DOI: 10.37863/umzh.v74i1.6948

УДК 517.5

С. В. Грищук (Ін-т математики НАН України, Київ)

МОНОГЕННІ ФУНКЦІЇ ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ У КОМУТАТИВНИХ КОМПЛЕКСНИХ АЛГЕБРАХ ДРУГОГО РАНГУ З ОДИНИЦЕЮ ТА УЗАГАЛЬНЕНЕ БІГАРМОНІЧНЕ РІВНЯННЯ З ПОДВІЙНОЮ ХАРАКТЕРИСТИКОЮ *

We prove that any two-dimensional algebra $\mathbb{B}_*$ of the second rank with unity over the field of complex numbers $\mathbb{C}$ contains basises $\{e_1, e_2\}$, for which the $\mathbb{B}_*$-valued “analytic” functions $\Phi(xe_1 + ye_2)$, where x and y are real variables, satisfy a homogeneous PDE of the fourth order with complex coefficients such that its characteristic equation has just one multiple root and the other roots are simple. The set of all triples $(\mathbb{B}_*, \{e_1, e_2\}, \Phi)$ is described in the explicit form.

Доведено, що кожна комутативна й асоціативна алгебра $\mathbb{B}_*$ другого рангу з одиницею над полем комплексних чисел містить такі базиси $\{e_1, e_2\}$, що $\mathbb{B}_*$-значні „аналітичні” функції $\Phi(xe_1 + ye_2)$ $(x,\, y$ — дійсні змінні) задовольняють однорідне рівняння з частинними похідними четвертого порядку та комплексними коефіцієнтами, характеристичне рівняння якого має один подвійний корінь, а решта коренів є простими. Наведено повний опис множини трійок $(\mathbb{B}_*, \{e_1, e_2\}, \Phi)$.

1. Формулювання задач. Розглянемо рівняння

$$lu(x,y) := \left(b_1\frac{\partial^4}{\partial y^4} + b_2\frac{\partial^4}{\partial x\partial y^3} + b_3\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + b_4\frac{\partial^4}{\partial x^3\partial y} + b_5\frac{\partial^4}{\partial x^4}\right)u(x,y) = 0, \tag{1}$$

в якому комплексні коефіцієнти $b_k \in \mathbb{C},\ k = \overline{1,5},\ b_1 \neq 0$, такі, що характеристичне рівняння

$$l\,(s) := b_1 s^4 + b_2 s^3 + b_3 s^2 + b_4 s + b_5 = 0, \quad s \in \mathbb{C}, \tag{2}$$

має лише один подвійний корінь (будемо позначати його $s := s_\circ$), тобто множина розв’язків рівняння (2) має вигляд

$$\{s_\circ, s_3, s_4\} := \ker l, \tag{3}$$

де $s_3 \neq s_4,\ s_\circ \neq s_k,\ k = 3, 4$.

Під розв’язком рівняння (1) в області D декартової площини xOy будемо розуміти дійснозначну функцію u, що має неперервні частинні похідні до четвертого порядку включно та задовольняє дане рівняння в цій області.

Рівняння (1) будемо називати *узагальненим бігармонічним рівнянням* (мотивацію даної назви наведено в роботі [1]).

Зауважимо, з огляду на роботу [2], що не існує невиродженої заміни змінних, що зводить рівняння (1) до бігармонічного рівняння.

Деякі випадки рівняння вигляду (1) (правильно еліптичні [3, с. 163]) розглянуто в монографії [3] (гл. 6, 7). Зокрема, досліджено розв’язність задач Діріхле для даних рівнянь.

Нехай $D := \{(x,y)\colon x^2 + y^2 < 1\} \equiv K$ є відкритим кругом декартової площини xOy. У роботі [4] наведено результати В. П. Бурського та Є. А. Буряченко щодо залежності розв’язності

* Частково підтримано грантом Міністерства освіти і науки України (проєкт № 0121U100414).

© С. В. ГРИЩУК, 2022

однорідної крайової задачі Діріхле для рівняння (1) від кратності $k,\ 1 \le k \le 4$, кореня рівняння (2) за умови, що решта коренів рівняння (2) є простими. Розглянемо детально ці результати при $k = 2$. За умови, що всі корені рівняння (2) відмінні від $\pm i$, знайдено критерій нетривіальної розв'язності даної крайової задачі у просторі функцій, що мають неперервні похідні до четвертого порядку включно в замиканні K, а у випадку, коли кратний корінь дорівнює i, а прості корені відмінні від $(-i)$, доведено, що однорідна крайова задача Діріхле має лише тривіальний розв'язок у зазначеному просторі функцій.

Позначимо через $\mathbb{B}_*$ асоціативну, комутативну над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ алгебру другого рангу з одиницею e. Нехай $\{e_1, e_2\}$ — базис $\mathbb{B}_*$ такий, що задовольняє співвідношення

$$\mathcal{L}(e_1, e_2) := b_1(e_2)^4 + b_2 e_1 (e_2)^3 + b_3 (e_1)^2 (e_2)^2 + b_4 (e_1)^3 e_2 + b_5 (e_1)^4 = 0. \tag{4}$$

Сформулюємо задачу про відшукання всіх пар $\mathbb{B}_*,\ \{e_1, e_2\}$ (див. п. 2).

Дану задачу для бігармонічного рівняння сформулював і розв'язав І. П. Мельниченко у роботі [5]. Для окремого випадку рівняння (1) ($b_1 = b_5 = 1,\ b_2 = b_4 = 0,\ b_3 > 2$) дану задачу було сформульовано й розв'язано у [6]; для $b_1 = 1 = b_5 = 1,\ b_2 = b_4 = 0,\ -2 < b_3 < 2$ знайдено частинний розв'язок задачі у роботі [7], а для $b_1 = 1,\ b_5 = p^2,\ b_2 = b_4 = 0,\ b_3 = p^2 + 1,\ p > 0,\ p \ne 1,$ — у роботі [8]; у випадку, коли всі чотири корені рівняння (2) є простими і ненульовими, загальне розв'язання задачі наведено в роботі [1].

Введемо позначення $\mu_{e_1,e_2} := \{x e_1 + y e_2 : x, y \in \mathbb{R}\}$ (лінійна оболонка векторів e_1 і e_2 над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$), $D_\zeta := \{\zeta = x e_1 + y e_2 : (x, y) \in D\} \subset \mu_{e_1,e_2},\ \zeta = x e_1 + y e_2 \in D_\zeta$ для $(x, y) \in D$.

Нехай базис $\{e_1, e_2\}$ задовольняє крім умови (4) ще й таку умову:

$\mathcal{MB}$) кожен ненульовий елемент $h \in \mu_{e_1,e_2}$ є оборотним (тобто існує обернений елемент $h^{-1} \in \mathbb{B}_*$ такий, що $hh^{-1} = e$).

Для кожного шуканого базису $\{e_1, e_2\}$, що задовольняє умови (4) і $\mathcal{MB}$) одночасно, розглядаємо *моногенні* в D_ζ функції, тобто функції $\Phi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}_*$ вигляду

$$\Phi(\zeta) = U_1(x, y)\, e_1 + U_2(x, y)\, i e_1 + U_3(x, y)\, e_2 + U_4(x, y)\, i e_2 \quad \forall \zeta \in D_\zeta, \tag{5}$$

що мають класичну похідну $\Phi'(\zeta)$ в кожній точці ζ з D_ζ:

$$\Phi'(\zeta) := \lim_{h \to 0,\, h \in \mu_{e_1,e_2}} \big(\Phi(\zeta + h) - \Phi(\zeta)\big)\, h^{-1}.$$

Кожну компоненту $U_k : D \longrightarrow \mathbb{R}$ з (5) будемо позначати також через $\mathrm{U}_k\,[\Phi]$, тобто $\mathrm{U}_k\,[\Phi(\zeta)] :=$ $:= U_k(x, y),\ k \in \{1, \ldots, 4\}$.

Якщо моногенна функція Φ має неперервні похідні $\Phi^{(k)}(\zeta)$ до k-го порядку включно, $k \ge 4$, в області D_ζ, то на підставі співвідношень $L\Phi(\zeta) = \mathcal{L}(e_1, e_2)\Phi^{(4)}(\zeta) \equiv 0$ при кожному $\zeta \in$ $\in D_\zeta$ (які одержують аналогічно відповідним співвідношенням [6] (п. 6) для окремого випадку оператора L у рівнянні (1)), а також рівності (5) одержуємо, що компоненти $U_k,\ k = \overline{1,4}$, задовольняють рівняння (1) в області D.

Сформулюємо задачу про опис усіх моногенних функцій, компоненти яких $\mathrm{U}_k\,[\Phi] = U_k$, $k = \overline{1,4}$, є розв'язками рівняння (1) (див. пп. 4, 5).

Зауважимо, що гіперкомплексні „аналітичні” функції $\Phi(xe_1 + ye_2)$ зі значеннями у скінченновимірних алгебрах над полем $\mathbb{R}$ дійсних (розмірності чотири) або комплексних чисел (розмірності два), компоненти яких задовольняють рівняння вигляду (1), розглянуто, зокрема, у роботах [9 – 15].

Незважаючи на значну кількість робіт, повний опис зазначених трійок $\mathbb{B}_*$, $\{e_1, e_2\}$, Φ (або аналогічних до них, для інших означень „моногенності”) залишався досі невідомим (базис $\{e_1, e_2\}$ задовольняє умови (4) і $\mathcal{MB}$) одночасно). Це пов’язано, зокрема, з тим, що клас рівнянь (1) є досить широким. У роботі [1] знайдено повний опис трійок $(B_*, \{e_1, e_2\}, \Phi)$, асоційованих з рівнянням (1), у випадку, коли всі чотири корені рівняння (2) є простими і ненульовими. Зокрема, встановлено, що $\mathbb{B}_* = \mathbb{B}_0$.

Дану роботу присвячено знаходженню повного опису трійок $(B_*, \{e_1, e_2\}, \Phi)$, асоційованих з рівнянням (1), у випадку, коли один корінь рівняння (2) є подвійним, а решта три — простими. Крім того, на відміну від випадку простих коренів буде показано, що $\mathbb{B}_* = \mathbb{B}_0$ і $\mathbb{B}_* = \mathbb{B}$.

2. Коефіцієнти рівняння (1) і корені рівняння (2). Встановимо зв’язок між коефіцієнтами рівняння (1) і множиною (3). Застосовуючи основну теорему алгебри, приходимо до висновку, що має місце тотожність

$$s^4 + \frac{b_2}{b_1}\, s^3 + \frac{b_3}{b_1}\, s^2 + \frac{b_4}{b_1}\, s + \frac{b_5}{b_1} = (s - s_\circ)^2\, (s - s_3)\, (s - s_4) \quad \forall s \in \mathbb{C}. \tag{6}$$

З (6) одержуємо, що коефіцієнти рівняння (1) та елементи множини (3) задовольняють систему чотирьох рівнянь

$$\begin{aligned} & s_3 + s_4 + 2s_\circ = -\frac{b_2}{b_1}, \\ & 2s_\circ(s_3 + s_4) + s_3 s_4 + (s_\circ)^2 = \frac{b_3}{b_1}, \\ & s_\circ(s_\circ(s_3 + s_4) + 2s_3 s_4) = -\frac{b_4}{b_1}, \\ & (s_\circ)^2 s_3 s_4 = \frac{b_5}{b_1}. \end{aligned} \tag{7}$$

З останнього з цих рівнянь випливає, наприклад, що у випадку, коли $s_\circ \in \mathbb{R}$, $s_3 s_4 \in \mathbb{R}$, то $\dfrac{b_5}{b_1} \in \mathbb{R}$, а якщо додатково вважати, що $s_3 s_4 s_\circ \neq 0$, то $b_5 b_1 s_3 s_4 > 0$.

Розглянемо випадок $s_\circ = 0$. Тоді з (7) маємо $b_4 = b_5 = 0$, $b_3 \neq 0$, $(b_2)^2 \neq 4b_1 b_3$, а s_3 і s_4 — корені рівняння $b_1 S^2 + b_2 S + b_3 = 0$, $S \in \mathbb{C}$. Отже, $\operatorname{Im} s_k \neq 0$, $k = 3, 4$.

3. Комутативні й асоціативні алгебри другого рангу та їхні базиси, асоційовані з рівнянням (1). Як відомо [16], існують (з точністю до ізоморфізму) дві асоціативні, комутативні над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ алгебри другого рангу з одиницею e:

$$\mathbb{B} := \{c_1 e + c_2 \rho \colon c_k \in \mathbb{C}, k = 1, 2\}, \quad \rho^2 = 0, \tag{8}$$

$$\mathbb{B}_0 := \{c_1 e + c_2 \omega \colon c_k \in \mathbb{C}, k = 1, 2\}, \quad \omega^2 = e. \tag{9}$$

Очевидно, що алгебра $\mathbb{B}_0$ є напівпростою (означення див., наприклад, у [17, с. 33]) і містить базис з ортогональних ідемпотентів $\{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2\}$, де

$$\mathcal{I}_1 = \frac{1}{2}\left(e+\omega\right), \qquad \mathcal{I}_2 = \frac{1}{2}\left(e-\omega\right), \qquad \mathcal{I}_1\mathcal{I}_2 = 0, \qquad (\mathcal{I}_k)^2 = \mathcal{I}_k, \quad k = 1,2,$$

а також

$$\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 = e, \quad \mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2 = \omega.$$

Елемент $w = c_1\mathcal{I}_1 + c_2\mathcal{I}_2$ з $\mathbb{B}_0$ є оборотним тоді й лише тоді, коли $c_k \neq 0,\ k = 1,2$. У випадку виконання цієї умови справджується рівність для оберненого елемента (див. [18, с. 38]):

$$w^{-1} = \frac{1}{c_1}\mathcal{I}_1 + \frac{1}{c_2}\,\mathcal{I}_2. \tag{10}$$

Оскільки алгебра $\mathbb{B}$ містить ненульовий радикал $\{c\rho\colon c \in \mathbb{C}\}$ (див. [10]), то алгебра $\mathbb{B}$ не є напівпростою. Елемент $A = c_1 e + c_2\rho$ з $\mathbb{B}$ є оборотним тоді й лише тоді, коли $c_1 \neq 0$. У випадку виконання цієї умови справджується рівність [19]

$$A^{-1} = \frac{1}{c_1}\,e - \frac{c_2}{(c_1)^2}\,\rho. \tag{11}$$

Введемо для кожного комплексного числа s позначення $l_\circ(s) := -(b_2s^3 + 2b_3s^2 + 3b_4s + 4b_5)$.

Наступна теорема визначає опис усіх пар $\mathbb{B}_*,\ \{e_1, e_2\}$, де базиси $\{e_1, e_2\}$ задовольняють умову (4). Зокрема, встановлено, що за алгебру $\mathbb{B}_*$ можна взяти будь-яку алгебру з (8) і (9).

Теорема 1. *Усі пари базисних елементів алгебри* $\mathbb{B}$, *що задовольняють умову* (4), *можна записати у вигляді*

$$e_1 = \alpha\, e + \beta_1\rho, \qquad e_2 = s_\circ\alpha\, e + \beta_2\rho, \tag{12}$$

де комплексне число $\alpha \neq 0$ *вибрано довільним чином, а комплексні числа* β_1 *і* β_2 *задовольняють умови*

$$\beta_2 \neq s_\circ\beta_1, \qquad \beta_1 l_\circ(s_\circ) = 0. \tag{13}$$

Всі пари базисних елементів алгебри $\mathbb{B}_0$, *що задовольняють умову* (4), *мають вигляд*

$$e_1 = \alpha\,\mathcal{I}_1 + \beta\,\mathcal{I}_2, \qquad e_2 = \widetilde{s}_1\alpha\,\mathcal{I}_1 + \widetilde{s}_2\beta\,\mathcal{I}_2, \tag{14}$$

де $\widetilde{s}_k \in \ker l, k = 1,2,$ *такі, що* $\widetilde{s}_1 \neq \widetilde{s}_2$, *комплексні числа* $\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$ *вибираються довільним чином.*

Доведення. Шукаємо пари базисних елементів $\{e_1, e_2\}$ вигляду

$$e_k = \alpha_k e + \beta_k\rho \in \mathbb{B}, \quad k = 1,2, \tag{15}$$

де невідомі комплексні коефіцієнти $\alpha_k,\ \beta_k,\ k = 1,2$, задовольняють співвідношення

$$\Delta_{e_1e_2} := \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0. \tag{16}$$

Легко одержати рівності

$$(e_m)^k = (\alpha_m)^{k-1}\left(\alpha_m e + k\beta_m\rho\right), \qquad k = \overline{1,4}, \quad m = \overline{1,2}. \tag{17}$$

Підставляючи (15) у (4) і враховуючи при цьому (17), отримуємо

$$\mathcal{L}(e_1, e_2) = b_1\alpha_2^3\,(\alpha_2 e + 4\beta_2\rho) + b_2\,(\alpha_1 e + \beta_1\rho)\,\alpha_2^2\,(\alpha_2 e + 3\beta_2\rho) +$$

$$+ \, b_3\alpha_1\alpha_2\,(\alpha_1 e + 2\beta_1\rho)\,(\alpha_2 e + 2\beta_2\rho) + b_4\alpha_1^2\,(\alpha_1 e + 3\beta_1\rho)\,(\alpha_2 e + \beta_2\rho) +$$

$$+ b_5\alpha_1^3\,(\alpha_1 e + 4\beta_1\rho) = A_e\, e + A_\rho\, \rho,$$

де

$$A_e := b_1\alpha_2^4 + b_2\alpha_2^3\alpha_1 + b_3\alpha_2^2\alpha_1^2 + b_4\alpha_2\alpha_1^3 + b_5\alpha_1^4,$$

$$A_\rho := (b_2\beta_1 + 4b_1\beta_2)\,\alpha_2^3 + (3b_2\beta_2 + 2b_3\beta_1)\,\alpha_1\alpha_2^2 + (2b_3\beta_2 + 3b_4\beta_1)\,\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1^3\,(b_4\beta_2 + 4b_5\beta_1)\,.$$

Тому шукані $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{C},\ k = 1, 2,$ повинні задовольняти систему

$$A_e = 0, \qquad A_\rho = 0, \qquad \Delta_{e_1 e_2} \neq 0. \tag{18}$$

Розглянемо перше рівняння системи (18). Беручи до уваги, що $b_1 \neq 0$, одержуємо, що $\alpha_1 \neq 0$ (інакше $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, що суперечить третьому співвідношенню у (18)) і справджується рівність

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = s_* \quad \forall s_* \in \ker l. \tag{19}$$

Виконуючи ділення обох частин другого рівняння системи (18) на α_1^3 і використовуючи (19), одержуємо

$$-l_\circ(s_*)\beta_1 + l'\,(s_*)\,\beta_2 = 0, \tag{20}$$

де $l'(s_*)$ — значення похідної многочлена $l(s)$ з (2) при $s = s_*$.

Можливі два випадки: $s_* = s_\circ$ і $s_* = s_k,\ k \in \{3, 4\}$.

Розглянемо перший випадок. Тоді $l'(s_\circ) = 0$, оскільки $s = s_\circ$ є подвійним коренем рівняння (2), а рівність (20) набирає вигляду

$$-l_\circ(s_\circ)\beta_1 = 0. \tag{21}$$

Нехай $l_\circ(s_\circ) = 0$. Тоді з (21) одержуємо, що β_1 може бути довільним комплексним числом. З'ясуємо, коли умова (16) виконується. Маємо $\Delta_{e_1e_2} = \alpha_1\,(\beta_2 - s_\circ\beta_1) \neq 0$. Оскільки $\alpha_1 \neq 0$, то це має місце лише якщо $\beta_2 \neq s_\circ\beta_1$. Замінюючи α_1 на α, приходимо до формул

$$e_1 = \alpha\, e + \beta_1\rho, \qquad e_2 = s_\circ\alpha\, e + \beta_2\rho, \tag{22}$$

де комплексні числа β_1 і $\alpha \neq 0$ вибираються довільним чином, а $\beta_2 \in \mathbb{C}$ задовольняє умову $\beta_2 \neq s_\circ\beta_1$.

Нехай $l_\circ(s_\circ) \neq 0$. Тоді, як і раніше, $s_* = s_\circ$. З (20) випливає, що $\beta_1 = 0$. Отже, серед пар базисів $\{e_1, e_2\}$ алгебри $\mathbb{B}$ вигляду $e_1 = \alpha_1\, e,\ e_2 := s_\circ\alpha_1\, e + \beta_2\, \rho$ слід вибрати ті, що задовольняють умову (16). Тоді $\Delta_{e_1e_2} = \alpha_1\beta_2 \neq 0$ лише при $\beta_2 \neq 0$. Замінюючи α_1 на α, приходимо до формул

$$e_1 = \alpha e, \qquad e_2 = s_\circ\alpha e + \beta_2\rho, \tag{23}$$

де комплексні числа $\alpha \neq 0,\ \beta_2 \neq 0$ вибираються довільним чином.

Перейдемо до випадку, коли s_* є простим коренем рівняння (2), тобто $s_* = s_k,\ k \in \{3,4\}$. Тоді $l'(s_*) \neq 0$, а рівняння (20) еквівалентне такому:

$$\beta_2 = \frac{l_\circ(s_*)}{l'(s_*)}\beta_1. \tag{24}$$

Із знайдених пар $\{e_1, e_2\}$ потрібно вибрати ті, які є лінійно незалежними. Для цього необхідно перевірити виконання третього співвідношення системи (18). Підставляючи (19) і (24) у (16), отримуємо

$$\Delta_{e_1e_2} = \left(\frac{l_\circ(s_*)}{l'(s_*)} - s_*\right)\alpha_1\beta_1 \neq 0. \tag{25}$$

Якщо $\beta_1 = 0$, то умова (25) не виконується, тому $\beta_1 \neq 0$, отже, і $\beta_2 \neq 0$ на підставі (24). Оскільки за доведеним $\alpha_1 \neq 0$ і $\beta_1 \neq 0$, то $\Delta_{e_1e_2}$ може дорівнювати нулю лише за умови, що $\dfrac{l_\circ(s_*)}{l'(s_*)} - s_* = 0$. Перевіримо, чи це можливо. Після безпосередньої підстановки маємо

$$\frac{l_\circ(s_*)}{l'(s_*)} - s_* = -\frac{4}{l'(s_*)}l(s_*) \equiv 0.$$

Тамин чином, приходимо до висновку, що шуканих базисів у алгебрі $\mathbb{B}$ немає у випадку, коли s_* є простим коренем рівняння (2).

Підсумовуючи знайдені базиси в усіх розглянутих випадках, отримуємо опис усіх пар базисних елементів алгебри $\mathbb{B}$, що задовольняють умову (4). Отже, справедливим є подвійне твердження.

1. Нехай $l_\circ(s_\circ) = 0$. Тоді всі пари базисних елементів алгебри $\mathbb{B}$, що задовольняють умову (4), мають вигляд (22), де комплексні числа β_1 і $\alpha \neq 0$ вибираються довільним чином, а $\beta_2 \in \mathbb{C}$ задовольняє умову $\beta_2 \neq s_\circ\beta_1$.

2. Нехай $l_\circ(s_\circ) \neq 0$. Тоді всі пари базисних елементів алгебри $\mathbb{B}$, що задовольняють умову (4), мають вигляд (23), де комплексні числа $\alpha \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$ вибираються довільним чином.

Враховуючи, що умови на β_1 і β_2 у випадках 1, 2 можна поєднати умовою (13), приходимо до формул (12), які визначають опис шуканих базисів у алгебрі $\mathbb{B}$.

Знайдемо необхідні базиси в алгебрі $\mathbb{B}_0$.

Легко показати, що елементи $e_k = \alpha_k\,\mathfrak{I}_1 + \beta_k\,\mathfrak{I}_2,\ k = 1,2$, задовольняють рівності

$$e_k^n = \alpha_k^n\,\mathfrak{I}_1 + \beta_k^n\mathfrak{I}_2, \qquad n = \overline{1,4}, \quad k = 1,2.$$

Позначимо $(e_k)^0 := 1,\ k = 1,2,\ \lambda^0 := 1$ при дійсних значеннях λ. Тоді

$$\mathcal{L}(e_1,e_2) = \sum_{k=1}^{5} b_k\left(\alpha_2^{5-k}\mathfrak{I}_1 + \beta_2^{5-k}\mathfrak{I}_2\right)\left(\alpha_1^{k-1}\mathfrak{I}_1 + \beta_1^{k-1}\mathfrak{I}_2\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{5} b_k\left(\alpha_2^{5-k}\alpha_1^{k-1}\mathfrak{I}_1 + \beta_2^{5-k}\beta_1^{k-1}\mathfrak{I}_2\right).$$

Отже, шукана система для знаходження коефіцієнтів базисних елементів $e_k = \alpha_k\,\mathfrak{I}_1 + \beta_k\,\mathfrak{I}_2$, $k = 1,2$, має вигляд

$$A_e \equiv \sum_{k=1}^{5} b_k \alpha_2^{5-k}\alpha_1^{k-1} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{5} b_k \beta_2^{5-k}\beta_1^{k-1} = 0, \qquad \Delta_{e_1e_2} \equiv \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0. \tag{26}$$

Як і у (18), встановлюємо, що $\alpha_1 \neq 0$. Аналогічним чином, розглядаючи друге рівняння в (26) і співвідношення $\Delta_{e_1e_2} \neq 0$, переконуємося, що $\beta_1 \neq 0$. За допомогою елементарних перетворень приходимо до висновку, що система (26) рівносильна системі

$$l\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = 0, \qquad l\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right) = 0, \qquad \Delta_{e_1e_2} \neq 0. \tag{27}$$

Розв'язки системи (27) мають вигляд

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \widetilde{s}_1, \qquad \frac{\beta_2}{\beta_1} = \widetilde{s}_2 \quad \forall\, \widetilde{s}_k \in \ker l, \quad k = 1, 2, \quad \widetilde{s}_1 \neq \widetilde{s}_2.$$

Позначимо α_1 через α, а β_1 через β.

Отже, всі базиси алгебри $\mathbb{B}_0$, що задовольняють умову (4), мають вигляд (14).

Теорему доведено.

***Зауваження* 1.** Умова $l_\circ(s_\circ) = 0$ виконується, наприклад, у випадку

$$b_1 = 1, \qquad b_2 = -2i, \qquad b_3 = -2, \qquad b_4 = 2i, \qquad b_5 = 1.$$

Тоді $s_\circ = i$, $s_3 = -1$ і $s_4 = 1$ з точністю до переставлення.

Умова $l_\circ(s_\circ) \neq 0$ виконується, наприклад, у випадку

$$b_1 = 1, \qquad b_2 = -1 - 4i, \qquad b_3 = 4i - 5, \qquad b_4 = 1 + 2i, \qquad b_5 = 4 - 2i.$$

Тоді $s_\circ = i$, $s_3 = 2i$ і $s_4 = 1$ з точністю до переставлення.

4. Моногенні функції в алгебрі $\mathbb{B}$, асоційовані з рівнянням (1). З урахуванням (11) одержуємо, що базиси (12) задовольняють, крім умови (4), умову $\mathcal{MB}$) тоді й лише тоді, коли

$$\operatorname{Im} s_\circ \neq 0. \tag{28}$$

Отже, далі ми будемо вважати, що умова (28) виконується, а у відповідних базисах (12), описаних у теоремі 1, $s_\circ$ задовольняє додатково дану умову, крім умови (13). Зауважимо, що базисні елементи з (12) мають обернені e_1^{-1} та e_2^{-1}, зокрема $e_1^{-1} = \frac{1}{\alpha}\, e - \dfrac{\beta_1}{\alpha^2}\, \rho$.

Таким чином, будемо розглядати в цьому пункті моногенні функції вигляду $\Phi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$.

Як і у випадку, коли замість оператора L розглядається бігармонічний оператор (див. [10, 20]), доводимо таку теорему.

Теорема 2. *Функція $\Phi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}_0$ є моногенною в області D_ζ тоді й лише тоді, коли її компоненти $U_k : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $k = \overline{1,4}$, з розкладу* (5) *диференційовні в області D й виконується аналог умов Коші–Рімана*

$$\frac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial y}\, e_1 - \frac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial x}\, e_2 = 0 \quad \forall \zeta = xe_1 + ye_2 \in D_\zeta.$$

Введемо до розгляду комплексну змінну й область її визначення:

$$z_\circ := x + s_\circ y, \qquad D_{z_\circ} := \{z_\circ = x + s_\circ y : (x, y) \in D\}.$$

Єдиному максимальному ідеалу $\mathcal{I} := \{c\rho : c \in \mathbb{C}\}$ алгебри $\mathbb{B}$ відповідає лінійний неперервний функціонал $f : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{C}$, ядром якого є $\mathcal{I}$, і при цьому $f(e) = 1$. Очевидно, що $\alpha z_\circ = f(\zeta)$ для будь-якого $\zeta \in D_\zeta$.

Зауважимо, що умова (28) еквівалентна умові

$$f\left(\mu_{e_1,e_2}\right) = \mathbb{C}. \tag{29}$$

Враховуючи (12), для кожного комплексного t отримуємо формули

$$\zeta = xe_1 + ye_2 = \alpha z_\circ e + (\beta_1 x + \beta_2 y)\,\rho, \qquad te - \zeta = (t - \alpha z_\circ)\,e - (\beta_1 x + \beta_2 y)\,\rho. \tag{30}$$

З урахуванням (11) одержуємо формулу для знаходження оберненого елемента до $te - \zeta$ з (30):

$$(te - \zeta)^{-1} = \frac{e}{t - \alpha z_\circ} + \frac{\beta_1 x + \beta_2 y}{(t - \alpha z_\circ)^2}\,\rho \quad \forall t \in \mathbb{C}.$$

Як і при доведенні теореми 2.4 [21], приходимо до висновку, що моногенну функцію $\Phi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ можна записати у вигляді

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma (te - \zeta)^{-1}\,(\mathcal{A}\Phi)\,(t)\,dt + \Phi_{\mathcal{I}}(\zeta) \quad \forall \zeta \in D_\zeta, \tag{31}$$

де γ — довільна жорданова спрямлювана крива в області $f\big(D_\zeta\big) \subset \mathbb{C}$, що охоплює точку $f(\zeta) = \alpha z_\circ$, $\Phi_{\mathcal{I}} : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ — моногенна функція в D_ζ, яка набуває значень в ідеалі $\mathcal{I}$ алгебри $\mathbb{B}$, $\mathcal{A}(z) := f\big(\Phi(\zeta)\big)$, $z = f(\zeta)$.

Легко встановити, що функція $F : D_{z_\circ} \longrightarrow \mathbb{B}$, яка є диференційовною за змінними x і y, є голоморфною в області $D_{z_\circ}$ тоді й лише тоді, коли виконується рівність (умова Коші – Рімана у комплексній формі)

$$\frac{\partial F(z_\circ)}{\partial y} = s_\circ \frac{\partial F(z_\circ)}{\partial x} \quad \forall z_\circ \in D_{z_\circ}. \tag{32}$$

Як і при доведенні теорем 1 і 2 [20], одержуємо, використовуючи теорему 2 і формули (31), (32), зображення моногенної функції Φ через дві голоморфні функції комплексної змінної $z_\circ$ в області $D_{z_\circ}$.

Теорема 3. *Функція $\Phi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ є моногенною в області D_ζ тоді й лише тоді, коли справджується рівність*

$$\Phi(\zeta) = F(z_\circ)\,e + \left(\frac{\beta_1 x + \beta_2 y}{\alpha} F'(z_\circ) + F_0(z_\circ)\right)\rho \quad \forall \zeta \in D_\zeta, \tag{33}$$

де F і F_0 — деякі голоморфні функції комплексної змінної $z_\circ$ в області $D_{z_\circ}$, F' — похідна функції F.

***Зауваження* 2.** Частинний випадок теореми 3 при $e_1 = e$ випливає з роботи [13], де під „моногенністю” функції Φ розуміється диференційовність за Гато та неперервність в області D_ζ функції $\Phi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$, до того ж для побудови зображень даних функцій суттєвою є умова (29).

Лема 1. *Кожна моногенна функція* $\Phi\colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ *має неперервні похідні* $\Phi^{(n)}$ *довільного порядку* $n = 1, 2, \ldots$.

Доведення проводимо з використанням зображення (33), теореми 2 і рівності (32).

Кожну моногенну функцію $\Phi\colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ можна записати у вигляді

$$\Phi(\zeta) = \mathrm{U}_e(x,y)\, e + \mathrm{U}_{ie}(x,y)\, ie + \mathrm{U}_\rho(x,y)\, \rho + \mathrm{U}_{i\rho}(x,y)\, i\rho \quad \forall \zeta \in D_\zeta, \tag{34}$$

де $\mathrm{U}_e\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathrm{U}_{ie}\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathrm{U}_\rho\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathrm{U}_{i\rho}\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$.

З леми 1 випливає, що кожна компонента U_e, U_{ie}, U_ρ, $\mathrm{U}_{i\rho}$ із розкладу (34) задовольняє рівняння (1). Справді, це випливає внаслідок (34) та рівностей $L\Phi(\zeta) = \mathcal{L}(e_1, e_2)\Phi^{(4)}(\zeta) \equiv 0$ при всіх $\zeta \in D_\zeta$.

З розкладу (33) одержуємо формули частинних розв'язків рівняння (1) при всіх $(x,y) \in D$:

$$\mathrm{U}_e(x,y) = \mathrm{Re}\, F\,(z_\circ)\,, \qquad \mathrm{U}_{ie}(x,y) = \mathrm{Im}\, F\,(z_\circ)\,,$$

$$\mathrm{U}_\rho(x,y) = \left(\mathrm{Re}\left(\frac{\beta_1}{\alpha}\right) x + \mathrm{Re}\left(\frac{\beta_2}{\alpha}\right) y\right) \mathrm{Re}\, F'\,(z_\circ) -$$

$$- \left(\mathrm{Im}\left(\frac{\beta_1}{\alpha}\right) x + \mathrm{Im}\left(\frac{\beta_2}{\alpha}\right) y\right) \mathrm{Im}\, F'\,(z_\circ) + \mathrm{Re}\, F_0\,(z_\circ),$$

$$\mathrm{U}_{i\rho}(x,y) = \left(\mathrm{Re}\left(\frac{\beta_1}{\alpha}\right) x + \mathrm{Re}\left(\frac{\beta_2}{\alpha}\right) y\right) \mathrm{Im}\, F'\,(z_\circ) +$$

$$+ \left(\mathrm{Im}\left(\frac{\beta_1}{\alpha}\right) x + \mathrm{Im}\left(\frac{\beta_2}{\alpha}\right) y\right) \mathrm{Re}\, F'\,(z_\circ) + \mathrm{Im}\, F_0\,(z_\circ).$$

5. Моногенні функції в алгебрі $\mathbb{B}_0$, асоційовані з рівнянням (1). З урахуванням (10) та умов $\widetilde{s}_k \neq 0$, $k = 1, 2$, легко переконуємось, що базиси (14) задовольняють крім умови (4) умову $\mathcal{MB}$) тоді й лише тоді, коли пари $\widetilde{s}_k \in \ker l$, $k = 1, 2$, що визначають відповідний базис, задовольняють крім умов теореми 1 умову

$$\mathrm{Im}\, \widetilde{s}_k \neq 0, \quad k = 1, 2. \tag{35}$$

Отже, далі ми будемо вважати, що множина коренів рівняння (2) містить хоча б два різних корені $\widetilde{s}_k \in \ker l$, $k = 1, 2$, такі, що задовольняють умову (35), а у відповідних базисах, описаних у теоремі 1, пара $\widetilde{s}_k \in \ker l$, $k = 1, 2$, задовольняє дану умову.

Введемо до розгляду комплексні змінні й області їх визначення:

$$z_k := x + \widetilde{s}_k y, \qquad D_{z_k} := \{z_k \in \mathbb{C}\colon x e_1 + y e_2 \in D_\zeta\}, \quad k = 1, 2.$$

Для моногенних функцій $\Phi\colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}_0$ справджуються всі твердження пункту 3 роботи [1] щодо відповідних функцій у випадку, коли характеристичне рівняння (2) має прості ненульові корені. Зокрема, має місце зображення моногенної функції $\Phi\colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}_0$ через дві голоморфні функції комплексної змінної z_1, z_2 відповідно:

$$\Phi(\zeta) = F_1\,(z_1)\,\mathfrak{I}_1 + F_2\,(z_2)\,\mathfrak{I}_2 \quad \forall \zeta \in D_\zeta, \tag{36}$$

де F_k — деяка голоморфна функція комплексної змінної z_k в області D_{z_k} відповідно при $k = 1, 2$.

Зауважимо, що всі результати роботи [1] до теореми 4 п. 4 включно переносяться і на моногенні функції $\Phi\colon D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}_0$ у випадку, коли характеристичне рівняння (2) має прості корені, з яких один може бути нульовим.

Література

1. С. В. Грищук, *Моногенні функції зі значеннями у комутативних комплексних алгебрах другого рангу з одиницею та узагальнене бігармонічне рівняння з ненульовими простими характеристиками*, Укр. мат. журн., **73**, № 4, 474 – 487 (2021).
2. С. Г. Михлин, *Плоская задача теории упругости*, Тр. Сейсм. ин-та АН СССР, № 65 (1934), 83 с.
3. N. E. Tovmasyan, *Non-regular differential equations and calculations of electromagnetic fields*, World Sci. Publ., Singapore (1998).
4. Е. А. Буряченко, *О размерности ядра задачи Дирихле для уравнений четвертого порядка*, Дифференц. уравнения, **51**, № 4, 472 – 480 (2015).
5. И. П. Мельниченко, *Бигармонические базисы в алгебрах второго ранга*, Укр. мат. журн., **38**, № 2, 252 – 254 (1986).
6. С. В. Грищук, *Комутативні комплексні алгебри другого рангу з одиницею та деякі випадки плоскої ортотропії, I*, Укр. мат. журн., **70**, № 8, 1058 – 1071 (2018).
7. S. V. Gryshchuk, $\mathbb{B}_0$*-valued monogenic functions and their applications to the theory of anisotropic plane media*, Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE-2018, Cambridge Sci. Publ., Cambridge (2020).
8. С. В. Грищук, *Моногенні функції у двовимірних комутативних алгебрах для рівнянь плоскої ортотропії*, Праці Ін-ту прикл. математики і механіки НАН України, **32**, 18 – 29 (2018).
9. P. W. Ketchum, *Solution of partial differential equations by means of hypervariables*, Amer. J. Math., **54**, № 2, 253 – 264 (1932).
10. В. Ф. Ковалев, И. П. Мельниченко, *Бигармонические функции на бигармонической плоскости*, Докл. АН УССР. Сер. А, № 8, 25 – 27 (1981).
11. R. Z. Yeh, *Hyperholomorphic functions and higher order partial differential equations in the plane*, Pacif. J. Math., **142**, № 2, 379 – 399 (1990).
12. В. С. Шпаківський, *Гіперкомплексний метод розв'язування лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними*, Праці Ін-ту прикл. математики і механіки НАН України, **32**, 147 – 168 (2018).
13. V. S. Shpakivskyi, *Monogenic functions in finite-dimensional commutative associative algebras*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **12**, № 3, 251 – 268 (2015).
14. С. А. Плакса, Р. П. Пухтаєвич, *Конструктивний опис моногенних функцій в скінченновимірній напівпростій комутативній алгебрі*, Доп. НАН України, № 1, 14 – 21 (2014).
15. S. A. Plaksa, R. P. Pukhtaievych, *Monogenic functions in a finite-dimensional semi-simple commutative algebra*, An. Ştiinţ. Univ. "Ovidius" Constanţa Ser. Mat., **22**, № 1, 221 – 235 (2014).
16. E. Study, *Über Systeme complexer Zahlen und ihre Anwendungen in der Theorie der Transformationsgruppen*, Monatsh. Math., **1**, № 1, 283 – 354 (1890).
17. Н. Г. Чеботарев, *Введение в теорию алгебр*, 3-е изд., Физико-математическое наследие: математика (алгебра), Изд-во ЛКИ, Москва (2008).
18. W. E. Baylis (Ed.), *Clifford (geometric) algebras: with applications to physics, mathematics, and engineering*, Birkhäuser, Boston etc. (1996).
19. С. В. Грищук, С. А. Плакса, *О логарифмичном вычете моногенных функций бигармонической переменной*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **7**, № 2, 227 – 234 (2010).
20. С. В. Грищук, С. А. Плакса, *Моногенные функции в бигармонической алгебре*, Укр. мат. журн., **61**, № 12, 1587 – 1596 (2009).
21. И. П. Мельниченко, С. А. Плакса, *Коммутативные алгебры и пространственные потенциальные поля*, Ин-т математики НАН Украины, Киев (2008).

Одержано 09.10.21