

де

$$\langle f, \varphi_{k,j}\rangle = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} f(t,\tau)\,\varphi_k(t)\,\varphi_j(\tau)\, d\tau\, dt, \quad k,j = 0,1,2,\ldots,$$

— коефіцієнти Фур'є – Лежандра функції f.

Нехай $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\cup\{0\}$. Через ℓ_2 позначимо простір числових послідовностей $\overline{x} = \{x_{k,j}\}_{(k,j)\in\mathbb{N}_0^2}$ таких, що

$$\|\,\overline{x}\,\|_{\ell_2}^2 := \sum_{(k,j)\in\mathbb{N}_0^2} |x_{k,j}|^2 < \infty.$$

Наведемо означення простору гладких функцій

$$L_2^{\overline{\mu}} := L_2^{\overline{\mu}}(Q) := \left\{ f\in L_2(Q)\colon \|f\|_{\overline{\mu}}^2 = \sum_{k,j=0}^{\infty} \underline{k}^{2\mu_1}\underline{j}^{2\mu_2}\langle f, \varphi_{k,j}\rangle^2 < \infty \right\},$$

де $\overline{\mu} = (\mu_1,\mu_2),\ \mu_1,\mu_2 > 0,\ \underline{k} = \max\{1,k\},\ k = 0,1,2,\ldots .$

Зауважимо, що у подальшому ми будемо використовувати однакові позначення як для простору, так і для одиничної кулі $L_2^{\overline{\mu}} = L_2^{\overline{\mu}}(Q) = \big\{ f \in L_2^{\overline{\mu}} \colon \|f\|^2_{\overline{\mu}} \le 1 \big\}$ з цього простору, яку назвемо класом функцій. Що саме мається на увазі під $L_2^{\overline{\mu}}$: простір чи клас, буде зрозуміло в залежності від контексту у кожному конкретному випадку. Зауважимо, що $L_2^{\overline{\mu}}$ узагальнює клас функцій двох змінних, які мають домінуючу мішану частинну похідну.

Припустимо, що замість точних значень коефіцієнтів Фур'є – Лежандра $\langle f, \varphi_{k,j} \rangle$ доступними є лише деякі їх збурення. Більш строго, вважатимемо, що відомою є числова послідовність $\overline{f^\delta} = \big\{ \langle f^\delta, \varphi_{k,j} \rangle \big\}_{(k,j) \in \mathbb{N}_0^2}$ така, що

$$\sum_{k,j=0}^{\infty} \xi_{k,j}^2 \le \delta^2, \quad 0 < \delta < 1, \tag{1.1}$$

де $\xi_{k,j} = \langle f - f^\delta, \varphi_{k,j} \rangle$, $k, j = 0, 1, 2, \ldots$.

Під першою частинною похідною $f^{(1,0)}$ функції $f \in L_2^{\overline{\mu}}$ розумітимемо ряд

$$f^{(1,0)}(t, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \langle f, \varphi_{k,j} \rangle \, \varphi_k'(t) \, \varphi_j(\tau). \tag{1.2}$$

Розглянемо задачу чисельного диференціювання функцій з $L_2^{\overline{\mu}}$, яка полягає у побудові наближень до (1.2), що є стійкими до малих збурень вхідних даних. Торкаючись історії вивчення методів чисельного диференціювання, слід зазначити, що інтенсивного розвитку ці дослідження набули у 60-х роках минулого століття внаслідок створення теорії некоректних задач. Першою роботою щодо диференціювання функцій, що була написана з точки зору теорії некоректних задач, є [2]. Станом на сьогоднішній день багатьма дослідниками було запропоновано та обґрунтовано різні методи чисельного диференціювання функцій однієї змінної (див., наприклад, [1, 4 – 6, 13, 14, 20, 21]). Що стосується функцій кількох (навіть двох) змінних, то вказана задача вивчена значно менше. Тут можна згадати, зокрема, роботи [7, 11, 17, 22].

Дослідження даної роботи присвячено оптимізації методів чисельного диференціювання функцій із класів $L_2^{\overline{\mu}}$. Далі наведемо строгу постановку задачі, що буде вивчатися. У координатному просторі $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$ візьмемо довільну обмежену область Ω. Під $\mathrm{card}(\Omega)$ розумітимемо кількість точок, що складають Ω. Інформаційним вектором $G\big(\Omega, \overline{f^\delta}\big) \in \mathbb{R}^N$, $\mathrm{card}(\Omega) = N$, будемо називати набір значень збурених коефіцієнтів Фур'є – Лежандра $\big\{ \langle f^\delta, \varphi_{k,j} \rangle \big\}_{(k,j) \in \Omega}$.

Нехай $X = L_2(Q)$ або $X = C(Q)$. Під алгоритмом чисельного диференціювання розумітимемо будь-яке відображення $\psi^{(1,0)} = \psi^{(1,0)}(\Omega)$, що зіставляє інформаційному вектору $G\big(\Omega, \overline{f^\delta}\big)$ елемент $\psi^{(1,0)}\big(G\big(\Omega, \overline{f^\delta}\big)\big) \in X$, який береться за наближення до першої частинної похідної функції f із класу $L_2^{\overline{\mu}}$. Сукупність усіх алгоритмів $\psi^{(1,0)}(\Omega) \colon \mathbb{R}^N \to X$, що використовують один і той же інформаційний вектор $G\big(\Omega, \overline{f^\delta}\big)$, позначимо через $\Psi(\Omega)$.

Слід зазначити, що від алгоритмів з множини $\Psi(\Omega)$, взагалі кажучи, не вимагається ні лінійності, ні навіть стійкості. Єдина умова для алгоритмів з $\Psi(\Omega)$ полягає у використанні вхідної інформації у вигляді збурених значень коефіцієнтів Фур'є – Лежандра з індексами, що належать до області Ω координатної площини. Таке загальне розуміння алгоритму пояснюється прагненням до охоплення та порівняння якомога більш широкого кола можливих способів чисельного диференціювання.

Похибка алгоритму $\psi^{(1,0)}$ на класі функцій $L_2^{\overline{\mu}}$ визначається величиною

$$\varepsilon_\delta\big(L_2^{\overline{\mu}}, \psi^{(1,0)}(\Omega), X, \ell_2\big) = \sup_{f\in L_2^{\overline{\mu}}} \sup_{\overline{f^\delta}\,:\,(1.1)} \left\| f^{(1,0)} - \psi^{(1,0)}\big(G\big(\Omega, \overline{f^\delta}\big)\big) \right\|_X.$$

Мінімальним радіусом гальоркінської інформації для задачі чисельного диференціювання на класі $L_2^{\overline{\mu}}$ будемо називати величину

$$R_{N,\delta}^{(1,0)}\big(L_2^{\overline{\mu}}, X, \ell_2\big) = \inf_{\Omega\,:\,\mathrm{card}(\Omega)\le N} \inf_{\psi^{(1,0)}\in\Psi(\Omega)} \varepsilon_\delta\big(L_2^{\overline{\mu}}, \psi^{(1,0)}(\Omega), X, \ell_2\big).$$

Величина $R_{N,\delta}^{(1,0)}\big(L_2^{\overline{\mu}}, X, \ell_2\big)$ визначає мінімальну похибку в метриці простору X, яку можна досягти при чисельному диференціюванні довільної функції $f \in L_2^{\overline{\mu}}$, використовуючи при цьому не більше ніж N значень її коефіцієнтів Фур'є – Лежандра, які є δ-збуреними в метриці ℓ_2. Зазначимо, що раніше для інших типів некоректних задач мінімальний радіус гальоркінської інформації вивчався в роботах [8, 12]. Слід додати, що мінімальний радіус характеризує інформаційну складність розглядуваної задачі і традиційно досліджується в рамках IBC-теорії (Information Based Complexity Theory), основи якої закладено в монографії [19].

Метою наших досліджень є знаходження порядкових оцінок величин $R_{N,\delta}^{(1,0)}\big(L_2^{\overline{\mu}}, C, \ell_2\big)$ і $R_{N,\delta}^{(1,0)}\big(L_2^{\overline{\mu}}, L_2, \ell_2\big)$.

2. Стандартний варіант методу зрізання. Оцінка похибки в L_2. Дослідження в пунктах 2 – 4 присвячено застосуванню методу зрізання для чисельного диференціювання функцій з $L_2^{\overline{\mu}}(Q)$. Суть цього методу полягає в заміні ряду Фур'є (1.2) скінченною сумою Фур'є, що використовує збурені дані $\langle f^\delta, \varphi_{k,j}\rangle$. Для забезпечення стійкості наближення та досягнення необхідного порядку точності в методі зрізання необхідно вибрати належним чином параметр дискретизації, який тут відіграє роль параметра регуляризації. В узгодженні параметра дискретизації з рівнем збурення вхідних даних і полягає процес регуляризації в методі зрізання. Простота реалізації є основною перевагою цього методу. На сьогодні існує кілька підходів щодо того, з якої області координатного простору вибирати індекси задіяних коефіцієнтів Фур'є – Лежандра функцій багатьох змінних. В межах наших досліджень будуть розглянуті два найефективніших та найпопулярніших підходи до вибору цієї області: по-перше, стандартний варіант, коли область є прямокутником, а також модифікований варіант, який полягає у застосуванні так званого гіперболічного хреста (більш докладно про використання гіперболічного хреста в теорії наближень див. огляд [3], а при розв'язуванні некоректних задач — [8, 9, 12, 15, 16]).

Насамперед розглянемо стандартний підхід, тобто стандартний варіант методу зрізання:

$$\mathcal{D}_{n,m} f^\delta(t,\tau) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{m} \langle f^\delta, \varphi_{k,j}\rangle\, \varphi_k'(t)\, \varphi_j(\tau). \tag{2.1}$$

Тут за область Ω взято прямокутник $\square_{n,m} = [1,n]\times[0,m]$. Параметри n і m слід вибирати в (2.1) залежно від δ і $\overline{\mu}$ так, щоб мінімізувати похибку

$$f^{(1,0)}(t,\tau) - \mathcal{D}_{n,m} f^\delta(t,\tau) = \big(f^{(1,0)}(t,\tau) - \mathcal{D}_{n,m} f(t,\tau)\big) + \big(\mathcal{D}_{n,m} f(t,\tau) - \mathcal{D}_{n,m} f^\delta(t,\tau)\big). \tag{2.2}$$

Перший доданок у правій частині (2.2) запишемо у вигляді

$$f^{(1,0)}(t,\tau) - \mathcal{D}_{n,m}f(t,\tau) = \Delta_1(t,\tau) + \Delta_2(t,\tau), \tag{2.3}$$

де

$$\Delta_1(t,\tau) = \sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\langle f, \varphi_{k,j}\rangle\, \varphi'_k(t)\, \varphi_j(\tau), \tag{2.4}$$

$$\Delta_2(t,\tau) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=m+1}^{\infty}\langle f, \varphi_{k,j}\rangle\, \varphi'_k(t)\, \varphi_j(\tau). \tag{2.5}$$

У подальшому нам знадобиться формула (див. [10], лема 18)

$$\varphi'_k(t) = \sqrt{k+1/2}\sum_{i=0}^{(k-q_k-1)/2}\sqrt{2i+q_k+1/2}\,\varphi_{2i+q_k}(t), \quad k\in\mathbb{N}, \tag{2.6}$$

де $q_k = 1$, якщо k парне, і $q_k = 0$, якщо k непарне.

Виконуючи заміну змінних $l = 2i + q_k$, з (2.6) одержуємо

$$\varphi'_k(t) = \sqrt{k+1/2}\sum_{l=q_k}^{k-1}\sqrt{l+1/2}\,\varphi_l(t) = \sqrt{k+1/2}\sum_{l=0}^{k-1}{}^{*}\sqrt{l+1/2}\,\varphi_l(t), \quad k\in\mathbb{N}, \tag{2.7}$$

де в агрегаті $\sum_{l=0}^{*k-1}\sqrt{l+1/2}\,\varphi_l(t)$ підсумовування проводиться лише по таких l, що $l+k$ непарне.

Використовуючи (2.7) та змінюючи порядок підсумовування

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{l=0}^{k-1}{}^{*} = \sum_{l=0}^{n}{}^{*}\sum_{k=n+1}^{\infty} + \sum_{l=n+1}^{\infty}{}^{*}\sum_{k=l+1}^{\infty},$$

для (2.4) маємо

$$\Delta_1(t,\tau) = 2\sum_{l=0}^{n}{}^{*}\sum_{j=0}^{\infty}\sqrt{l+1/2}\,\varphi_l(t)\,\varphi_j(\tau)\sum_{k=n+1}^{\infty}\sqrt{k+1/2}\,\langle f,\varphi_{k,j}\rangle +$$

$$+2\sum_{l=n+1}^{\infty}{}^{*}\sum_{j=0}^{\infty}\sqrt{l+1/2}\,\varphi_l(t)\,\varphi_j(\tau)\sum_{k=l+1}^{\infty}\sqrt{k+1/2}\,\langle f,\varphi_{k,j}\rangle, \tag{2.8}$$

тобто

$$\Delta_1(t,\tau) = 2\sum_{l=0}^{\infty}{}^{*}\sum_{j=0}^{\infty}\sqrt{l+1/2}\,\varphi_l(t)\,\varphi_j(\tau)\,a_{lj}, \tag{2.9}$$

де $a_{lj} = \sum_{k=n+1}^{\infty}\sqrt{k+1/2}\,\langle f,\varphi_{k,j}\rangle$, якщо $l\le n$, або $a_{lj} = \sum_{k=l+1}^{\infty}\sqrt{k+1/2}\,\langle f,\varphi_{k,j}\rangle$, якщо $l > n$.

Лема 2.1. *Нехай* $f\in L_2^{\overline{\mu}}$, $\mu_1 > 2$, $\mu_2 > 0$. *Тоді*

$$\left\| f^{(1,0)} - \mathcal{D}_{n,m}f\right\|_2 \le c\,\|f\|_{\overline{\mu}}\,(n^{-\mu_1+2} + m^{-\mu_2}).$$

Доведення. Зважаючи на (2.9), маємо

$$\|\Delta_1\|_2^2 = 4\sum_{l=0}^{\infty}{}^{*}(l+1/2)\sum_{j=0}^{\infty} a_{lj}^2.$$

Спочатку розглянемо випадок $l \le n$. Тоді для $\mu_1 > 1$ одержуємо

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{lj}^2 = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\sqrt{k+1/2}\,\frac{k^{\mu_1}\underline{j}^{\mu_2}}{k^{\mu_1}\underline{j}^{\mu_2}}\,\langle f,\varphi_{k,j}\rangle\right)^2 \le$$

$$\le \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k+1/2}{k^{2\mu_1}}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{2\mu_1}\underline{j}^{2\mu_2}\,|\langle f,\varphi_{k,j}\rangle|^2 \le$$

$$\le c\,\|f\|_{\overline{\mu}}^2\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{2\mu_1-1}} \le c\,\|f\|_{\overline{\mu}}^2\,n^{-2\mu_1+2}.$$

Нехай тепер $l > n$. Тоді для $\mu_1 > 1$ справджується

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{lj}^2 = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=l+1}^{\infty}\sqrt{k+1/2}\,\frac{k^{\mu_1}\underline{j}^{\mu_2}}{k^{\mu_1}\underline{j}^{\mu_2}}\,\langle f,\varphi_{k,j}\rangle\right)^2 \le$$

$$\le \sum_{k=l+1}^{\infty}\frac{k+1/2}{k^{2\mu_1}}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=l+1}^{\infty} k^{2\mu_1}\underline{j}^{2\mu_2}\,|\langle f,\varphi_{k,j}\rangle|^2 \le$$

$$\le c\,\|f\|_{\overline{\mu}}^2\sum_{k=l+1}^{\infty}\frac{1}{k^{2\mu_1-1}} \le c\,\|f\|_{\overline{\mu}}^2\,(l+1)^{-2\mu_1+2}.$$

Завдяки одержаним вище оцінкам при $\mu_1 > 2$ знаходимо

$$\|\Delta_1\|_2^2 \le c\,\|f\|_{\overline{\mu}}^2\left(n^{-2\mu_1+2}\sum_{l=0}^{n}(l+1/2) + \sum_{l=n+1}^{\infty}\frac{l+1/2}{(l+1)^{2\mu_1-2}}\right) \le c\,\|f\|_{\overline{\mu}}^2\,n^{-2\mu_1+4}.$$

Таким чином,

$$\|\Delta_1\|_2 \le c\,\|f\|_{\overline{\mu}}\,n^{-\mu_1+2}. \tag{2.10}$$

Перейдемо до оцінки норми доданка $\Delta_2(t,\tau)$. З урахуванням (2.7) та зміни порядку підсумовування

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{k-1}{}^{*} = \sum_{l=0}^{n-1}{}^{*}\sum_{k=l+1}^{n} \tag{2.11}$$

$\Delta_2(t,\tau)$ можна записати таким чином:

$$\Delta_2(t,\tau) = 2\sum_{l=0}^{n-1}{}^{*}\sum_{j=m+1}^{\infty}\sqrt{l+1/2}\,\varphi_l(t)\,\varphi_j(\tau)\sum_{k=l+1}^{n}\sqrt{k+1/2}\,\langle f,\varphi_{k,j}\rangle. \tag{2.12}$$

Запишемо рівність (2.12) у вигляді

$$\Delta_2(t,\tau) = 2\sum_{l=0}^{n-1}{}^{*}\sum_{j=m+1}^{\infty}\sqrt{l+1/2}\,\varphi_l(t)\,\varphi_j(\tau)b_{lj}, \tag{2.13}$$

де

$$b_{lj} = \sum_{k=l+1}^{n}\sqrt{k+1/2}\,\langle f,\varphi_{k,j}\rangle.$$

Зважаючи на (2.13), маємо

$$\|\Delta_2\|_2^2 = 4\sum_{l=0}^{n-1}{}^{*}(l+1/2)\sum_{j=m+1}^{\infty}b_{lj}^2.$$

Далі, для $\mu_1 > 1,\ \mu_2 > 0$ одержуємо

$$\sum_{j=m+1}^{\infty}b_{lj}^2 = \sum_{j=m+1}^{\infty}\left(\sum_{k=l+1}^{n}\sqrt{k+1/2}\,\frac{k^{\mu_1}j^{\mu_2}}{k^{\mu_1}j^{\mu_2}}\,\langle f,\varphi_{k,j}\rangle\right)^2 \le$$

$$\le \sum_{k=l+1}^{n}\frac{k+1/2}{k^{2\mu_1}}\sum_{j=m+1}^{\infty}\sum_{k=l+1}^{\infty}\frac{k^{2\mu_1}j^{2\mu_2}}{j^{2\mu_2}}\,|\langle f,\varphi_{k,j}\rangle|^2 \le c\,\|f\|_{\overline{\mu}}^2\,\frac{(l+1)^{-2\mu_1+2}}{(m+1)^{2\mu_2}}.$$

Тоді для $\mu_1 > 2$ маємо

$$\|\Delta_2\|_2^2 \le c\,\frac{\|f\|_{\overline{\mu}}^2}{(m+1)^{2\mu_2}}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{1}{(l+1)^{2\mu_1-3}} \le c\,\|f\|_{\overline{\mu}}^2\,m^{-2\mu_2},$$

тобто $\|\Delta_2\|_2 \le c\,\|f\|_{\overline{\mu}}\,m^{-\mu_2}$.

Таким чином,

$$\left\|f^{(1,0)} - \mathcal{D}_{n,m}f\right\|_2 \le \|\Delta_1\|_2 + \|\Delta_2\|_2 \le c\,\|f\|_{\overline{\mu}}\,(n^{-\mu_1+2} + m^{-\mu_2}).$$

Лему 2.1 доведено.

З урахуванням (2.7) та зміни порядку підсумовування (2.11) другий доданок у правій частині (2.2) запишемо у вигляді

$$\mathcal{D}_{n,m}f(t,\tau) - \mathcal{D}_{n,m}f^{\delta}(t,\tau) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{m}\xi_{kj}\,\varphi_k'(t)\,\varphi_j(\tau) =$$

$$= 2\sum_{l=0}^{n-1}{}^{*}\sum_{j=0}^{m}\sqrt{l+1/2}\,\varphi_l(t)\,\varphi_j(\tau)\sum_{k=l+1}^{n}\sqrt{k+1/2}\,\xi_{kj}. \tag{2.14}$$

Лема 2.2. *Нехай* $f \in L_2$. *Тоді*

$$\left\|\mathcal{D}_{n,m}f - \mathcal{D}_{n,m}f^{\delta}\right\|_2 \le c\,\delta\,n^2.$$

Доведення. Завдяки $\sum_{j=0}^{m}\Big(\sum_{k=l+1}^{n}\sqrt{k+1/2}\,\xi_{kj}\Big)^2 \le c\,\delta^2 n^2$ з (2.14) випливає, що

$$\big\|\mathcal{D}_{n,m}f-\mathcal{D}_{n,m}f^{\delta}\big\|_2 = 2\left(\sum_{l=0}^{n-1}{}^{*}\,(l+1/2)\sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{k=l+1}^{n}\sqrt{k+1/2}\,\xi_{kj}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le c\,\delta\, n^2.$$

Лему 2.2 доведено.

Теорема 2.1. *Нехай* $f\in L_2^{\overline{\mu}}$, $\mu_1>2$, $\mu_2>0$. *Тоді при* $m\asymp\delta^{-\frac{\mu_1-2}{\mu_1\mu_2}}$, $n\asymp\delta^{-\frac{1}{\mu_1}}$ *маємо*

$$\big\|f^{(1,0)}-\mathcal{D}_{n,m}f^{\delta}\big\|_2 \preceq \delta^{\frac{\mu_1-2}{\mu_1}}.$$

Доведення. Згідно з лемами 2.1, 2.2 справджується

$$\|f^{(1,0)}-\mathcal{D}_{n,m}f^{\delta}\|_2 \le c\left(n^{-\mu_1+2}+m^{-\mu_2}+\delta\, n^2\right). \tag{2.15}$$

Врівноважуючи всі доданки у правій частині (2.15), отримуємо співвідношення

$$n\asymp\delta^{-\frac{1}{\mu_1}},\qquad m\asymp\delta^{-\frac{\mu_1-2}{\mu_1\mu_2}}. \tag{2.16}$$

Беручи до уваги (2.15) і (2.16), завершуємо доведення теореми 2.1.

***Наслідок* 2.1.** *В досліджуваній задачі метод* $\mathcal{D}_{n,m}$ (2.1) *досягає точності* $O\big(\delta^{\frac{\mu_1-2}{\mu_1}}\big)$ *на класі* $L_2^{\overline{\mu}}$, $\mu_1>2$, $\mu_2>0$, *і потребує*

$$\operatorname{card}(\square_{n,m}) = n\,(m+1) = O\Big(\delta^{-\frac{\mu_1+\mu_2-2}{\mu_1\mu_2}}\Big)$$

збурених коефіцієнтів Фур'є–Лежандра.

3. Модифікований варіант методу зрізання. Оцінка похибки в L_2. Другий варіант методу зрізання для відновлення $f^{(1,0)}$ означимо таким чином:

$$\overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma}f^{\delta}(t,\tau) = \sum_{kj^{\gamma}\le n}\langle f_{\delta},\varphi_{k,j}\rangle\,\varphi_k'(t)\,\varphi_j(\tau),\quad \gamma\ge 1. \tag{3.1}$$

Тут за область Ω взято гіперболічний хрест

$$\Gamma_{n,\gamma} = \big\{(k,j)\colon kj^{\gamma}\le n,\ \ 1\le k\le n,\ \ 0\le j\le n^{1/\gamma}\big\}.$$

У цьому пункті ми обмежимось розглядом співвідношень $2<\mu_1\le\mu_2+1$, $1\le\gamma\le\dfrac{\mu_2}{\mu_1-1}$.

Параметри n і γ в (3.1) слід вибирати залежно від δ і $\overline{\mu}$ так, щоб мінімізувати похибку

$$f^{(1,0)}(t,\tau)-\overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma}f^{\delta}(t,\tau) = \big(f^{(1,0)}(t,\tau)-\overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma}f(t,\tau)\big)+\big(\overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma}f(t,\tau)-\overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma}f^{\delta}(t,\tau)\big). \tag{3.2}$$

Запишемо перший доданок правої частини рівності (3.2) у вигляді

$$f^{(1,0)}(t,\tau)-\overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma}f(t,\tau) = \sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\langle f,\varphi_{k,j}\rangle\,\varphi_k'(t)\,\varphi_j(\tau)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j>(n/k)^{1/\gamma}}\langle f,\varphi_{k,j}\rangle\,\varphi_k'(t)\,\varphi_j(\tau) =: \Delta_1(t,\tau)+\Delta_2^{*}(t,\tau). \tag{3.3}$$

Лема 3.1. *Нехай* $f \in L_2^{\overline{\mu}}$, $2 < \mu_1 \le \mu_2 + 1$. *Тоді*

$$\left\| f^{(1,0)} - \overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma} f \right\|_2 \le c \, \|f\|_{\overline{\mu}} \, n^{-\mu_1+2}.$$

Доведення. Оцінку $\|\Delta_1\|_2$ при $\mu_1 > 2$ знайдено в (2.10). Перейдемо до оцінювання $\|\Delta_2^*\|_2$. Враховуючи (2.7), (2.11) та змінюючи порядок підсумовування, маємо

$$\Delta_2^*(t,\tau) = 2 \sum_{l=0}^{n-1}{}^{*} \sqrt{l+1/2}\, \varphi_l(t) \sum_{k=l+1}^{n} \sqrt{k+1/2} \sum_{j>(n/k)^{1/\gamma}} \varphi_j(\tau) \, \langle f, \varphi_{k,j} \rangle =$$

$$= 2 \sum_{l=0}^{n-1}{}^{*} \sqrt{l+1/2}\, \varphi_l(t) \sum_{j=1}^{\left(\frac{n}{l+1}\right)^{1/\gamma}} \varphi_j(\tau) \sum_{k=nj^{-\gamma}}^{n} \sqrt{k+1/2} \, \langle f, \varphi_{k,j} \rangle +$$

$$+ 2 \sum_{l=0}^{n-1}{}^{*} \sqrt{l+1/2}\, \varphi_l(t) \sum_{j>\left(\frac{n}{l+1}\right)^{1/\gamma}} \varphi_j(\tau) \sum_{k=l+1}^{n} \sqrt{k+1/2} \, \langle f, \varphi_{k,j} \rangle. \qquad (3.4)$$

Тут і далі з метою скорочення викладок будемо вважати, що межі для індексів підсумовування, як, наприклад, $\left(\dfrac{n}{l+1}\right)^{1/\gamma}$ або $nj^{-\gamma}$ в (3.4), є цілими числами.

Рівність (3.4) можна записати у вигляді

$$\Delta_2^*(t,\tau) = 2 \sum_{l=0}^{n-1}{}^{*} \sqrt{l+1/2}\, \varphi_l(t) \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(\tau) \widetilde{b_{lj}}, \qquad (3.5)$$

де $\widetilde{b_{lj}} = \sum_{k=nj^{-\gamma}}^{n} \sqrt{k + \dfrac{1}{2}} \, \langle f, \varphi_{k,j} \rangle$, якщо $j \le \left(\dfrac{n}{l+1}\right)^{1/\gamma}$, і $\widetilde{b_{lj}} = \sum_{k=l+1}^{n} \sqrt{k + \dfrac{1}{2}} \, \langle f, \varphi_{k,j} \rangle$, якщо $j > \left(\dfrac{n}{l+1}\right)^{1/\gamma}$.

З (3.5) безпосередньо випливає, що

$$\|\Delta_2^*\|_2^2 = 4 \sum_{l=0}^{n-1}{}^{*} (l+1/2) \sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{b_{lj}}^2. \qquad (3.6)$$

Спочатку для $\mu_1 > 1$, $1 \le \gamma \le \dfrac{\mu_2}{\mu_1 - 1}$ знаходимо

$$\sum_{j=1}^{\left(\frac{n}{l+1}\right)^{1/\gamma}} \widetilde{b_{lj}}^2 \le \sum_{j=1}^{\left(\frac{n}{l+1}\right)^{1/\gamma}} \left(\sum_{k=nj^{-\gamma}}^{\infty} \sqrt{k+1/2} \, \frac{k^{\mu_1} j^{\mu_2}}{k^{\mu_1} j^{\mu_2}} \, \langle f, \varphi_{k,j} \rangle \right)^2 \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{\left(\frac{n}{l+1}\right)^{1/\gamma}} \frac{1}{j^{2\mu_2}} \sum_{k=nj^{-\gamma}}^{\infty} \frac{k+1/2}{k^{2\mu_1}} \sum_{k=nj^{-\gamma}}^{\infty} k^{2\mu_1} j^{2\mu_2} \, |\langle f, \varphi_{k,j} \rangle|^2 \le$$

$$\le c \, \frac{1}{n^{2\mu_1 - 2}} \sum_{j=1}^{\left(\frac{n}{l+1}\right)^{1/\gamma}} \sum_{k=nj^{-\gamma}}^{\infty} k^{2\mu_1} j^{2\mu_2} \, |\langle f, \varphi_{k,j} \rangle|^2 \le c \, \|f\|_{\overline{\mu}}^2 \, n^{-2\mu_1+2}.$$

Продовжуючи, одержуємо

$$c\|f\|_{\mu}^{2}\, n^{-2\mu_1+2} \sum_{l=0}^{n-1}\left(l+\frac{1}{2}\right) \le c\,\|f\|_{\mu}^{2}\, n^{-2\mu_1+4}. \tag{3.7}$$

Далі, для $\mu_1 > 1,\ \mu_2 > 0$ оцінюємо

$$\sum_{j=(\frac{n}{l+1})^{1/\gamma}+1}^{\infty} \widetilde{b_{lj}}^{2} = \sum_{j=(\frac{n}{l+1})^{1/\gamma}+1}^{\infty}\left(\sum_{k=l+1}^{n}\sqrt{k+1/2}\,\frac{k^{\mu_1}j^{\mu_2}}{k^{\mu_1}j^{\mu_2}}\langle f,\varphi_{k,j}\rangle\right)^{2} \le$$

$$\le c\,l^{-2\mu_1+2}\sum_{j=(\frac{n}{l+1})^{1/\gamma}+1}^{\infty}\frac{1}{j^{2\mu_2}}\sum_{k=l+1}^{n}k^{2\mu_1}j^{2\mu_2}\,|\langle f,\varphi_{k,j}\rangle|^{2} \le$$

$$\le c\,n^{-2\mu_2/\gamma}\,\frac{(l+1)^{2\mu_2/\gamma}}{l^{2\mu_1-2}}\sum_{j=(\frac{n}{l+1})^{1/\gamma}+1}^{\infty}\sum_{k=l+1}^{n}k^{2\mu_1}j^{2\mu_2}\,|\langle f,\varphi_{k,j}\rangle|^{2} \le$$

$$\le c\,n^{-2\mu_2/\gamma}\,l^{-2\mu_1+2\mu_2/\gamma+2}\,\|f\|_{\mu}^{2}.$$

Завдяки умові $\mu_2 \ge (\mu_1 - 1)\gamma$ маємо

$$c\|f\|_{\mu}^{2}\, n^{-2\mu_2/\gamma}\sum_{l=0}^{n-1}(l+1/2)\,l^{-2\mu_1+2\mu_2/\gamma+2} \le c\,\|f\|_{\mu}^{2}\, n^{-2\mu_1+4}. \tag{3.8}$$

Беручи до уваги (3.6) – (3.8), робимо висновок, що

$$\|\Delta_2^*\|_2 \le c\,\|f\|_{\overline{\mu}}\, n^{-\mu_1+2}.$$

Поєднуючи оцінки для $\|\Delta_1\|_2$ і $\|\Delta_2^*\|_2$, одержуємо твердження леми.

Лема 3.2. *Нехай* $f \in L_2$. *Тоді*

$$\left\|\overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma}f - \overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma}f^{\delta}\right\|_2 \le c\,\delta\, n^2.$$

Доведення. Насамперед виконаємо допоміжні перетворення. Беручи до уваги (2.7) та змінюючи порядок підсумовування, для другого доданка з правої частини (3.2) отримуємо

$$\overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma}f(t,\tau) - \overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma}f^{\delta}(t,\tau) = 2\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{(n/k)^{1/\gamma}}\xi_{kj}\sqrt{k+\frac{1}{2}}\,{\sum_{l=0}^{k-1}}^{*}\sqrt{l+\frac{1}{2}}\,\varphi_l(t)\,\varphi_j(\tau) =$$

$$= 2{\sum_{l=0}^{n-1}}^{*}\sqrt{l+1/2}\sum_{j=0}^{(n/(l+1))^{1/\gamma}}\varphi_l(t)\,\varphi_j(\tau)\sum_{k=l+1}^{nj^{-\gamma}}\xi_{kj}\,\sqrt{k+1/2}, \tag{3.9}$$

а тому

$$\left\|\overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma}f - \overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma}f^{\delta}\right\|_2^2 \le 4\sum_{l=0}^{n-1}(l+1/2)\sum_{j=0}^{(n/(l+1))^{1/\gamma}}\left(\sum_{k=l+1}^{nj^{-\gamma}}(k+1/2)\right)\left(\sum_{k=l+1}^{nj^{-\gamma}}\xi_{kj}^{2}\right) \le$$

$$\leq cn^2 \sum_{l=0}^{n-1} l \sum_{\underline{j}=0}^{(n/(l+1))^{1/\gamma}} \frac{1}{\underline{j}^{2\gamma}} \sum_{k=l+1}^{n\underline{j}^{-\gamma}} \xi_{kj}^2 \leq cn^4 \sum_{j=0}^{(n/(l+1))^{1/\gamma}} \sum_{k=l+1}^{n\underline{j}^{-\gamma}} \xi_{kj}^2 \leq cn^4 \delta^2.$$

Лему 3.2 доведено.

Теорема 3.1. *Нехай* $f \in L_2^{\overline{\mu}}$, $2 < \mu_1 \leq \mu_2 + 1$. *Тоді при* $n \asymp \delta^{-\frac{1}{\mu_1}}$ *і* $1 \leq \gamma \leq \dfrac{\mu_2}{\mu_1 - 1}$ *маємо*

$$\left\| f^{(1,0)} - \overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma} f^\delta \right\|_2 \preceq \delta^{\frac{\mu_1 - 2}{\mu_1}}.$$

Доведення. Беручи до уваги леми 3.1 і 3.2, одержуємо

$$\left\| f^{(1,0)} - \overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma} f^\delta \right\|_2 \leq c\left(n^{-\mu_1+2} + n^2\delta\right). \tag{3.10}$$

Врівноважуючи доданки у правій частині (3.10) завдяки співвідношенню $n \asymp \delta^{-\frac{1}{\mu_1}}$, отримуємо твердження теореми.

Наслідок **3.1.** *У досліджуваній задачі метод зрізання* $\overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma}$ (3.1) *досягає точності* $O\left(\delta^{\frac{\mu_1-2}{\mu_1}}\right)$ *на класі* $L_2^{\overline{\mu}}$, $2 < \mu_1 \leq \mu_2 + 1$, *і потребує*

$$\mathrm{card}(\Gamma_{n,\gamma}) \asymp \begin{cases} n \asymp \delta^{-\frac{1}{\mu_1}}, & \text{якщо } 1 < \gamma \leq \dfrac{\mu_2}{\mu_1 - 1}, \\ n \, \ln n \asymp \delta^{-\frac{1}{\mu_1}} \ln \dfrac{1}{\delta}, & \text{якщо } \gamma = 1, \end{cases}$$

збурених коефіцієнтів Фур'є – Лежандра.

Зауваження **3.1.** Порівняння наслідків 2.1 і 3.1 дозволяє зробити висновок, що при $2 < \mu_1 \leq \mu_2 + 1$ обидва розглянуті варіанти методу зрізання гарантують однаковий порядок точності, але в термінах кількості використаних коефіцієнтів Фур'є – Лежандра перевага модифікованого варіанта (3.1) над стандартним (2.1) є очевидною.

4. Стандартний варіант методу зрізання. Оцінка похибки в $\boldsymbol{C}$**.** Перейдемо до оцінювання точності обох варіантів методу зрізання в рівномірній метриці. Знову почнемо зі стандартного підходу (2.1).

Лема 4.1. *Нехай* $f \in L_2^{\overline{\mu}}$, $\mu_1 > 3$, $\mu_2 > 1$. *Тоді*

$$\left\| f^{(1,0)} - \mathcal{D}_{n,m} \right\|_C \leq c\, \|f\|_{\overline{\mu}} \left(n^{-\mu_1+3} + m^{-\mu_2+1}\right).$$

Доведення. Взявши до уваги (2.3), перейдемо до оцінювання доданків Δ_1 (2.4) та Δ_2 (2.5) у метриці простору C.

Згідно з (2.8) маємо

$$\Delta_1(t,\tau) = 2 {\sum_{l=0}^{n}}^{*} \sum_{j=0}^{\infty} \sqrt{l+1/2}\, \varphi_l(t)\, \varphi_j(\tau) \sum_{k=n+1}^{\infty} \sqrt{k+1/2}\, \langle f, \varphi_{k,j} \rangle +$$

$$+2 {\sum_{l=n+1}^{\infty}}^{*} \sum_{j=0}^{\infty} \sqrt{l+1/2}\, \varphi_l(t)\, \varphi_j(\tau) \sum_{k=l+1}^{\infty} \sqrt{k+1/2}\, \langle f, \varphi_{k,j} \rangle =:$$

$$=: \Delta_{11}(t,\tau) + \Delta_{12}(t,\tau).$$

Спочатку оцінимо норму Δ_{11}. При $\mu_1 > 1,\ \mu_2 > 1$ отримуємо

$$\|\Delta_{11}\|_C \le 2\sum_{l=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}(l+1/2)\,\sqrt{j+1/2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\sqrt{k+1/2}}{k^{\mu_1}\underline{j}^{\mu_2}}\,k^{\mu_1}\underline{j}^{\mu_2}\,|\langle f,\varphi_{k,j}\rangle| \le$$

$$\le 2\,\|f\|_{\overline{\mu}}\sum_{l=0}^{n}(l+1/2)\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k+1/2}{k^{2\mu_1}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{j+1/2}{\underline{j}^{2\mu_2}}\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le c\,n^{-\mu_1+1}\,\|f\|_{\overline{\mu}}\sum_{l=0}^{n}(l+1/2) \le c\,n^{-\mu_1+3}\,\|f\|_{\overline{\mu}}.$$

Далі, при $\mu_1 > 3,\ \mu_2 > 1$ одержуємо

$$\|\Delta_{12}\|_C \le 2\sum_{l=n+1}^{\infty}\left(l+\frac{1}{2}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=l+1}^{\infty}\frac{(j+1/2)(k+1/2)}{k^{2\mu_1}\underline{j}^{2\mu_2}}\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left(\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=l+1}^{\infty}k^{2\mu_1}\underline{j}^{2\mu_2}\,|\langle f,\varphi_{k,j}\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le 2\,\|f\|_{\overline{\mu}}\sum_{l=n+1}^{\infty}(l+1/2)\left(\sum_{k=l+1}^{\infty}\frac{k+1/2}{k^{2\mu_1}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{j+1/2}{\underline{j}^{2\mu_2}}\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le c\,\|f\|_{\overline{\mu}}\sum_{l=n+1}^{\infty}l^{-\mu_1+1}(l+1/2) \le c\,n^{-\mu_1+3}\,\|f\|_{\overline{\mu}}.$$

Отже, при $\mu_1 > 3,\ \mu_2 > 1$ справджується

$$\|\Delta_1\|_C \le \|\Delta_{11}\|_C + \|\Delta_{12}\|_C \le c\,\|f\|_{\overline{\mu}}\,n^{-\mu_1+3}. \tag{4.1}$$

Перейдемо до оцінювання $\|\Delta_2\|_C$. При $\mu_1 > 3,\ \mu_2 > 1$ з (2.12) випливає

$$\|\Delta_2\|_C \le 2\sum_{l=0}^{n-1}\left(l+\frac{1}{2}\right)\left(\sum_{j=m+1}^{\infty}\sum_{k=l+1}^{n}\frac{(j+1/2)(k+1/2)}{k^{2\mu_1}j^{2\mu_2}}\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left(\sum_{j=m+1}^{\infty}\sum_{k=l+1}^{n}k^{2\mu_1}j^{2\mu_2}\,|\langle f,\varphi_{k,j}\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le 2\,\|f\|_{\overline{\mu}}\sum_{l=0}^{n-1}(l+1/2)\left(\sum_{k=l+1}^{n}\frac{k+1/2}{k^{2\mu_1}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=m+1}^{\infty}\frac{j+1/2}{j^{2\mu_2}}\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le c\,\|f\|_{\overline{\mu}}\,m^{-\mu_2+1}\sum_{l=0}^{n-1}l^{-\mu_1+2} \le c\,\|f\|_{\overline{\mu}}\,m^{-\mu_2+1}. \tag{4.2}$$

Таким чином, беручи до уваги (2.3), (4.1) та (4.2), маємо

$$\left\| f^{(1,0)} - \mathcal{D}_{n,m} f \right\|_C \leq \|\Delta_1\|_C + \|\Delta_2\|_C \leq c \, \|f\|_{\overline{\mu}} \left(n^{-\mu_1+3} + m^{-\mu_2+1} \right).$$

Лему 4.1 доведено.

Лема 4.2. *Нехай* $f \in L_2$. *Тоді*

$$\left\| \mathcal{D}_{n,m} f - \mathcal{D}_{n,m} f^\delta \right\|_C \leq c \, \delta \, m \, n^3.$$

Доведення. Взявши до уваги (2.14), будемо мати

$$\left\| \mathcal{D}_{n,m} f - \mathcal{D}_{n,m} f^\delta \right\|_C \leq 2 \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m} (l + 1/2) \sqrt{j + 1/2} \sum_{k=l+1}^{n} \sqrt{k + 1/2} \, |\xi_{k,j}| \leq$$

$$\leq 2 \sum_{l=0}^{n-1} (l + 1/2) \left(\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=l+1}^{n} (j + 1/2)(k + 1/2) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=l+1}^{n} |\xi_{k,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq c \, m \, n \, \delta \sum_{l=0}^{n-1} (l + 1/2) \leq c \, m \, n^3 \, \delta.$$

Лему 4.2 доведено.

Теорема 4.1. *Нехай* $f \in L_2^{\overline{\mu}}$, $\mu_1 > 3$, $\mu_2 > 1$. *Тоді при* $m \asymp \delta^{-\frac{\mu_1 - 3}{\mu_1 \mu_2 - 3}}$, $n \asymp \delta^{-\frac{\mu_2 - 1}{\mu_1 \mu_2 - 3}}$ *справджується*

$$\left\| f^{(1,0)} - \mathcal{D}_{n,m} f^\delta \right\|_C \preceq \delta^{\frac{(\mu_1 - 3)(\mu_2 - 1)}{\mu_1 \mu_2 - 3}}.$$

Доведення. Беручи до уваги леми 4.1 і 4.2, маємо

$$\left\| f^{(1,0)} - \mathcal{D}_{n,m} f^\delta \right\|_C \leq c \left(n^{-\mu_1+3} + m^{-\mu_2+1} + m \, n^3 \, \delta \right). \tag{4.3}$$

Врівноважуючи всі доданки у правій частині (4.3) за допомогою співвідношень $n \asymp \asymp \delta^{-\frac{\mu_2 - 1}{\mu_1 \mu_2 - 3}}$, $m \asymp \delta^{-\frac{\mu_1 - 3}{\mu_1 \mu_2 - 3}}$, завершуємо доведення теореми.

***Наслідок* 4.1.** *У досліджуваній задачі метод зрізання* $\mathcal{D}_{n,m}$ (2.1) *досягає точності* $O\Big(\delta^{\frac{(\mu_1 - 3)(\mu_2 - 1)}{\mu_1 \mu_2 - 3}}\Big)$ *на класі* $L_2^{\overline{\mu}}$, $\mu_1 > 3$, $\mu_2 > 1$, *і потребує*

$$\mathrm{card}(\square_{n,m}) = n \, (m+1) = O\Big(\delta^{-\frac{\mu_2 + \mu_1 - 4}{\mu_1 \mu_2 - 3}}\Big)$$

збурених коефіцієнтів Фур'є–Лежандра.

***Зауваження* 4.1.** Теореми 2.1 і 4.1 були анонсовані в роботі [18].

5. Модифікований варіант методу зрізання. Оцінка похибки в C.

Лема 5.1. *Нехай* $f \in L_2^{\overline{\mu}}$, $3 < \mu_1 \leq \mu_2$, $1 \leq \gamma \leq \dfrac{\mu_2 - 1}{\mu_1 - 1}$. *Тоді*

$$\left\| f^{(1,0)} - \overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma} f \right\|_C \leq c \, \|f\|_{\overline{\mu}} \, n^{-\mu_1+3}.$$

Доведення. Записуючи різницю $f^{(1,0)}(t,\tau)-\overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma}f(t,\tau)$ у вигляді (3.3), при $\mu_1>3,\ \mu_2>1$ згідно з (4.1) маємо $\|\Delta_1\|_C \le c\,\|f\|_{\overline{\mu}}\,n^{-\mu_1+3}$.

Тепер перейдемо до оцінювання $\|\Delta_2^*\|_C$, врахувавши (3.4). Отже,

$$\|\Delta_2^*\|_C \le 2\sum_{l=0}^{n-1}(l+1/2)\sum_{j=1}^{\left(\frac{n}{l+1}\right)^{1/\gamma}}\sqrt{j+1/2}\sum_{k=nj^{-\gamma}}^{n}\sqrt{k+1/2}\;|\langle f,\varphi_{k,j}\rangle|+$$

$$+2\sum_{l=0}^{n-1}(l+1/2)\sum_{j>\left(\frac{n}{l+1}\right)^{1/\gamma}}\sqrt{j+1/2}\sum_{k=l+1}^{n}\sqrt{k+1/2}\;|\langle f,\varphi_{k,j}\rangle| \le$$

$$\le c\sum_{l=0}^{n-1}l\left(\sum_{j=1}^{\left(\frac{n}{l+1}\right)^{1/\gamma}}\sum_{k=nj^{-\gamma}}^{n}+\sum_{j>\left(\frac{n}{l+1}\right)^{1/\gamma}}\sum_{k=l+1}^{n}\right)\frac{\sqrt{k\,j}}{k^{\mu_1}\,j^{\mu_2}}\,k^{\mu_1}\,j^{\mu_2}\,|\langle f,\varphi_{k,j}\rangle| \le$$

$$\le c\,\|f\|_{\overline{\mu}}\sum_{l=0}^{n-1}l\left(\left(\sum_{j=1}^{\left(\frac{n}{l+1}\right)^{1/\gamma}}\sum_{k=nj^{-\gamma}}^{n}+\sum_{j>\left(\frac{n}{l+1}\right)^{1/\gamma}}\sum_{k=l+1}^{n}\right)\frac{1}{k^{2\mu_1-1}\,j^{2\mu_2-1}}\right)^{\frac12} \le$$

$$\le c\,\|f\|_{\overline{\mu}}\left(\sum_{l=0}^{n-1}l\left(\sum_{j=1}^{\left(\frac{n}{l+1}\right)^{1/\gamma}}\sum_{k=nj^{-\gamma}}^{n}\frac{1}{k^{2\mu_1-1}\,j^{2\mu_2-1}}\right)^{\frac12}+\right.$$

$$\left.+\sum_{l=0}^{n-1}l\left(\sum_{j>\left(\frac{n}{l+1}\right)^{1/\gamma}}\sum_{k=l+1}^{n}\frac{1}{k^{2\mu_1-1}\,j^{2\mu_2-1}}\right)^{\frac12}\right)=:$$

$$=:c\,\|f\|_{\overline{\mu}}\big(S_1+S_2\big).$$

Оцінимо кожен із доданків S_1 і S_2.

У випадку $1\le\gamma<\dfrac{\mu_2-1}{\mu_1-1}$ знаходимо

$$S_1=\sum_{l=0}^{n-1}l\left(\sum_{j=1}^{\left(\frac{n}{l+1}\right)^{1/\gamma}}\frac{1}{j^{2\mu_2-1}}\sum_{k=nj^{-\gamma}}^{n}\frac{1}{k^{2\mu_1-1}}\right)^{\frac12} \le$$

$$\le c\,n^{-\mu_1+1}\sum_{l=0}^{n-1}l\left(\sum_{j=1}^{\left(\frac{n}{l+1}\right)^{1/\gamma}}\frac{1}{j^{2\mu_2-1-2\gamma(\mu_1-1)}}\right)^{\frac12}\le c\,n^{-\mu_1+1}\sum_{l=0}^{n-1}l\le c\,n^{-\mu_1+3}.$$

При $\gamma=\dfrac{\mu_2-1}{\mu_1-1}$ маємо

$$S_1 \le c\, n^{-\mu_1+1} \sum_{l=0}^{n-1} l \left(\sum_{j=1}^{\left(\frac{n}{l+1}\right)^{1/\gamma}} \frac{1}{j^{2\mu_2-1-2\gamma(\mu_1-1)}} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= c\, n^{-\mu_1+1} \sum_{l=0}^{n-1} l \left(\sum_{j=1}^{\left(\frac{n}{l+1}\right)^{1/\gamma}} \frac{1}{j} \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le c\, n^{-\mu_1+1} \sum_{l=0}^{n-1} l \left(\ln \frac{n}{l+1} \right)^{\frac{1}{2}} \le c\, n^{-\mu_1+3}.$$

Перейдемо до оцінювання S_2. Нехай $1 < \gamma \le \dfrac{\mu_2 - 1}{\mu_1 - 1}$, тоді

$$S_2 = \sum_{l=0}^{n-1} l \left(\sum_{j > \left(\frac{n}{l+1}\right)^{1/\gamma}} \frac{1}{j^{2\mu_2-1}} \sum_{k=l+1}^{n} \frac{1}{k^{2\mu_1-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le c \sum_{l=0}^{n-1} l \left(\left(\left(\frac{n}{l+1} \right)^{1/\gamma} \right)^{2-2\mu_2} l^{2-2\mu_1} \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le c\, n^{\frac{1-\mu_2}{\gamma}} \sum_{l=0}^{n-1} (l+1)^{2-\mu_1+\frac{\mu_2-1}{\gamma}} = c\, n^{-\mu_1+3}.$$

Якщо $\gamma = 1$, то

$$S_2 = \sum_{l=0}^{n-1} l \left(\sum_{j > \frac{n}{l+1}} \frac{1}{j^{2\mu_2-1}} \sum_{k=l+1}^{n} \frac{1}{k^{2\mu_1-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le c \sum_{l=0}^{n-1} l \left(\left(\frac{n}{l+1} \right)^{2-2\mu_2} l^{2-2\mu_1} \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le c\, n^{1-\mu_2} \sum_{l=0}^{n-1} (l+1)^{\mu_2-\mu_1+1} = c\, n^{-\mu_1+3}.$$

Отже, встановлено оцінку

$$\left\| f^{(1,0)} - \overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma} f \right\|_C \le c\, \|f\|_{\overline{\mu}}\, n^{-\mu_1+3}.$$

Лема 5.2. *Нехай* $f \in L_2$. *Тоді*

$$\left\| \overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma} f - \overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma} f^{\delta} \right\|_C \le c\, \delta\, n^3.$$

Доведення. Беручи до уваги (3.9), для $\gamma > 1$ маємо

$$\left\|\overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma} f - \overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma} f^\delta\right\|_C \le 2 \sum_{l=0}^{n-1} \left(l + \frac{1}{2}\right) \sum_{j=0}^{(n/(l+1))^{1/\gamma}} \sum_{k=l+1}^{\underline{nj^{-\gamma}}} \sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{1}{2}\right)}\, |\xi_{kj}| \le$$

$$\le c \sum_{l=0}^{n-1} \left(l+\frac{1}{2}\right) \left(\sum_{j=0}^{(n/(l+1))^{1/\gamma}} \sum_{k=l+1}^{\underline{nj^{-\gamma}}} \left(k+\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{1}{2}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=0}^{(n/(l+1))^{1/\gamma}} \sum_{k=l+1}^{\underline{nj^{-\gamma}}} |\xi_{kj}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le c\, n\, \delta \sum_{l=0}^{n-1} \left(l+\frac{1}{2}\right) \left(\sum_{j=0}^{(n/(l+1))^{1/\gamma}} \underline{j}^{-2\gamma+1} \right)^{\frac{1}{2}} \le c\, n\, \delta \sum_{l=0}^{n-1} \left(l+\frac{1}{2}\right) \le c\, n^3\, \delta.$$

У випадку $\gamma = 1$ одержуємо

$$\left\|\overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma} f - \overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma} f^\delta\right\|_C \le c\, \delta \sum_{l=0}^{n-1} \left(l+\frac{1}{2}\right) \left(\sum_{j=1}^{n/(l+1)} j \left(nj^{-1}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le c\, n\, \delta \sum_{l=0}^{n-1} \left(l+\frac{1}{2}\right) \sqrt{\ln \frac{n}{l+1}} \le c\, n^3\, \delta.$$

Теорема 5.1. *Нехай* $f \in L_2^{\overline{\mu}}$, $3 < \mu_1 \le \mu_2$. *Тоді при* $n \asymp \delta^{-\frac{1}{\mu_1}}$ *і* $1 \le \gamma \le \dfrac{\mu_2 - 1}{\mu_1 - 1}$ *справджується оцінка*

$$\left\|f^{(1,0)} - \overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma} f^\delta\right\|_C \preceq \delta^{\frac{\mu_1 - 3}{\mu_1}}.$$

Доведення. Беручи до уваги одержані в лемах 5.1 і 5.2 оцінки, приходимо до висновку, що

$$\left\|f^{(1,0)} - \overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma} f^\delta\right\|_C \le c\left(n^{-\mu_1+3} + n^3\, \delta\right).$$

Врівноважуючи доданки у правій частині попередньої нерівності, маємо $n \asymp \delta^{-\frac{1}{\mu_1}}$, а тому

$$\|f^{(1,0)} - \overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma} f^\delta\|_C \preceq \delta^{\frac{\mu_1 - 3}{\mu_1}}.$$

Теорему 5.1 доведено.

***Наслідок* 5.1.** *У досліджуваній задачі метод зрізання* $\overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma}$ (3.1) *досягає точності* $O\left(\delta^{\frac{\mu_1-3}{\mu_1}}\right)$ *на класі* $L_2^{\overline{\mu}}$, $3 < \mu_1 \le \mu_2$, *і потребує*

$$\operatorname{card}(\Gamma_{n,\gamma}) \asymp \begin{cases} n \asymp \delta^{-\frac{1}{\mu_1}}, & \textit{якщо} \quad 1 < \gamma \le \dfrac{\mu_2 - 1}{\mu_1 - 1}, \\ n\, \ln n \asymp \delta^{-\frac{1}{\mu_1}} \ln \dfrac{1}{\delta}, & \textit{якщо} \quad \gamma = 1, \end{cases}$$

збурених коефіцієнтів Фур'є – Лежандра.

***Зауваження* 5.1.** Порівняння наслідків 4.1 і 5.1 дозволяє зробити висновок, що при $3 < < \mu_1 \le \mu_2$ перевага модифікованого варіанта методу зрізання (3.1) над стандартним (2.1) є очевидною як у термінах кількості використаних значень коефіцієнтів Фур'є – Лежандра, так і в термінах точності наближень.

***Зауваження* 5.2.** Теорему 3.1 для випадку $2 < \mu_1 < \mu_2 + 1,\ 1 < \gamma < \dfrac{\mu_2}{\mu_1 - 1}$ і теорему 5.1 для випадку $3 < \mu_1 < \mu_2,\ 1 < \gamma < \dfrac{\mu_2 - 1}{\mu_1 - 1}$ було анонсовано в роботі [18].

6. Мінімальний радіус гальоркінської інформації. Перейдемо до знаходження порядкових оцінок мінімального радіуса. Спочатку встановимо нижню оцінку величини $R_{N,\delta}^{(1,0)}\big(L_2^{\overline{\mu}}, C, \ell_2\big)$. Зафіксуємо довільно вибрану область $\hat{\Omega}$ координатної площини $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$, $\mathrm{card}(\hat{\Omega}) \le N$, і побудуємо допоміжну функцію

$$f_1(t,\tau) = \widetilde{c}\left(\varphi_0(t)\varphi_0(\tau) + N^{-\mu_1 - 1/2}\varphi_1(\tau)\sum_{k=N+1}^{3N}{}' \, \varphi_k(t)\right),$$

де сума $\sum_{k=N+1}^{\prime 3N}$ береться по N будь-яких функціях $\varphi_k(t)$ таких, що $N+1 \le k \le 3N$ і $(k,1) \notin \hat{\Omega}$. Очевидно, щонайменше один такий набір функцій завжди знайдеться.

Оцінимо норму f_1 в метриці простору $L_2^{\overline{\mu}}$:

$$\|f_1\|_{\overline{\mu}}^2 = \widetilde{c}^2\left(1 + N^{-2\mu_1 - 1}\sum_{k=N+1}^{3N}{}' \, k^{2\mu_1}\right) \le$$

$$\le \widetilde{c}^2\Big(1 + 3^{2\mu_1} N^{-2\mu_1 - 1} N^{2\mu_1} N\Big) = \widetilde{c}^2\big(1 + 3^{2\mu_1}\big).$$

Звідси випливає, що для виконання умови $\|f_1\|_{\overline{\mu}} \le 1$ достатньо взяти

$$\widetilde{c} = \big(1 + 3^{2\mu_1}\big)^{-1/2}. \tag{6.1}$$

Візьмемо ще одну функцію з класу $L_2^{\overline{\mu}}$:

$$f_2(t,\tau) = \widetilde{c}\,\varphi_0(t)\varphi_0(\tau).$$

Знайдемо нижню оцінку величини $\big\|f_1^{(1,0)} - f_2^{(1,0)}\big\|_C$. Для цього нам знадобляться формули

$$f_1^{(1,0)}(t,\tau) = \widetilde{c}\,N^{-\mu_1 - 1/2}\,\varphi_1(\tau)\sum_{k=N+1}^{3N}{}' \, 2\sqrt{k + 1/2}\,\times$$

$$\times \sum_{i=0}^{(k-q_k-1)/2} \sqrt{2i + q_k + 1/2}\,\varphi_{2i+q_k}(t) =$$

$$= 2\widetilde{c}\,N^{-\mu_1 - 1/2}\,\varphi_1(\tau)\sum_{k=N+1}^{3N}{}' \, \sqrt{k + 1/2}\sum_{l=0}^{k-1}{}^{*}\sqrt{l + 1/2}\,\varphi_l(t),$$

$$f_2^{(1,0)}(t,\tau) \equiv 0.$$

Отже, маємо

$$\big\|f_1^{(1,0)} - f_2^{(1,0)}\big\|_C \ge |f_1^{(1,0)}(1,1)| =$$

$$= 2\widetilde{c}\,N^{-\mu_1-1/2}\sqrt{\frac{3}{2}}\sum_{k=N+1}^{3N}{}' \sqrt{k+1/2}\sum_{l=0}^{k-1}{}^{*}(l+1/2) \geq$$

$$\geq \frac{\sqrt{6}}{4}\,\widetilde{c}\,N^{-\mu_1-1/2}\sum_{k=N+1}^{3N}{}' (k-1)^{5/2} \geq \frac{\sqrt{6}}{4}\,\widetilde{c}\,N^{-\mu_1+3}. \tag{6.2}$$

Оскільки виконується

$$\left\|\overline{f}_1 - \overline{f}_2\right\|_{\ell_2}^2 = \widetilde{c}^2\,N^{-2\mu_1-1}\sum_{k=N+1}^{3N}{}' 1 = \widetilde{c}^2\,N^{-2\mu_1},$$

то у випадку $N^{-\mu_1} \leq \delta/\widetilde{c}$ під δ-збуреннями функцій f_1 і f_2 можна розглядати

$$f_1^\delta(t,\tau) = f_2(t,\tau), \qquad f_2^\delta(t,\tau) = f_1(t,\tau).$$

Оцінимо зверху норму різниці $\left\|f_1^{(1,0)} - f_2^{(1,0)}\right\|_C$. Враховуючи співвідношення $G\big(\hat\Omega, \overline{f}_1^\delta\big) = G\big(\hat\Omega, \overline{f}_2^\delta\big)$, для будь-якого $\psi^{(1,0)}(\hat\Omega) \in \Psi(\hat\Omega)$ знаходимо

$$\left\|f_1^{(1,0)} - f_2^{(1,0)}\right\|_C \leq \left\|f_1^{(1,0)} - \psi^{(1,0)}\big(G\big(\hat\Omega, \overline{f}_1^\delta\big)\big)\right\|_C + \left\|f_2^{(1,0)} - \psi^{(1,0)}\big(G\big(\hat\Omega, \overline{f}_2^\delta\big)\big)\right\|_C \leq$$

$$\leq 2 \sup_{f\in L_2^{\overline{\mu}}}\ \sup_{\overline{f^\delta}\,:\,(1.1)} \left\|f^{(1,0)} - \psi^{(1,0)}\big(G\big(\hat\Omega, \overline{f}^\delta\big)\big)\right\|_C = 2\,\varepsilon_\delta\big(L_2^{\overline{\mu}}, \psi^{(1,0)}(\hat\Omega), C, \ell_2\big),$$

тобто

$$\varepsilon_\delta\big(L_2^{\overline{\mu}}, \psi^{(1,0)}(\hat\Omega), C, \ell_2\big) \geq \overline{c}\,N^{-\mu_1+3},$$

де

$$\overline{c} = \frac{\sqrt{6}}{8}\,\widetilde{c}. \tag{6.3}$$

З того факту, що область $\hat\Omega$ та алгоритм $\psi^{(1,0)}(\hat\Omega) \in \Psi(\hat\Omega)$ є довільними, випливає, що

$$R_{N,\delta}^{(1,0)}\big(L_2^{\overline{\mu}}, C, \ell_2\big) \geq \overline{c}\,N^{-\mu_1+3}.$$

Таким чином, доведено таке твердження.

Теорема 6.1. *Нехай* $\mu_1 > 3,\ \mu_2 > 0,\ N \geq \big(\delta/\widetilde{c}\big)^{-1/\mu_1}$. *Тоді*

$$R_{N,\delta}^{(1,0)}\big(L_2^{\overline{\mu}}, C, \ell_2\big) \geq \overline{c}\,N^{-\mu_1+3},$$

де $\widetilde{c}$ *та* $\overline{c}$ *задано формулами* (6.1) *та* (6.3) *відповідно.*

Наступне твердження містить порядкові оцінки мінімального радіуса в рівномірній метриці.

Теорема 6.2. 1. *Нехай* $3 < \mu_1 < \mu_2$. *Тоді при* $N \asymp \delta^{-1/\mu_1}$ *справджується*

$$R_{N,\delta}^{(1,0)}\big(L_2^{\overline{\mu}}, C, \ell_2\big) \asymp N^{-\mu_1+3} \asymp \delta^{\frac{\mu_1-3}{\mu_1}}.$$

Оптимальний порядок реалізує метод $\overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma}$ (3.1) *при* $1<\gamma<\dfrac{\mu_2-1}{\mu_1-1},\ n\asymp\delta^{-1/\mu_1}$.

2. *Нехай* $3<\mu_1=\mu_2$. *Тоді при* $N\asymp\delta^{-1/\mu_1}\ln\dfrac{1}{\delta}$ *справджується*

$$N^{-\mu_1+3}\preceq R_{N,\delta}^{(1,0)}\big(L_2^{\overline{\mu}},C,\ell_2\big)\preceq(N/\ln N)^{-\mu_1+3}$$

або

$$\delta^{\frac{\mu_1-3}{\mu_1}}\left(\ln\frac{1}{\delta}\right)^{-\mu_1+3}\preceq R_{N,\delta}^{(1,0)}\big(L_2^{\overline{\mu}},L_2,\ell_2\big)\preceq\delta^{\frac{\mu_1-3}{\mu_1}}.$$

Верхню оцінку реалізує метод $\overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma}$ (3.1) *при* $\gamma=1,\ n\asymp\delta^{-1/\mu_1}$.

Доведення. Верхня оцінка для $R_{N,\delta}^{(1,0)}\big(L_2^{\overline{\mu}},C,\ell_2\big)$ випливає з теореми 5.1

$$R_{N,\delta}^{(1,0)}\big(L_2^{\overline{\mu}},C,\ell_2\big)\le\varepsilon_\delta\big(L_2^{\overline{\mu}},\overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma},C,\ell_2\big)\preceq\delta^{\frac{\mu_1-3}{\mu_1}}$$

з урахуванням вибору параметрів n і γ.

Нижню оцінку мінімального радіуса знайдено в теоремі 6.1.

Перейдемо до оцінювання мінімального радіуса в інтегральній метриці.

Теорема 6.3. *Нехай* $\mu_1>2,\ \mu_2>0,\ N\ge\big(\delta/\widetilde{c}\big)^{-1/\mu_1}$. *Тоді*

$$R_{N,\delta}^{(1,0)}\big(L_2^{\overline{\mu}},L_2,\ell_2\big)\ge\frac{\widetilde{c}}{2}\,N^{-\mu_1+2},$$

де $\widetilde{c}$ *задано формулою* (6.1).

Доведення майже повністю збігається з доведенням теореми 6.1, включаючи вигляд допоміжних функцій $f_1,\ f_1^\delta,\ f_2,\ f_2^\delta$. Єдина відмінність міститься в оцінці знизу норми різниці $f_1^{(1,0)}-f_2^{(1,0)}$, а саме,

$$\big\|f_1^{(1,0)}-f_2^{(1,0)}\big\|_2^2=\big\|f_1^{(1,0)}\big\|_2^2\ge$$
$$\ge4\widetilde{c}^2(N)^{-2\mu_1-1}\sum_{l=0}^{N}{}^{*}\,(l+1/2)\left(\sum_{k=N+1}^{3N}{}'\ \sqrt{k+1/2}\right)^2\ge$$
$$\ge4\widetilde{c}^2(N)^{-2\mu_1-1}\sum_{l=0}^{N}{}^{*}\,(l+1/2)\,N^3\ge\widetilde{c}^2(N)^{-2\mu_1+4}.$$

Звідси при $N\ge\big(\delta/\widetilde{c}\big)^{-1/\mu_1}$ для довільних $\hat{\Omega}$ і $\psi^{(1,0)}(\hat{\Omega})\in\Psi(\hat{\Omega})$ маємо

$$\varepsilon_\delta(L_2^{\overline{\mu}},\psi^{(1,0)}(\hat{\Omega}),L_2,\ell_2)\ge\frac{\widetilde{c}}{2}\,N^{-\mu_1+2}.$$

Теорему 6.3 доведено.

Наступне твердження містить порядкові оцінки мінімального радіуса в інтегральній метриці.

Теорема 6.4. 1. *Нехай* $2 < \mu_1 < \mu_2 + 1$. *Тоді при* $N \asymp \delta^{-1/\mu_1}$ *справджується*

$$R_{N,\delta}^{(1,0)}\big(L_2^{\overline{\mu}}, L_2, \ell_2\big) \asymp N^{-\mu_1+2} \asymp \delta^{\frac{\mu_1-2}{\mu_1}}.$$

Оптимальний порядок реалізує метод $\overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma}$ (3.1) *при* $1 < \gamma < \dfrac{\mu_2}{\mu_1 - 1}$, $n \asymp \delta^{-1/\mu_1}$.

2. *Нехай* $2 < \mu_1 = \mu_2 + 1$. *Тоді при* $N \asymp \delta^{-1/\mu_1} \ln \dfrac{1}{\delta}$ *справджується*

$$N^{-\mu_1+2} \preceq R_{N,\delta}^{(1,0)}\big(L_2^{\overline{\mu}}, L_2, \ell_2\big) \preceq (N/\ln N)^{-\mu_1+2}$$

або

$$\delta^{\frac{\mu_1-2}{\mu_1}} \left(\ln \frac{1}{\delta}\right)^{-\mu_1+2} \preceq R_{N,\delta}^{(1,0)}\big(L_2^{\overline{\mu}}, L_2, \ell_2\big) \preceq \delta^{\frac{\mu_1-2}{\mu_1}}.$$

Верхню оцінку реалізує метод $\overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma}$ (3.1) *при* $\gamma = 1$, $n \asymp \delta^{-1/\mu_1}$.

Доведення. Верхня оцінка для $R_{N,\delta}^{(1,0)}\big(L_2^{\overline{\mu}}, L_2, \ell_2\big)$ випливає з теореми 3.1

$$R_{N,\delta}^{(1,0)}\big(L_2^{\overline{\mu}}, L_2, \ell_2\big) \le \varepsilon_\delta\big(L_2^{\overline{\mu}}, \overline{\mathcal{D}}_{n,\gamma}, L_2, \ell_2\big) \preceq \delta^{\frac{\mu_1-2}{\mu_1}}$$

з урахуванням вибору параметрів n і γ.

Нижню оцінку мінімального радіуса знайдено в теоремі 6.3.

Насамкінець розглянемо задачу оптимального відновлення похідної $f^{(0,1)}$ у сенсі величини

$$R_{N,\delta}^{(0,1)}\big(L_2^{\overline{\mu}}, X, \ell_2\big) = \inf_{\Omega\,:\,\mathrm{card}(\Omega)\le N} \; \inf_{\psi^{(0,1)}\in\Psi(\Omega)} \varepsilon_\delta\big(L_2^{\overline{\mu}}, \psi^{(0,1)}(\Omega), X, \ell_2\big),$$

де

$$\varepsilon_\delta\big(L_2^{\overline{\mu}}, \psi^{(0,1)}(\Omega), X, \ell_2\big) = \sup_{f\in L_2^{\overline{\mu}}} \; \sup_{\overline{f^\delta}\,:\,(1.1)} \big\|f^{(0,1)} - \psi^{(0,1)}\big(G\big(\Omega, \overline{f^\delta}\big)\big)\big\|_X$$

— похибка алгоритму $\psi^{(0,1)}$ на класі функцій $L_2^{\overline{\mu}}$, а $X = C$ або $X = L_2$. Тут під першою частинною похідною $f^{(0,1)}$ функції $f \in L_2^{\overline{\mu}}$ розуміємо ряд

$$f^{(0,1)}(t,\tau) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \langle f, \varphi_{k,j}\rangle\, \varphi_k(t)\, \varphi_j'(\tau),$$

а під $\psi^{(0,1)} = \psi^{(0,1)}(\Omega)$ — будь-який алгоритм відновлення похідної $f^{(0,1)}$, що використовує інформаційний вектор $G\big(\Omega, \overline{f^\delta}\big)$.

Нехай

$$\overline{\overline{\mathcal{D}}}_{n,\gamma} f^\delta(t,\tau) = \sum_{k^\gamma j \le n} \langle f_\delta, \varphi_{k,j}\rangle\, \varphi_k(t)\, \varphi_j'(\tau), \quad \gamma \ge 1, \tag{6.4}$$

— модифікований метод зрізання для відновлення $f^{(0,1)}$, де в якості Ω взято гіперболічний хрест вигляду

$$\Gamma_{n,\gamma} = \big\{(k,j) : k^\gamma j \le n,\;\; 0 \le k \le n^{1/\gamma},\;\; 1 \le j \le n\big\}.$$

Сформулюємо аналоги теорем 6.2 і 6.4 для похідної $f^{(0,1)}$, не наводячи їхніх доведень.

Теорема 6.5. 1. *Нехай* $3 < \mu_2 < \mu_1$. *Тоді при* $N \asymp \delta^{-1/\mu_2}$ *справджується*

$$R_{N,\delta}^{(0,1)}\big(L_2^{\overline{\mu}}, C, \ell_2\big) \asymp N^{-\mu_2+3} \asymp \delta^{\frac{\mu_2-3}{\mu_2}}.$$

Оптимальний порядок реалізує метод $\overline{\overline{\overline{\mathcal{D}}}}_{n,\gamma}$ (6.4) *при* $1 < \gamma < \dfrac{\mu_1 - 1}{\mu_2 - 1}$, $n \asymp \delta^{-1/\mu_2}$.

2. *Нехай* $3 < \mu_1 = \mu_2$. *Тоді при* $N \asymp \delta^{-1/\mu_2} \ln \dfrac{1}{\delta}$ *справджується*

$$N^{-\mu_2+3} \preceq R_{N,\delta}^{(0,1)}\big(L_2^{\overline{\mu}}, C, \ell_2\big) \preceq (N/\ln N)^{-\mu_2+3}$$

або

$$\delta^{\frac{\mu_2-3}{\mu_2}} \left(\ln \frac{1}{\delta}\right)^{-\mu_2+3} \preceq R_{N,\delta}^{(0,1)}\big(L_2^{\overline{\mu}}, L_2, \ell_2\big) \preceq \delta^{\frac{\mu_2-3}{\mu_1}}.$$

Верхню оцінку реалізує метод $\overline{\overline{\overline{\mathcal{D}}}}_{n,\gamma}$ (6.4) *при* $\gamma = 1$, $n \asymp \delta^{-1/\mu_2}$.

Теорема 6.6. 1. *Нехай* $2 < \mu_2 < \mu_1 + 1$. *Тоді при* $N \asymp \delta^{-1/\mu_2}$ *справджується*

$$R_{N,\delta}^{(0,1)}\big(L_2^{\overline{\mu}}, L_2, \ell_2\big) \asymp N^{-\mu_2+2} \asymp \delta^{\frac{\mu_2-2}{\mu_2}}.$$

Оптимальний порядок реалізує метод $\overline{\overline{\overline{\mathcal{D}}}}_{n,\gamma}$ (6.4) *при* $1 < \gamma < \dfrac{\mu_1}{\mu_2 - 1}$, $n \asymp \delta^{-1/\mu_2}$.

2. *Нехай* $2 < \mu_2 = \mu_1 + 1$. *Тоді при* $N \asymp \delta^{-1/\mu_2} \ln \dfrac{1}{\delta}$ *справджується*

$$N^{-\mu_2+2} \preceq R_{N,\delta}^{(0,1)}\big(L_2^{\overline{\mu}}, L_2, \ell_2\big) \preceq (N/\ln N)^{-\mu_2+2}$$

або

$$\delta^{\frac{\mu_2-2}{\mu_2}} \left(\ln \frac{1}{\delta}\right)^{-\mu_2+2} \preceq R_{N,\delta}^{(0,1)}\big(L_2^{\overline{\mu}}, L_2, \ell_2\big) \preceq \delta^{\frac{\mu_2-2}{\mu_2}}.$$

Верхню оцінку реалізує метод $\overline{\overline{\overline{\mathcal{D}}}}_{n,\gamma}$ (6.4) *при* $\gamma = 1$, $n \asymp \delta^{-1/\mu_2}$.

Література

1. S. Ahn, U. J. Choi, A. G. Ramm, *A scheme for stable numerical differentiation*, J. Comput. and Appl. Math., **186**, № 2, 325 – 334 (2006).
2. Т. Ф. Долгополова, В. К. Иванов, *О численном дифференцировании*, Журн. вычислит. математики и мат. физики, **6**, № 3, 570 – 576 (1966).
3. D. Dũng, V. Temlyakov, T. Ullrich, *Hyperbolic cross approximation*, Adv. Courses Math., CRM Barcelona, Birkhäuser/Springer, Basel (2018).
4. C. W. Groetsch, *Optimal order of accuracy in Vasin's method for differentiation of noisy functions*, J. Optim. Theory and Appl., **74**, № 2, 373 – 378 (1992).
5. M. Hanke, O. Scherzer, *Inverse problems light: numerical differentiation*, Amer. Math. Monthly, **108**, № 6, 512 – 521 (2001).
6. S. Lu, V. Naumova, S. V. Pereverzev, *Legendre polynomials as a recommended basis for numerical differentiation in the presence of stochastic white noise*, Inverse and Ill-posed Probl., **21**, № 2, 193 – 216 (2013).
7. Z. Meng, Z. Zhaoa, D. Mei, Y. Zhou, *Numerical differentiation for two-dimensional functions by a Fourier extension method*, Inverse Probl. Sci. and Eng., **28**, № 1, 1 – 18 (2020).

8. S. G. Solodky, G. L. Myleiko, *The minimal radius of Galerkin information for severely ill-posed problems*, Inverse and Ill-posed Probl., **22**, № 5, 739 – 757 (2014).
9. Г. Л. Милейко, С. Г. Солодкий, *Гіперболічний хрест і складність різних класів лінійних некоректних задач*, Укр. мат. журн., **69**, № 7, 951 – 963 (2017).
10. C. Müller, *Foundations of the mathematical theory of electromagnetic waves*, Springer-Verlag, Berlin etc. (1967).
11. G. Nakamura, S. Z. Wang, Y. B. Wang, *Numerical differentiation for the second order derivatives of functions of two variables*, J. Comput. and Appl. Math., **212**, № 2, 341 – 358 (2008).
12. S. V. Pereverzev, S. G. Solodky, *The minimal radius of Galerkin information for the Fredholm problem of the first kind*, J. Complexity, **12**, № 4, 401 – 415 (1996).
13. Z. Qian, C.-L. Fu, X.-T. Xiong, T. Wei, *Fourier truncation method for high order numerical derivatives*, Appl. Math. and Comput., **181**, № 2, 940 – 948 (2006).
14. А. Г. Рамм, *О численном дифференцировании*, Изв. вузов. Математика, № 11, 131 – 134 (1968).
15. S. G. Solodky, K. K. Sharipov, *Summation of smooth functions of two variables with perturbed Fourier coefficients*, Inverse and Ill-posed Probl., **23**, № 3, 287 – 297 (2015).
16. S. G. Solodky, S. A. Stasyuk, *Estimates of efficiency for two methods of stable numerical summation of smooth functions*, J. Complexity, **56**, Paper No. 101422 (2020); https://doi.org/10.1016/j.jco.2019.101422.
17. E. V. Semenova, S. G. Solodky, S. A. Stasyuk, *Application of Fourier truncation method to numerical differentiation for bivariate functions*, Comput. Methods Appl. Math. (2022); https://doi.org/10.1515.cmam-2020-0138.
18. Є. В. Семенова, С. Г. Солодкий, С. А. Стасюк, *Метод зрізки в задачах чисельного підсумовування і диференціювання*, Сучасні проблеми математики та її застосувань, II, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **18**, № 1, 644 – 672 (2021).
19. J. F. Traub, H. Wozniakowski, *A general theory of optimal algorithms*, Acad. Press, New York (1980).
20. В. В. Васин, *Регуляризация задачи численного дифференцирования*, Мат. зап. Урал. ун-та, **7**, № 2, 29 – 33 (1969).
21. Z. Zhao, *A truncated Legendre spectral method for solving numerical differentiation*, Int. J. Comput. Math., **87**, 3209 – 3217 (2010).
22. Z. Zhao, Z. Meng, L. Zhao, L. You, O. Xie, *A stabilized algorithm for multi-dimensional numerical differentiation*, J. Algorithms and Comput. Technol., **10**, № 2, 73 – 81 (2016).

Одержано 08.09.21