Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям

Я. Б. Лопатинский

В первой части работы изучается явное представление решения граничной задачи для эллиптической системы дифференциальных уравнений в полупространстве в частных предположениях и, основываясь на этом результате, указывается способ приведения граничных задач в случае ограниченной области к регулярным интегральным уравнениям. Подобный прием был применен ранее З. Я. Шапиро при более частных предположениях [1] [1].

1. Прежде всего будут рассмотрены свойства одного типа функциональных матриц. Пусть $A(\alpha)$ есть квадратная матрица порядка p, элементы которой суть формы степени s переменных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n (n \geqslant 2$; α обозначает точку $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$ с комплексными коэффициентами, и пусть она удовлетворяет условию: $\det A(\alpha) \neq 0$ для всякой действительной ненулевой точки α. Очевидно, это свойство сохраняется при всяком действительном линейном неособенном преобразовании аргументов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

В случае действительных коэффициентов элементов матрицы $A(\alpha)$ из этого предположения, очевидно, следует, что ps есть четное число и что α_n-корни уравнения $\det A(\alpha) = 0$ для всякой действительной ненулевой точки $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ поровну распределяются в верхней и нижней α_n-полуплоскостях.

Это заключение сохраняется и при комплексных коэффициентах, если только $n \geqslant 3$. Действительно, пусть $r(\alpha')$ есть количество α_n-корней уравнения $\det A(\alpha) = 0$, соответствующих ненулевой действительной точке $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$, которые лежат в верхней α_n-полуплоскости. Так как любые две такие точки можно соединить при $n \geqslant 3$ в действительном $(n-1)$-мерном пространстве путем, минующим нулевую точку, то $r(\alpha')$ от α' не зависит; с другой стороны, очевидно, $r(-\alpha') = ps - r(\alpha')$; итак, $r(\alpha') = \frac{1}{2} ps$ и ps — число четное.

Как показывает пример $\alpha_1 + i\alpha_2$, это замечание может быть и несправедливым при $n = 2$. В дальнейшем предполагается, что ps —

[1] Как нам стало известно, З. Я. Шапиро также получены дальнейшие результаты в этом направлении.

число четное и что α_n-корни уравнения $\det A(\alpha) = 0$ для всякой действительной ненулевой точки α' поровну распределяются в верхней и нижней α_n-полуплоскостях.

Будет использовано следующее обозначение:

$$\Phi(x, \alpha) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2(2\pi i)^{n-1}(s-n)!}(x, \alpha)^{s-n} \lg\left\{-\dfrac{(x, \alpha)^2}{(\alpha', \alpha')}\right\} & (s \geqslant n) \\ \dfrac{(-1)^{n-s}(n-s-1)!}{(2\pi i)^{n-1}}(x, \alpha)^{s-n}, & (s < n). \end{cases} \tag{I}$$

$\left(x = (x_1, \ldots, x_n),\ (x, \alpha) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \alpha_k,\ (\alpha', \alpha') = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \alpha_k^2\right)$. Функция эта будет в дальнейшем рассматриваться при следующих значениях аргументов x, α: x_n — действительно и неотрицательно; $(\alpha', \alpha') \neq 0$, $\dfrac{(x, \alpha)^2}{(\alpha', \alpha')}$ не равно действительному положительному числу; можно поэтому полагать $\Phi(x, \alpha)$ однозначно определенной, например, условием: при $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_{n-1} = 0$, $\alpha_n = i$, $x_1 = 0, \ldots, x_{n-1} = 0$, $x_n = 1$ значение логарифма полагается равным нулю. $\Phi^{(k)}(x, \alpha)$ будет обозначать k — производную функции $\Phi(x, \alpha)$, рассматриваемой как функция аргументов α' и (x, α), по аргументу (x, α).

В дальнейшем потребуется рассмотрение семейств функциональных матриц, обладающих следующими свойствами. Пусть K есть открытое множество действительных точек $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$, такое, что из $\alpha' \in K$ и $\varrho > 0$ следует $\varrho\alpha' \in K$ („конусное множество“). Пусть $K_1, \ldots, K_r$ есть совокупность конусных множеств, объединение которых покрывает все $(n-1)$-мерное действительное пространство с выключенным нулем. Пусть каждому конусному множеству K_j соответствует матрица $P_j(\alpha)$, элементы которой суть аналитические функции $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$, при $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in K_j$ и любом комплексном α_n в верхней α_n-полуплоскости, кроме, может быть, точек α, для которых $\det A(\alpha) = 0$ [1] такие, что $P_j(\varrho\alpha) = \varrho^{k-s} P_j(\alpha)$ (k — неотрицательное целое число, общее для всех $j = 1, \ldots, r$); далее, если $\alpha' \in K_{j_1} \cap K_{j_2}$, то предполагается, что $P_{j1}(\alpha', \alpha_n) - P_{j2}(\alpha', \alpha_n)$ не имеет особенностей также и в точках α_n, удовлетворяющих условию $\det A(\alpha', \alpha_n) = 0$. Семейство матриц $P_1(\alpha), \ldots, P_r(\alpha)$ с перечисленными свойствами будет для краткости называться специальным семейством индекса k, соответствующим матрице $A(\alpha)$. Пусть α' есть произвольная действительная ненулевая точка: $\int\limits_{+} (\ldots) d\alpha_n$ будет в дальнейшем обозначать интегрирование по положительно ориентированному простому пути, лежащему в верхней α_n-полуплоскости и охватывающему все α_n-корни уравнения $\det A(\alpha', \alpha_n) = 0$ с положительной мнимой частью.

Очевидно, для каждой такой точки α' матрица $\int\limits_{+} \Phi^{(k)}(x_1\alpha) P_j(\alpha)\, d\alpha_n$ определяется специальным семейством $\{P_j(\alpha)\}$ однозначно; поэтому

[1] Матрица $A(\alpha)$ обладает ранее описанными свойствами.

в подобной записи индекс j будет для простоты в дальнейшем опускаться.

Теперь будут изучены свойства интегралов вида

$$J_k(x) = \int \ldots (n-2) \ldots \int_T \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-1} \alpha_j \frac{d\alpha_1 \ldots d\alpha_{n-1}}{d\alpha_j} \int_+ \Phi^{(k)}(x, \alpha) P(\alpha)\, d\alpha_n =$$

$$= \int \ldots (n-2) \ldots \int_T d_{\alpha'} T \int_+ \Phi^{(k)}(x, \alpha) P(\alpha)\, d\alpha_n. \qquad (1,2)$$

Здесь $P(\alpha)$ есть представитель специального семейства матриц индекса k, соответствующего описанной ранее матрице $A(\alpha)$; $\frac{d\alpha_1 \ldots d\alpha_{n-1}}{d\alpha_j}$ обозначает внешнюю дифференциальную форму, полученную из $d\alpha_1, \ldots, d\alpha_{n-1}$ вычеркиванием $d\alpha_j$; точка x предполагается действительной, причем $x_n > 0$; T при $n > 2$ обозначает действительную единичную сферу $(\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_{n-1}^2 = 1)$, ориентированную внешним образом; $d_{\alpha'}T$ — элемент поверхности T. При $n = 2$ T обозначает совокупность точек $\alpha_1 = +1$, ориентированной положительно, и $\alpha_1 = -1$, ориентированной отрицательно. Легко проверить, что внешний дифференциал выражения, стоящего под знаком интеграла по T, равен нулю; следовательно, при достаточно малом смещении области интегрирования T (а также и пути интегрирования по α_n) величина интеграла не изменится.

Лемма 1,1. Пусть

$$\int_+ P(\alpha)\, d\alpha_n = \begin{cases} 0 & (k \neq s-1) \\ C & (k = s-1) \end{cases} \qquad (1,3)$$

(C — постоянная матрица). Тогда, если $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \neq 0$, то $J_k(x) \xrightarrow[x_n \to +0]{} 0$; при этом стремление к пределу равномерно относительно значений x' из любого замкнутого ограниченного (при $k > s - n$ — также и для неограниченного) множества, не содержащего нулевой точки.

Доказательство. Очевидно, можно поверхность T как угодно мало деформировать в облегающем комплексном пространстве так, чтобы на смещенной (соответственно ориентированной) поверхности $T(x')$ выполнялись условия $Im(x', \alpha') \geqslant 0$ и $(x', \alpha') \neq 0$; после замены в формуле (1,2) поверхности T соответственно ориентированной поверхностью $T(x')$ возможен переход к пределу $x_n \to +0$ под знаком интеграла. Если $\int_+ P(\alpha)\, d\alpha_n = 0$, то справедливость леммы очевидна.

Пусть $k = s - 1$ и $\int_+ P(\alpha)\, d\alpha_n = C$; тогда, вычисляя $\Phi^{(s-1)}(x, \alpha)$, получают

$$J_{s-1}(x)\big|_{x_n=+0} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(n-2)!}{(2\pi i)^{n-1}} \int \ldots (n-2) \ldots \int_{T(x')} (x', \alpha')^{1-n} \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-1} \alpha_j \frac{d\alpha_1 \ldots d\alpha_{n-1}}{d\alpha_j}\, C.$$

Но подинтегральное выражение является внешним дифференциалом, например, такой формы:

$$\frac{1}{(x', \alpha')^{n-1}} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} (-1)^{i+j} A_{ij} \frac{d\alpha_1 \ldots d\alpha_{n-1}}{d\alpha_i d\alpha_j}$$

$$A_{ij} = \sum_{ghkl} a_{ik} a_{gk} a_{jl} a_{hl} R_{kl} \alpha_g \alpha_h,$$

где $R_{ki} = -R_{ik}$ определяются из уравнений

$$-(n-1) R_{1l} + \sum_{k=1}^{n-1} R_{kl} = 1 \qquad (l = 1, \ldots, n-1);$$

$(a_{ij})_{i,j=1}^{n-1}$ есть ортогональная матрица, первый столбец которой есть вектор $\frac{1}{|x'|} x'$.

Таким образом, $J_{s-1}(x)|_{x_n=+0} = 0$, т. е. лемма доказана.

Полезно отметить в этой связи, что при достаточно малом $\frac{|x_n|}{|x'|}$ $J_k(x)$ оказывается определенным и при отрицательных значениях x_n, именно, достаточно предполагать возможным такое смещение поверхности T, при котором $(x, \alpha) \neq 0$.

Лемма 1,2. В тех же предположениях, при $k > s - n$,

$$J_k(x) = \frac{x_n}{|x|^{k+n-s+1}} H\left(\frac{x}{|x|}\right), \tag{1,4}$$

где $H(y)$ — непрерывная и неограниченно дифференцируемая при $y_n > 0$ матрица.

Доказательство. Если M некоторая матрица, то под $|M|$ будет подразумеваться максимум модулей ее элементов.

Тогда (при $k > s - n$) очевидна оценка $\left| \frac{\partial}{\partial x_j} J_k(x) \right| \leqslant \frac{c_1}{|x|^{k+n-s+1}}$ $(j = 1, \ldots, n)$, где c_1 — некоторая постоянная.

Пусть точка x $(x_n > 0)$ спроектирована на плоскость $x_n = 0$, и $a'x$ есть наименьшая дуга окружности радиуса $|x|$ с центром в нуле, соединяющая точку x с точкой a', лежащей в плоскости $x_n = 0$.

Очевидно, длина дуги $a'x$ не больше $\frac{\pi}{2} x_n$. Но тогда из

$$J_k(x) = \int_{a'x} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_j} J_k(\xi)\, d\xi_j$$

непосредственно следует оценка

$$|J_k(x)| \leqslant \frac{c x_n}{|x|^{k+n-s+1}}.$$

Представление (1,4) тогда получается путем замены в выражении $J_k(x)$ x через $|x| y$.

Лемма 1,3. Пусть относительно специального семейства матриц (с представителем $P(\alpha)$) выполнены предположения леммы 1,1. Пусть $f(x')$ есть функциональная матрица, определенная для всякой действительной точки x', удовлетворяющая одному из условий: если $k < s - 1$, то элементы $f(x')$ непрерывны и по модулю не превышают $\frac{c}{|x'|^{s-1-k+\varepsilon}}$ (c, ε — некоторые положительные постоянные); если $k \geqslant s - 1$, то элементы $f(x')$ непрерывно дифференцируемы $k - s + 1$ раз и не превышают $c(|x'|^{k-s+1} + 1)$.

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots (n-1) \cdots \int J_k(x-y') f(y')\, dy' \xrightarrow[x_n \to +0]{} 0 \qquad (k \neq s-1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots (n-1) \cdots \int J_{s-1}(x-y') f(y')\, dy' \xrightarrow[x_n \to +0]{} Cf(x');$$

здесь $x = (x_1, \ldots, x_n)$, y' обозначает отождествляемые точки $(y_1, \ldots, y_{n-1})$ и $(y_1, \ldots, y_{n-1}, 0)$; $dy' = dy_1 \ldots dy_{n-1}$; C — постоянная матрица из формулы (1,3). При этом предельный переход совершается равномерно относительно x' в любом ограниченном множестве.

Доказательство. Пусть V_ε есть действительный шар радиуса ε ($|x'| < \varepsilon$). Сначала будет рассмотрен

$$\lim_{x_n \to +0} \int_{V_\varepsilon} \cdots (n-1) \cdots \int J_k(x)\, g(x')\, dx'$$

в предположении, что $g(x')$ есть матрица, элементы которой суть аналитические функции при $|x'| \leqslant \varepsilon$.

По формуле (1,2),

$$\int_{V_k} \cdots (n-1) \cdots \int J_k(x) g(x')\, dx' =$$

$$= \int_T \cdots (n-2) \cdots \int d_{\alpha'} T \int_+ d\alpha_n P(\alpha) \int_{V_\varepsilon} \cdots (n-1) \cdots \int \Phi^{(k)}(x, \alpha)\, g(x')\, dx'.$$

Для фиксированной точки $\alpha' \in T$ пусть S есть сечение единичного шара V_1 плоскостью, проходящей через начало ортогонально α'. Тогда, очевидно,

$$\int_{V_\varepsilon} \cdots (n-1) \cdots \int \Phi^{(k)}(x, \alpha)\, g(x')\, dx' =$$

$$= \int_S \cdots (n-2) \cdots \int d_{\nu} S \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Phi^{(k)}\left(\sqrt{\varepsilon^2 - z^2}\,\tau' + z\alpha',\, x_n, \alpha\right) \times$$

$$\times\, g\left(\sqrt{\varepsilon^2 - z^2}\,\tau' + z\alpha'\right) (\varepsilon^2 - z^2)^{\frac{n}{2}-1}\, dz, \qquad ((\tau'_1 \alpha') = 0)\,[1].$$

---

[1] $\Phi^{(k)}(x, \alpha) = \Phi^{(k)}(x', x_n, \alpha_n)$

Так как подинтегральное выражение есть аналитическая функция z, то, сохраняя величину предыдущего интеграла, можно путь z — интегрирования — заменить путем, соединяющим точку $-\varepsilon$ с точкой $+\varepsilon$, проходящим в верхней z-полуплоскости. Но тогда возможен предельный переход $x_n \to +0$ под знаком интеграла.

Очевидно, при $\int\limits_{+} P(\alpha)\, d\alpha_n = 0$,

$$\lim_{x_n \to +0} \int\limits_{V_\varepsilon} \ldots (n-1) \ldots \int J_k(x)\, g(x')\, dx' = 0.$$

Пусть теперь $k = s-1$, $\int\limits_{+} P(\alpha)\, d\alpha_n = C$, $g(x') = D$, где C, D — постоянные матрицы

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Phi^{(s-1)}\left(\sqrt{\varepsilon^2 - z^2}\,\tau' + z\alpha_1{}' x_n, \alpha\right) g\left(\sqrt{\varepsilon^2 - z^2}\,\tau' + z\alpha'\right) (\varepsilon^2 - z^2)^{\frac{n}{2}-1} dz =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(n-2)!}{(2\pi i)^{n-1}} \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{(\varepsilon^2 - z^2)^{\frac{n}{2}-1}}{(z + x_n\alpha_n)^{n-1}}\, dz\, D \xrightarrow[x_n \to +0]{} \frac{(-1)^{n-1}(n-2)!}{(2\pi i)^{n-1}} \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{(\varepsilon^2 - z^2)^{\frac{n}{2}-1}}{z^{n-1}}\, dz D;$$

(в последнем интеграле обход нуля совершается в верхней z-полуплоскости). Но, как не трудно подсчитать,

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{(\varepsilon^2 - z^2)^{\frac{n}{2}-1}}{z^{n-1}}\, dz = (-i)^{n-1}\pi.$$

Таким образом, в этом случае

$$\lim_{x_n \to +0} \int\limits_{V_\varepsilon} \ldots (n-1) \ldots \int J_{s-1}(x)\, g(x')\, dx' =$$

$$= \frac{(n-2)!\,\pi}{(2\pi)^{n-1}} \int\limits_{T} \ldots (n-2) \ldots \int d_{\alpha'} T \int\limits_{+} d\alpha_n P(\alpha) \int\limits_{S} \ldots (n-2) \ldots \int d_{\tau'} S D = CD$$

итак, если $\int\limits_{+} P(\alpha)\, d\alpha_n = 0$, $g(x')$ — произвольная аналитическая при $|x'| \leqslant \varepsilon$ матрица, то

$$\lim_{x_n \to +0} \int\limits_{V_\varepsilon} \ldots (n-1) \ldots \int J_k(x)\, g(x')\, dx' = 0; \tag{1,5}$$

если $\int\limits_{+} P(\alpha)\, d\alpha_n = C$, $g(x') = D$ (C, D — постоянные матрицы), то

$$\lim_{x_n \to +0} \int\limits_{V_\varepsilon} \ldots (n-1) \ldots \int J_{s-1}(x)\, g(x')\, dx' = CD. \tag{1,6}$$

Пусть теперь $f(x')$ матрица, удовлетворяющая условиям леммы. Пусть сначала $k < s-1$; при достаточно большом R элементе матрицы $I_k(x)$ при $x_n > 0$, $|x'| \geqslant R$ не превосходят $c\,|x|^{s-n-k} \lg |x|$ (c — некоторая постоянная); таким образом, увеличением R можно добиться произвольной малости элементов матрицы

$$\int_{|x'|>R} \cdots (n-1) \cdots \int J_k(x) f(x')\, dx'.$$

Используя ограниченность $f(x')$, можно подобрать столь малое ε, чтобы элементы матрицы

$$\int_{|x'|<\varepsilon} \cdots (n-1) \cdots \int J_k(x) f(x')\, dx'$$

были также произвольно малы.

Наконец, на основании леммы 1,1, уменьшением x_n можно добиться произвольной малости элементов матрицы

$$\int_{\varepsilon<|x'|<R} \cdots (n-1) \cdots \int J_k(x) f(x')\, dx'.$$

Таким образом, при $k<s-1$

$$\lim_{x_n\to+0} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots (n-1) \cdots \int J_k(x) f(x')\, dx' = 0.$$

Пусть теперь $k \geqslant s-1$. Используя дифференциальные свойства матрицы $f(x')$, можно подобрать такую полиномиальную матрицу $(k-s+1)$-степени, — $g(x')$, — что элементы матрицы $\frac{1}{|x'|^{k-s+1}}(f(x')-g(x')) = \omega(x')$ могут быть сделаны произвольно малыми при достаточно малом $|x'|$. Используя теперь представление (1,4), легко показать, что уменьшением ε можно добиться произвольной малости элементов матрицы

$$\int_{|x'|<\varepsilon} \cdots (n-1) \cdots \int J_k(x) [f(x')-g(x')]\, dx'.$$

На основании того же представления (1,4) и предполагаемой в лемме оценки элементов $f(x')$ уменьшением x_n можно добиться произвольной малости элементов матрицы

$$\int_{|x'|>\varepsilon} \cdots (n-1) \cdots \int J_k(x) f(x')\, dx'.$$

Наконец, $\lim\limits_{x_n\to+0} \int\limits_{|x'|<\varepsilon} \cdots (n-1) \cdots \int J_k(x) g(x')\, dx'$ равен 0 или CD на основании формул (1,5), (1,6).

Итак, при $k \geqslant s-1$

$$\lim_{x_n\to+0} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots (n-1) \cdots \int J_k(x) f(x')\, dx' = \begin{cases} 0 & (k \neq s-1) \\ Cf(0) & (k=s-1). \end{cases}$$

Из этих формул непосредственно следует справедливость утверждений леммы.

Предельный переход благодаря равномерности оказывается возможным также и при приближении точки x к плоскости $x_n=0$ по любому некасательному пути.

2. Теперь будет дано решение граничной задачи для полупространства в простейших предположениях. Именно, пусть $A(\alpha)$ — матрица порядка p и степени s, обладающая описанными в п. 1 свойствами. Пусть $B(\alpha)$ — матрица, содержащая $\frac{1}{2}ps$ строк и p столбцов, элементы j-строки которой — $B_j(\alpha)$ — являются формами одинаковой степени $s_j\left(j=1,\ldots,\frac{1}{2}ps\right)$, $s_j<s$; $\underline{s}$ $(\bar{s})$ будет обозначать наименьшее (наибольшее) из чисел s_j.

Теорема 1. Пусть для всякой действительной ненулевой точки $\alpha'=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})$

$$\text{ранг}\int\limits_{+} B(\alpha)A^{-1}(\alpha)(E,\alpha_n E,\ldots,\alpha_n^{s-1}E)\,d\alpha_n=\frac{1}{2}ps; \tag{2,1}$$

здесь E — единичная матрица порядка p.

Пусть $f(x')$ есть функциональный столбец, определенный при всех действительных $x'=(x_1,\ldots,x_{n-1})$, j-элемент которого — $f_j(x')$ — является функцией, непрерывно дифференцируемой $\bar{s}-s_j$ раз, не превышающей $\dfrac{c}{|x'|^{s_j+\varepsilon}}$ (c, ε — некоторые положительные постоянные; $j=1,\ldots,\frac{1}{2}ps\Big)$.

Тогда в полупространстве $x_n>0$ граничная задача

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)=0, \tag{2,2}$$

$$\lim_{x_n\to+0}B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)=f(x') \tag{2,3}$$

разрешима [1].

Доказательство. Пусть $R(\alpha')$ — какая-либо из правообратных матриц для матрицы

$$\int\limits_{+} B(\alpha)A^{-1}(\alpha)(E,\alpha_n E,\ldots,\alpha_n^{s-1}E)\,d\alpha_n$$

[по условию (2,1) такая матрица существует]; $R_j(\alpha')$ есть j-столбец матрицы $R(\alpha')$. Легко видеть, что $R(\alpha')$ можно при этом выбрать так, чтобы матрица $Q_j(\alpha)=(E,\alpha_n E,\ldots,\alpha_n^{s-1}E)R_j(\alpha')$ обладала свойствами: $Q_j(\alpha)$ — аналитическая функция α, если α' находится в некотором конусном множестве [2], причем для всякого $\varrho>0$, $Q_j(\varrho\alpha)=\varrho^{s-s_j-1}Q_j(\alpha')$; в дальнейшем выполнение этого свойства предполагается.

[1] Повидимому, эта теорема остается верной и в том случае, когда условие (2,1) предполагается выполненным для функционального ранга матрицы.

[2] См. в п. 1 определение специального семейства матриц.

Прежде всего будет доказано, что ранг матрицы

$$\mathfrak{A}(\alpha')=\int\limits_{+}\begin{bmatrix}E\\ \vdots\\ \alpha_n^{s-1}E\end{bmatrix}A^{-1}(\alpha)\,(E,\ldots,\alpha_n^{s-1}E)\,d\alpha_n$$

во всякой ненулевой действительной точке α' равен $\frac{1}{2}ps$.

Действительно, пусть $V_+(\alpha', x_n)$ $(V_-(\alpha', x_n))$ есть матрица, столбцы которой (высотою p) суть независимые решения системы дифференциальных уравнений $A\left(\alpha', \frac{\partial}{\partial x_n}\right)u(x_n) = 0$, соответствующие α_n-корням характеристического уравнения, лежащим в верхней (нижней) полуплоскости. Если через $\int\limits_{-}$ обозначить интегрирование по простому пути, обходящему в положительном направлении корни уравнения $\det A(\alpha) = 0$, лежащие в нижней α_n-полуплоскости, то очевидно:

$$\int\limits_{\pm} e^{\alpha_n x_n}A^{-1}(\alpha)\,(E,\ldots,\alpha_n^{s-1}E)\,d\alpha_n = V_{\pm}(\alpha', x_n)\,D_{\pm}(\alpha') \tag{2,4}$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{\pm}\begin{bmatrix}E\\ \vdots\\ \alpha_n^{s-1}E\end{bmatrix}A^{-1}(\alpha)\,(E,\ldots,\alpha_n^{s-1}E)\,d\alpha_n = \begin{bmatrix}V_{\pm}(\alpha',0)\\ \vdots\\ V_{\pm}^{(s-1)}(\alpha',0)\end{bmatrix}D_{\pm}(\alpha'); \tag{2,5}$$

$V_{\pm}^{(k)}(\alpha', x_n) = \frac{\partial^k}{\partial x_n^{k-1}}V_{\pm}(\alpha', x_n)$. Таким образом, сложением формул, соответствующих значкам $+$ и $-$, получают

$$\int\begin{bmatrix}E\\ \vdots\\ \alpha_n^{s-1}E\end{bmatrix}A^{-1}(\alpha)\,(E_1\ldots,\alpha_n^{s-1}E)\,d\alpha_n = \begin{bmatrix}V_+(\alpha',0) & V_-(\alpha',0)\\ \vdots & \vdots\\ V_+^{(s-1)}(\alpha',0) & V_-^{(s-1)}(\alpha',0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_+(\alpha')\\ D_-(\alpha')\end{bmatrix};$$

интегрирование в левой части охватывает все α_n-корни уравнения $\det A(\alpha) = 0$. Непосредственным подсчетом легко убедиться, что матрица в левой части имеет ранг ps; это же имеет место, очевидно, и для первой матрицы правой части и, следовательно, также и для матрицы $\begin{bmatrix}D_+(\alpha')\\ D_-(\alpha')\end{bmatrix}$. Следовательно, ранги матриц $\begin{bmatrix}V_+(\alpha',0)\\ \cdots\cdots\\ V_+^{(s-1)}(\alpha',0)\end{bmatrix}$ и $D_+(\alpha')$ равны $\frac{1}{2}ps$ и ранг матрицы $\mathfrak{A}(\alpha')$ также оказывается равным $\frac{1}{2}ps$.

Пусть теперь $S(\alpha')$ есть матрица, аннулирующая справа матрицу

$$\int\limits_{+} B(\alpha)\,A^{-1}(\alpha)\,(E,\ldots,\alpha_n^{s-1}E)\,d\alpha_n.$$

Теперь будет доказано, что элементы матрицы

$$A^{-1}(\alpha)(E,\ldots,\alpha_n^{s-1}E)\,S(\alpha')$$

не имеют особенностей в верхней — α_n-полуплоскости.

Действительно, матрицу $B(\alpha)$ можно, очевидно, представить в виде $B(\alpha)=\tilde{B}(\alpha')\begin{bmatrix}E\\ \vdots\\ \alpha_n^{s-1}E\end{bmatrix}$; тогда из (2,5) следует:

$$\int_{+} B(\alpha)A^{-1}(\alpha)(E,\ldots,\alpha_n^{s-1}E)\,d\alpha_n =$$

$$=\tilde{B}(\alpha')\mathfrak{A}(\alpha')=\tilde{B}(\alpha')\begin{bmatrix}V_+(\alpha',0)\\ \vdots\\ V_-(\alpha',0)\end{bmatrix}D_+(\alpha');$$

по условию (2,1), ранг $\tilde{B}(\alpha')\begin{bmatrix}V_+(\alpha',0)\\ \cdots\cdots\\ V_+^{(s-1)}(\alpha',0)\end{bmatrix}$ равен $\frac{1}{2}ps$ и, следовательно, эта матрица обратима. Таким образом, $D_+(\alpha')S(\alpha')=0$ и на основании (2,4),

$$\int_{+} e^{\alpha_n x_n}A^{-1}(\alpha)(E,\ldots,\alpha_n^{s-1}E)S(\alpha')\,d\alpha_n=0,$$

что доказывает отсутствие в верхней α_n-полуплоскости особенностей у элементов матрицы $A^{-1}(\alpha)(E,\ldots,\alpha_n^{s-1}E)S(\alpha')$.

Из условия (2,1) следует, что матрица

$$\int_{+} B(\alpha)A^{-1}(\alpha)(E,\ldots,\alpha_n^{s-1}E)\,d\alpha_n$$

имеет правую обратную. Очевидно, можно для каждой действительной ненулевой точки α' правую обратную матрицу $R(\alpha')$ так подобрать, чтобы j-столбец этой матрицы — $R_j(\alpha')$ — состоял из функций аналитических в некотором конусном множестве (содержащем вместе с точкой α' всякую точку вида $\varrho\alpha'$, $\varrho>0$) и при том таких, что

$$(E,\ldots,\varrho^{s-1}\alpha_n^{s-1}E)R_j(\varrho\alpha')=\varrho^{s-s_j-1}(E,\ldots,\alpha_n^{s-1}E)R_j(\alpha').$$

Из сделанных замечаний следует, что совокупность матриц

$$A^{-1}(E,\ldots,\alpha_n^{s-1}E)R_j(\alpha')$$

образует специальное семейство индекса $s-s_j-1$; таким образом, неоднозначность в выборе $R(\alpha')$ не будет сказываться на дальнейших формулах.

Теперь будет доказано, что формулы

$$u(x)=\sum_{j=1}^{\frac{1}{2}ps}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots(n-1)\cdots\int g_j(x-y')f_j(y')\,dy', \tag{2,6}$$

$$g_j(x)=\int\cdots(n-2)\cdots\int\limits_{|\alpha'|=1} d_{\alpha'}T\int_{+}\Phi^{(s-s_j-1)}(x,\alpha)A^{-1}(\alpha)\times$$

$$\times(E,\ldots,\alpha_n^{s-1}E)R_j(\alpha')\,d\alpha_n$$

представляют решение задачи (2,2), (2,3); ($d_{\alpha'}T$ означает элемент площади поверхности сферы $|\alpha'|=1$).

Так как, по предположениям теоремы, $|f_j(x')| \leqslant \frac{c}{|x'|^{s_j+\varepsilon}}$, то интегралы в (2,6) сходятся при $x_n > 0$ и неограниченно дифференцируемы под знаком интеграла.

Так как, очевидно, $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) g_j(x-y')=0$, то формула (2,6) представляет решение уравнения (2,2).

Наконец, при $x_n > 0$,

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = \sum_{j=1}^{\frac{1}{2}ps} \int \ldots \underset{-\infty}{\overset{+\infty}{(n-1)}} \ldots \int B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) g_j(x-y') f_j(y')\, dy',$$

$$B_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) g_j(x) = \int \ldots \underset{|\alpha'|=1}{(n-2)} \ldots \int d_{\alpha'} T \int_{+} \Phi^{(s-s_j-1+s_k}(x, \alpha)\, B_k(\alpha)\, A^{-1}(\alpha) \times$$

$$\times (E, \ldots, \alpha_n^{s-1} E)\, R_j(\alpha')\, d\alpha_n$$

$$\left(k=1, \ldots, \frac{1}{2} ps\right).$$

Но по условию

$$\int_{+} B_k(\alpha)\, A^{-1}(\alpha)\, (E, \ldots, \alpha_n^{s-1} E)\, R_j(\alpha')\, d\alpha_n = \begin{cases} 1 & (j=k), \\ 0 & (j \neq k). \end{cases}$$

Из леммы 1,3 тогда непосредственно следует, что

$$\lim_{x_n \to +0} B_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = f_k(x') \qquad \left(k=1, \ldots, \frac{1}{2} ps\right).$$

Теорема доказана.

В частности, если $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — сильно эллиптическая матрица [2], то условие (2,1) выполняется для матрицы $B(\alpha) = \begin{bmatrix} E \\ \vdots \\ \alpha_n^{\frac{s}{2}-1} E \end{bmatrix}$, соответствующей задаче Дирихле.

Именно,

$$\det \int_{+} \begin{bmatrix} E \\ \vdots \\ \alpha_n^{\frac{s}{2}-1} E \end{bmatrix} A^{-1}(\alpha)\, (E, \ldots, \alpha_n^{\frac{s}{2}-1} E)\, d\alpha_n \neq 0.$$

Действительно, в противном случае можно подобрать ненулевой столбец $T(\alpha')$ такой, что

$$\int_{+} \begin{bmatrix} E \\ \vdots \\ \alpha_n^{\frac{s}{2}-1} E \end{bmatrix} A^{-1}(\alpha)\, (E, \ldots, \alpha_n^{\frac{s}{2}-1} E)\, d\alpha_n T(\alpha') = 0;$$

так как

$$\int_{+} \begin{bmatrix} E \\ \vdots \\ \alpha_n^{\frac{s}{2}-1} E \end{bmatrix} A^{-1}(\alpha)\, (E, \ldots, \alpha_n^{\frac{s}{2}-1} E)\, d\alpha_n =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{bmatrix} E \\ \vdots \\ \alpha_n^{\frac{s}{2}-1} E \end{bmatrix} A^{-1}(\alpha)\, (E, \ldots, \alpha_n^{\frac{s}{2}-1} E)\, d\alpha_n,$$

то $T(\alpha')$ можно полагать действительным столбцом; полагая

$$A^{-1}(\alpha)(E, \ldots, \alpha_n^{\frac{s}{2}-1}E)\,T(\alpha') = P(\alpha),$$

получают

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} P'(\alpha)\,A'(\alpha)\,P(\alpha)\,d\alpha_n = 0,$$

что невозможно по определению сильной эллиптичности.

В предположениях З. Я. Шапиро [1] $B(\alpha)$ — единичная матрица; элементы матрицы $A(\alpha)$ суть квадратичные формы, причем если $a(\alpha)$ есть столбец, составленный из алгебраических дополнений элементов какой-либо определенной строки матрицы $A(\alpha)$, и $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ суть α_n-корни уравнения $\det A(\alpha) = 0$, лежащие в верхней полуплоскости, то столбцы $a(\alpha', \lambda_1), \ldots, a(\alpha', \lambda_p)$ независимы над кольцом полиномов переменных $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$. Легко получается, что условие (2,1) выполняется в ослабленном виде: функциональный ранг рассматриваемой в (2,1) матрицы равен $\frac{1}{2}ps = p$.

3. Теперь будет рассмотрен более общий случай системы дифференциальных уравнений эллиптического типа с переменными коэффициентами.

Пусть $A(x, \alpha)$ есть квадратная матрица порядка p, элементы которой суть полиномы переменных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ $[\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)]$, формальной степени s, коэффициенты которых суть функции (действительной) точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$, определенные в некоторой области D. Будет предполагаться при этом, что каждый коэффициент при $\alpha_1^{k_1} \ldots \alpha_n^{k_n}$ степени $k_1 + \ldots + k_n$ непрерывно дифференцируем $\max\{k_1 + \ldots + k_n + t, 1\}$ раз в области D, а в случае $k_1 + \ldots + k_n = s$ даже $\max\{s + t, s + 1\}$ раз, где t — некоторое неотрицательное целое число.

Пусть

$$A(x,\alpha) = A_0(x,\alpha) + \ldots + A_s(x, \alpha), \tag{3,1}$$

где элементы матрицы $A_k(x, \alpha)$ суть формы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ степени $s - k$ $(k = 0, \ldots, s)$.

Пусть $y \in D$ и $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ произвольная действительная точка, $|\nu| = 1$. Будет предполагаться, что для каждой действительной ненулевой точки $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, $(\tau, \nu) = 0$, λ-корни уравнения $\det A_0(y, \tau + \lambda\nu) = 0$ поровну распределены в верхней и нижней λ-полуплоскостях.

Матрица $P(\alpha)$ будет называться специальной матрицей индекса K, соответствующей матрице $A_0(x, \alpha)$ и точкам y, ν, если (при прежних обозначениях) элементы матрицы $P(\tau + \lambda\nu)$ являются аналитическими функциями $\tau_1, \ldots, \tau_n$, λ для всякой действительной ненулевой точки $\tau_1(\tau, \nu) = 0$ и при $Im\lambda > 0$, кроме, может быть, λ-корней уравнения $\det A_0(y, \tau + \lambda\nu) = 0$; кроме того, $P(\varrho\alpha) = \varrho^{k-s}P(\alpha)$ при $\varrho > 0$.

Теорема 2. Пусть $P(\alpha)$ есть произвольная специальная матрица индекса m, $0 \leqslant m \leqslant s + t - 1$, соответствующая матрице $A_0(x, \alpha)$

и точкам $y \in D$ и ν, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_{+} \Phi^{(m+s)}(x, \tau+\lambda\nu) A_0(y, \tau+\lambda\nu) P(\tau+\lambda\nu)\, d\lambda = 0$$

для всякой действительной ненулевой точки $\tau_1(\tau, \nu)=0$, $(x, \nu)>0$.

Для всякой ограниченной области D_0, такой, что $\overline{D_0} \subset D$ и $(x-y, \nu)>0$, при $x \in D_0$ можно подобрать такие специальные матрицы $P_k(\alpha)$ $(0 \leqslant k < m)$ и такую функциональную матрицу $u_0(x)$, имеющую в D_0 непрерывные производные до порядка $s-1$ включительно, элементы которых по модулю не превышают $c|x-y|^{2-n}(|\lg|x-y||+1)$, что матрица

$$g(x) = \int\limits_{\substack{|\tau|=1 \\ (\tau, \nu)=0}} \ldots (n-2) \ldots \int d_\tau T \int\limits_{+} \Big\{ \Phi^{(m)}(x-y, \tau+\lambda\nu) P(\tau+\lambda\nu) +$$

$$+ \sum_{0<k<m} \Phi^{(k)}(x-y, \tau+\lambda\nu) P_k(\tau+\lambda\nu) \Big\} d\lambda + u_0(\alpha)$$

$d_\tau T$ — элемент площади поверхности действительной сферы $|\tau| = 1$, $(\tau, \nu)=0)$ удовлетворяет в D_0 условию

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) g(x) = 0.$$

Доказательство. Прежде всего будут доказаны некоторые вспомогательные предложения. Не ограничивая общности, можно положить $y=0$, $\nu=(0, \ldots, 0,1)$. Пусть теперь $Q(\alpha)$ специальная матрица, соответствующая матрице $A_0(0, \alpha)$ индекса $s+1-n$ (может быть, отрицательного); тогда

$$\int\limits_{|\alpha'|=1} \ldots (n-2) \ldots \int d_{\alpha'} T \int\limits_{+} \frac{\partial}{\partial \alpha_k} Q(\alpha)\, d\alpha_n = 0 \ (k=1, \ldots, n;\ \alpha'=(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}). \quad (3,4)$$

Справедливость этого утверждения при $k=n$ очевидна. Пусть теперь $k<n$; так как при $\varrho>0$ $Q(\varrho\alpha)=\varrho^{1-n} Q(\alpha)$, то

$$\sum_{l=1}^{n} \alpha_l \frac{\partial}{\partial x_l} Q(\alpha) = (1-n)\, Q(\alpha).$$

Используя это соотношение, легко проверить, что внешний дифференциал внешней матричной формы

$$\omega = Q \sum_{1<j<k} (-1)^{j+k-1} \alpha_j \frac{d\alpha_1 \ldots d\alpha_n}{d\alpha_j d\alpha_k} + Q \sum_{k<j \leqslant n} (-1)^{j+k} \alpha_j \frac{d\alpha_1 \ldots d\alpha_n}{d\alpha_k d\alpha_j}$$

равен

$$d\omega = \frac{\partial Q}{\partial \alpha_k} \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j-1} \alpha_j \frac{d\alpha_1 \ldots d\alpha_n}{d\alpha_j} d\alpha_n + (-1)^{n-1} \alpha_n \frac{\partial Q}{\partial \alpha_k} d\alpha_1 \ldots d\alpha_{n-1}$$

и так как $d\alpha_1 \ldots d\alpha_{n-1} = 0$ на поверхности $|\alpha'| = 1$, то

$$\int_{|\alpha'|=1} \ldots (n-2) \ldots \int d_{\alpha'} T \int_{+} \frac{\partial}{\partial \alpha_k} Q(\alpha)\, d\alpha_n =$$

$$= \int_{|\alpha'|=1} \ldots (n-2) \ldots \int \sum_{j=1}^{n-1}{}' (-1)^{j-1} \alpha_j \frac{d\alpha_1 \ldots d\alpha_{n-1}}{d\alpha_j} \times$$

$$\times \int_{+} \frac{\partial}{\partial \alpha_k} Q(\alpha)\, d\alpha_n = \int_{|\alpha'|=1} \ldots (n-2) \ldots \int \int_{+} d\omega = 0.$$

Пусть теперь $Q(\alpha)$ есть специальная матрица индекса $l \geqslant 0$. Тогда, если $j_1, \ldots, j_n, k_1, \ldots, k_n$ — неотрицательные целые числа, такие, что $l + k_1 + \ldots + k_n - j_1 - \ldots - j_n > s - n$, то при $x_n > 0$

$$x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n} \frac{\partial^{k_1 + \ldots + k_n}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \int_{|\alpha'|=1} \ldots (n-2) \ldots \int d_{\alpha'} T \int_{+} \Phi^{(l)}(x, \alpha)\, \mathbf{Q}(\alpha)\, d\alpha_n =$$

$$= \int_{|\alpha'|=1} \ldots (n-2) \ldots \int d_{\alpha'} T \int_{+} x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n} \alpha_1^{k_1} \ldots \alpha_n^{k_n} \Phi^{(l+k_1+\ldots+k_n)}(x, \alpha)\, Q(\alpha)\, d\alpha_n =$$

$$= \int_{|\alpha'|=1} \ldots (n-2) \ldots \int d_{\alpha'} T \times$$

$$\times \int_{+} \left\{ \frac{\partial^{j_1 + \ldots + j_n}}{\partial \alpha_1^{j_1} \ldots \partial \alpha_n^{j_n}} \Phi^{(l+k_1+\ldots+k_n-j_1-\ldots-j_n)}(x, \alpha) \right\} \alpha_1^{k_1} \ldots \alpha_n^{k_n} Q(\alpha) \times$$

$$\times\, d\alpha_n = (-1)^{j_1+\ldots+j_n} \int_{|\alpha'|=1} \ldots (n-2) \ldots \int d_{\alpha'} T \times$$

$$\times \int_{+} \Phi^{(l+k_1+\ldots+k_n-j_1-\ldots-j_n)}(x, \alpha) \frac{\partial^{j_1 + \ldots + j_n}}{\partial \alpha_1^{j_1} \ldots \partial \alpha_n^{j_n}} \{\alpha_1^{k_1} \ldots \alpha_n^{k_n} Q(\alpha)\}\, d\alpha_n;$$

действительно, для этого достаточно произвести интегрирование по частям, возможное на основании (3,4).

Пусть теперь операторная матрица $L\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ имеет вид

$$\sum_{k_1 + \ldots + k_n - j_1 - \ldots - j_n = q} L_{j_1 \ldots j_n}^{k_1 \ldots k_n} x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n} \frac{\partial^{k_1 + \ldots + k_n}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}},$$

q — произвольно заданное целое число („вес однородной матрицы" L), $L_{j_1 \ldots j_n}$ — постоянные матрицы. Пусть $\tilde{L}\left(\alpha, \dfrac{\partial}{\partial \alpha}\right)$ обозначает операторную матрицу, определяемую формулой

$$\tilde{L}\left(\alpha, \frac{\partial}{\partial \alpha}\right) v = \sum_{k_1 + \ldots + k_n - j_1 - \ldots - j_n = q} (-1)^{j_1 + \ldots + j_n} \frac{\partial^{j_1 + \ldots + j_n}}{\partial \alpha_1^{j_1} \ldots \partial \alpha_n^{j_n}} \{\alpha_1^{k_1} \ldots \alpha_n^{k_n} L_{j_1 \ldots j_n}^{k_1 \ldots k_n} v\};$$

тогда по предыдущему, если $Q(\alpha)$ есть специальная матрица индекса $l > s-n-q, -1$ то

$$L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \int \cdots (n-2) \cdots \int\limits_{|\alpha'|=1} d_{\alpha'} T \int\limits_{+} \Phi^{(l)}(x, \alpha)\, Q(\alpha)\, d\alpha_n =$$

$$= \int \cdots (n-2) \cdots \int\limits_{|\alpha'|=1} d_{\alpha'} T \int\limits_{+} \Phi^{(q+l)}(x, \alpha)\, \tilde{L}\left(\alpha, \frac{\partial}{\partial \alpha}\right) Q(\alpha)\, d\alpha_n. \tag{3,5}$$

Операторная матрица $L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ вида

$$\sum_{k_1+\ldots+k_n>q} |x|^{k_1+\ldots+k_n-q} L_{k_1\ldots k_n}(x) \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}} +$$

$$+ \sum_{l_1+\ldots+l_n\leqslant q} L_{l_1\ldots l_n}(x) \frac{\partial^{l_1+\ldots+l_n}}{\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_n^{l_n}},$$

где $L_{k_1\ldots k_n}(x)$, $L_{l_1\ldots l_n}(x)$ суть матрицы, элементы которых являются непрерывными и ограниченными функциями x в $\bar{D}_0$ при $x \neq 0$, будет для краткости также называться неоднородной матрицей веса q.

Если теперь $Q(\alpha)$ есть специальная матрица индекса l и $L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — операторная матрица веса $q \leqslant s-l-1$, то модули элементов матрицы

$$L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \int \cdots (n-2) \cdots \int\limits_{|\alpha'|=1} d_{\alpha'} T \int\limits_{+} \Phi^{(l)}(x, \alpha)\, Q(\alpha)\, d\alpha_n$$

не превышают в D_0 величины $\frac{c}{|x|^{n-1}}$, где c — некоторая постоянная. Справедливость этого замечания непосредственно следует из элементарных оценок для $\Phi(x, \alpha)$, $\Phi'(x, \alpha), \ldots$

Основываясь на этих предварительных замечаниях, теперь легко провести доказательство теоремы 2.

В разложении (3,1) матрицы $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ производится дальнейшее (маклореновское) разложение

$$A_k\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{l=0}^{s+t-k} A_{kl}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Здесь $A_{kl}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ есть операторная матрица веса $s-k-l$ притом однородная, если $k+l > s+t$ $(k=0, \ldots, s;\ l=0, \ldots, s-k+t)$.

Таким образом, получается разложение вида

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{q=-t}^{s} L_q\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right), \tag{3,6}$$

где $L_q\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ есть операторная матрица веса q, однородная при $q > -t$; очевидно, $L_s\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = A_0\left(0, \frac{\partial}{\partial x}\right)$.

Пусть $P_k(\alpha)$ обозначает произвольную специальную матрицу индекса k. Из формул (3,5), (3,6) и элементарных оценок, проведенных ранее, непосредственно следует:

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\int\limits_{|\alpha'|=1}\ldots(n-2)\ldots\int d_{\alpha'}T\int\limits_{+}\sum_{k=0}^{m}\Phi^{(k)}(x, \alpha)P_k(\alpha)\,d\alpha_n=$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\int\limits_{|\alpha'|=1}\ldots(n-2)\ldots\int d_{\alpha'}T\int\limits_{+}\sum_{q=s-k}^{s}L_q\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi^{(k)}(x, \alpha)P_k(\alpha)\,d\alpha_n+$$

$$+\sum_{k=0}^{m}\int\limits_{|\alpha'|=1}\ldots(n-2)\ldots\int d_{\alpha'}T\int\limits_{+}\sum_{q=-t}^{s-1-k}L_q\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi^{(k)}(x, \alpha)P_k(\alpha)\,d\alpha_n=$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\int\limits_{|\alpha'|=1}\ldots(n-2)\ldots\int d_{\alpha'}T\int\limits_{+}\sum_{q=s-k}^{s}\Phi^{(k+q)}(x, \alpha)\tilde{L}_q\left(\alpha, \frac{\partial}{\partial \alpha}\right)P_k(\alpha)\,d\alpha_n+v(x); \tag{3,7}$$

элементы матрицы $v(x)$ непрерывны и дифференцируемы и по модулю не превышают $\frac{c}{|x|^{n-1}}$ в D_0. Так как

$$L_s\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)=A_0\left(0, \frac{\partial}{\partial x}\right), \text{ то } \tilde{L}_s\left(\alpha, \frac{\partial}{\partial \alpha}\right)=A_0(0, \alpha);$$

следовательно, если матрица $P_m(\alpha)=P(\alpha)$ удовлетворяет условию (3,2), то

$$\int\limits_{+}\Phi^{(m+s)}(x, \alpha)\tilde{L}_s\left(\alpha, \frac{\partial}{\partial \alpha}\right)P_m(\alpha)\,d\alpha_n=0.$$

Теперь будет показана возможность подбора по заданной матрице $P_m(\alpha)=P(\alpha)$ [при выполнении условия (3,2)] матриц $P_k(\alpha)$ $(k<m)$ так, чтобы интегральный член в правой части формулы (3,7) оказался равным нулю; при $m=0$ это очевидно.

Пусть теперь $m>0$; тогда достаточно положить

$$\sum_{q=j-m}^{s}\tilde{L}_q\left(\alpha, \frac{\partial}{\partial \alpha}\right)P_{j-q}(\alpha)=0 \qquad (j=s, \ldots, s+m-1). \tag{3,8}$$

Так как $\tilde{L}_s\left(\alpha, \frac{\partial}{\partial \alpha}\right)=A_0(0, \alpha)$ есть обратимая матрица, то из (3,8) можно последовательно определить $P_{m-1}(\alpha), \ldots, P_0(\alpha)$.

Пусть далее $\varphi(x, y)$ есть фундаментальная матрица, соответствующая матрице $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$; существование такой матрицы обеспечено сделанными предположениями. Тогда матрица

$$u_0(x)=-\int\limits_{D_0}\ldots(n)\ldots\int\varphi(x, y)v(y)\,dy \tag{3,9}$$

непрерывно дифференцируема в D_0 s раз, причем j-производная элементов этой матрицы $(j<s)$ обладает оценкой вида $c\,|x|^{s-n-j}$

$(j > s-n)$ или $c(|\lg|x||+1)$ $(j = s-n)$, или $c(j < s-n)$ и удовлетворяет в D_0 условию

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u_0(x) = -v(x)\,[1].$$

Если $P_k(u)$ $(0 \leqslant k < m)$ определено формулами (3,8), $u_0(x)$ — формулой (3,9), то, как показывает (3,7), выражение (3,3) удовлетворяет всем условиям теоремы. Теорема доказана.

Теперь будет доказано несколько лемм, подготовительных к основной теореме.

Пусть V есть конечная выпуклая область n-мерного пространства, ограниченная поверхностью Ляпунова S.

$\nu(z)$ будет обозначать единичный вектор внутренней нормали к S в точке z, $K(z)$ — круглый острый конус с вершиной в z и осью, направленной по $\nu(z)$.

Лемма 3,1. Пусть матрица $H(\nu, y)$ $(\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n))$ определена и непрерывна при $y \in S$, $|\nu| = 1$, $(\nu, \nu(y)) \geqslant 0$; $h(x, y)$ есть расстояние от точки x до касательной к S-плоскости в точке y. Пусть

$$J(x) = \int_S \ldots (n-1) \ldots \int \frac{h(x, y)}{|x-y|^n} H\left(\frac{x-y}{|x-y|}, y\right) d_y S,$$

тогда $J(x)$ определено при $x \in V \cup S$, причем при приближении точки $x \in V$ к точке $z \in S$ по любому некасательному к S пути.

$$\lim_{x \to z} J(x) = \int_{T(z)} \ldots (n-1) \ldots \int \frac{1}{(|t|^2+1)^{\frac{n}{2}}} H\left(\frac{\tau + \nu(z)}{|\tau + \nu(z)|}, z\right) d_t T + J(z)$$

(формула „скачка“); здесь $T(z)$ — касательная в точке z плоскость к S; точка $z + \tau$ пробегает $T(z)$.

При этом в каждом конусе $K(z)$ предельный переход равномерен относительно $\dfrac{x-z}{|x-z|}$.

Доказательство. По условию достаточно малая окрестность (на S) точки z однозначно проектируется на касательную в z плоскость; пусть S_a такая окрестность, проекцией которой является шар T_a с центром z и радиусом a.

Выбирая начало ортогональной системы координат в z, n — ось по $\nu(z)$, можно уравнение куска S_a представить в виде $y_n = \varphi(y')$, $y' = (y_1, \ldots, y_{n-1})$, $|y'| < a$; по условию, $\varphi(y')$ — непрерывно дифференцируемая в T_a функция, производные которой удовлетворяют условию Гельдера с некоторым показателем $\varkappa$, равная вместе с производными нулю в начале.

Если $y \in S_a$, $x \in V \cup S$, то очевидно

$$h(x, y) = \frac{x_n - \varphi - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{\partial \psi}{\partial y_k}(x_k - y_k)}{\sqrt{1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(\dfrac{\partial \psi}{\partial y_k}\right)^2}}.$$

[1] Доказательство этих утверждений см. в [3].

Из этой формулы непосредственно следует сходимость интеграла $J(x)$ при $x \in S$. Пусть теперь $x \in K(z) \cap V$ и $\gamma(<\pi)$ угол при вершине конуса $K(z)$; очевидно, при достаточно малом a, $\frac{|x-y|}{|x-y'|}$ ($y \in S_a$, $y' \in T_a$) может быть сделано произвольно близким к единице. Далее, при $|x'|<a$,

$$\frac{\varphi(y')-\varphi(x')+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}(x_k-y_k)}{\sqrt{1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}\right)^2}} \leqslant c\,|x'-y'|^{1+\varkappa},$$

где c — некоторая постоянная. Следует отметить, наконец, что если $f(y')$ — некоторая ограниченная функция в T_a,

$$\left|\int_{T_a}\ldots(n-1)\ldots\int \frac{x_n-\varphi(x')}{|x-y'|^n} f(y')\,dy'\right| \leqslant c_1\left|1-\frac{\varphi(x)}{x_n}\right| \sup_{y'\in T_a}|f(y')|, \tag{3,10}$$

где постоянная c_1 не зависит от a, $\varphi(x')$ и $f(y')$.

Эти замечания позволяют утверждать, что элементы матриц

$$\int_{S_a}\ldots(n-1)\ldots\int \frac{h(x,y)}{|x-y|^n} H\left(\frac{x-y}{|x-y|},\ y\right) d_yS$$

и

$$\int_{T_a}\ldots(n-1)\ldots\int \frac{x_n-\varphi(x')}{|x-y'|^n} H\left(\frac{x-y'}{|x-y'|},\ 0\right) dy',$$

могут быть сделаны произвольно близкими при $x \in K(z) \cap V$, $x' \in T_a$ и достаточно малом a.

Пусть теперь T_{a,x_n} есть круг радиуса $\frac{a}{x_n}$ с центром в точке $\frac{x'}{x_n}$; последняя матрица приводится тогда к виду

$$\frac{x_n-\varphi(x')}{x_n}\int_{T_{a,x_n}}\ldots(n-1)\ldots\int \frac{1}{(|\tau|^2+1)^{\frac{n}{2}}} H\left(\frac{\tau+\nu(0)}{|\tau+\nu(0)|},\ 0\right) d_\tau T.$$

Замечая, что $\left|\frac{x'}{x_n}\right|<\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, $\frac{\varphi(x')}{|x'|^{1+\varkappa}}$ ограничено, убеждаемся что при достаточно малом $|x|$ эта матрица может быть сделана как угодно близкой к матрице

$$\int_{T(0)}\ldots(n-1)\ldots\int \frac{1}{(|\tau|^2+1)^{\frac{n}{2}}} H\left(\frac{\tau+\nu(0)}{|\tau+\nu(0)|},\ 0\right) d_\tau T.$$

Из сделанных замечаний непосредственно следует справедливость леммы.

Как известно, если $H(x, y)$ определена и непрерывна при $x \in V \cup S$, $y \in S$, $x \neq y$ и ограничена, то при $k<n-1$ интеграл

$$\int_S\ldots(n-1)\ldots\int \frac{1}{(x-y)^k} H(x,y)\,d_yS$$

представляет непрерывную матрицу при $x \in V \cup S$.

В дальнейшем понадобится рассмотрение пределов интегралов, подобных $J(x)$ предыдущей леммы, однако с более высокой особенностью ядра. Следующие определения и леммы, формулируемые при весьма специальных предположениях, позволят упростить доказательство основной теоремы.

Пусть S — поверхность, ограничивающая конечную выпуклую n-мерную область V, удовлетворяющая условиям Ляпунова; пусть, кроме того, параметрические невырождающиеся уравнения отдельных частей поверхности представимы m раз $(m \geqslant 1)$ непрерывно дифференцируемыми функциями параметров: поверхность S будет называться m-кратно гладкой.

Функциональная матрица $F(x, \nu, z)$ будет называться матрицей, обладающей k-свойством (k — целое число, $m+n-2 \geqslant k$), если выполняются следующие условия:

1) $F(x, \nu, z)$ определена и непрерывна при действительных значениях $x=(x_1, \ldots, x_n)$, $\nu=(\nu_1, \ldots, \nu_n)$, $z=(z_1, \ldots, z_n)$, таких, что

$$x \neq 0, \quad \nu \neq 0, \quad (x, \nu) \geqslant 0, \quad z \in S, \quad |\nu-\nu(z)|$$

достаточно мало.

2) Модули элементов матрицы $F(x, \nu, z)$ (при $k<0$) или матрицы $\frac{1}{|\lg|x'||+1} F(x, \nu, z)$ (при $k=0$), или матрицы $|x|^k F(x, \nu, z)$ (при $k>0$) ограничены.

3) Элементы матрицы $F(x, \nu, z)$ неограниченно дифференцируемы по $x_1, \ldots, x_n$, причем j-производная обладает $(k+j)$-свойством.

4) Пусть $\Delta_\nu(1)$ обозначает $(n-1)$-мерный оператор Лапласа, определенный в плоскости ортогональной ν и действующий по точке x; для всякого целого числа q $\left(0 \leqslant q \leqslant \frac{k-n+3}{2}\right)$ можно определить матрицу $F^{(q)}(x, \nu, z)$, обладающую $(k-2q)$-свойством и удовлетворяющую соотношению

$$\Delta_\nu^q(1) F^{(q)}(x, \nu, z)=F(x, \nu, z).$$

5) $F(x, \nu, z)$ дифференцируема по ν и z (по последней точке — вдоль по S, в местной системе координат) $\max\{0, k-n+2\}$-раз, и эти производные также обладают k-свойством (с заменой условия $z \in S$ на $z \in S_1$, где S_1 — часть S, охватываемая локальными координатами; кроме того, предполагается уменьшающимся соответственно порядок возможных дальнейших дифференцирований по ν, z). Пусть $g(z, y)$ есть функциональная матрица, определенная и непрерывная при $z, y \in S$ $(z \neq y)$, непрерывно дифференцируемая по z (вдоль по S) r раз, $r \leqslant m$, элементы которой и элементы производных (последние — локально) не превышают по модулю $c|z-y|^{2-n}(|\lg|z-y||+1)$, где c — некоторая постоянная.

При сделанных предположениях рассматривается интегральная матрица

$$J(x, y)=\int_S \ldots (n-1) \ldots \int F(x-z, \nu(z), z) g(z, y)\, d_z S$$

($x \in V$, $y \in S$; $\nu(z)$ — единичный вектор внутренней нормали к S в точке z).

Лемма 3,2. Если $k-n+2 \leqslant r$, то для любой точки $x_0 \in S$, $x_0 \neq y$ при предельном переходе $x \to x_0$ по любому некасательному пути существует $\lim\limits_{x \to x_0} J(x, y)$; при этом элементы предельной матрицы $J_+(x_0, y)$ непрерывны при $x \neq y$, по модулю не превосходят $\frac{c}{|x_0-y|^{n-2}}$ и для любой непрерывной матрицы $f(y)$, $y \in S$

$$\lim_{x \to x_0} \int \ldots (n-1) \ldots \int_S J(x, y) f(y) \, d_y S =$$

$$= \int \ldots (n-1) \ldots \int_S J_+(x_0, y) f(y) \, d_y S.$$

Лемма 3,3. Заключение леммы 3,2 остается справедливым также и при $k-n+1=r$, если только матрица допускает представление

$$F(x, \nu, z) = \Delta_\nu^q(1) F^{(q)}(x, \nu, z) \qquad \left(q = \left[\frac{k-n}{2}\right] + 1\right),$$

причем выполняется еще следующее условие.

При $k-n$ нечетном

$$F^{(q)}(x-z, \nu(z), z) = \frac{(x-z, \nu(z))}{|x-z|^n} H\left(\frac{x-z}{|x-z|}, z\right),$$

где $H\left(\frac{x-z}{|x-z|}, z\right)$ — ограниченная матрица при $x \in V$, $z \in S$.

В случае, если $k-n$ есть четное число, то это условие предполагается выполняющимся для производной $F^{(q)}(x, \nu, z)$ (по точке x) по всякому направлению, ортогональному ν.

Доказательство. В случае, если $k \leqslant n-2$, справедливость леммы 3,2 очевидна. Теперь будет доказана справедливость леммы 3,3 при $k=n-1$. Пусть $\omega(r)$ — непрерывная функция, определенная условиями; $|\omega(r)| \leqslant 1$,

$$\omega(r) = \begin{cases} 1 & \left(r \leqslant \frac{1}{4}\right) \\ 0 & \left(r \geqslant \frac{1}{2}\right); \end{cases}$$

$$g_1(z, y, x_0) = \omega\left(\frac{|z-y|}{|x_0-y|}\right) g(z, y), \quad g_2(z, y, x_0) = g(z, y) - g_1(z, y, x_0).$$

Тогда для интеграла

$$\int \ldots (n-1) \ldots \int_S F(x-z, \nu(z), z) \, g_2(z, y, x_0) \, d_z S$$

возможен предельный переход $x \to x_0 (\neq y)$ под знаком интеграла, а к интегралу

$$\int \ldots (n-1) \ldots \int_S F(x-z, \nu(z), z) g_2(z, y, x_0) d_z S$$

применима лемма 3,1. Таким образом, из (3,10) легко получается

$$J_+(x_0, y) = R(x_0) g(x_0, y) +$$

$$+ \int \ldots (n-1) \ldots \int_S F(x_0 - z, \nu(z), z) g(z, y) d_z S,$$

$$R(x_0) = \int \ldots (n-1) \ldots \int_{T(x_0)} \frac{1}{(|\tau|^2+1)^{\frac{n}{2}}} H\left(\frac{\tau+\nu(x_0)}{|\tau+\nu(x_0)|}, x_0\right) d_\tau T,$$

$$(\tau + x_0 \in T(x_0)).$$

Оценка элементов $J_+(x_0, y)$ вида $\frac{c}{|x_0 - y|^{n-2}}(|\lg|x_0 - y| + 1)$ очевидна. Пусть теперь $f(y)$ — произвольная непрерывная матрица, определенная при $y \in S$. Тогда, полагая

$$g_1(z) = \int \ldots (n-1) \ldots \int_S g(z, y) f(y) d_y S,$$

замечают по предыдущему, что

$$\lim_{x \to x_0} \int \ldots (n-1) \ldots \int_S J(x, y) f(y) d_y S =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \int \ldots (n-1) \ldots \int_S F(x-z, \nu(z), z) g_1(z) d_z S =$$

$$= R(x_0) g_1(x_0) + \int \ldots (n-1) \ldots \int_S F(x_0 - z, \nu(z), z) g_1(z) d_z S =$$

$$= \int \ldots (n-1) \ldots \int_S J_+(x_0, y) f(y) d_y S.$$

Пусть теперь $k \geqslant n-1$ (в случае леммы 3,2) или $k \geqslant n$ (в случае леммы 3,3). Пусть S_a — окрестность точки x_0 на поверхности S, проектирующаяся на шар T_a радиуса a в касательной плоскости (в точке x_0); радиус a можно полагать независимым от точки x_0.

Очевидно,

$$\int \ldots (n-1) \ldots \int_{S-S_a} F(x-z, \nu(z), z) g(z, y) d_z S$$

ограничено при x, достаточно близком к x_0; в этом интервале возможен предельный переход $x \to x_0$ под знаком интеграла. Таким образом, достаточно доказать справедливость утверждений леммы для интеграла

$$J_a(x, y) = \int \ldots (n-1) \ldots \int_{S_a} F(z-z, \nu(z), z) g(z, y) d_z S.$$

Выбирая по-прежнему начало ортогональной системы координат в точке x_0 и направляя n-ось по $\nu(z_0)$, уравнение части S_a можно представить в виде $z_n=\varphi(z')$, $z'=(z_1,\ldots, z_{n-1})$, где $\varphi(z')$ — m-кратно непрерывно дифференцируема в T_a. Для этой системы координат будут использованы обозначения [1] $F(x, \nu, z)=F(x, \nu, z')$,

$$\frac{\partial}{\partial x_k}F(x, \nu, z)=\partial_k(1)\,F(x, \nu, z'),\ \frac{\partial}{\partial \nu_k}F(x, \nu, z')=\partial_k(2)\,F(x, \nu, z'),$$

$$\frac{\partial}{\partial z_k}F(x, \nu, z')=\partial_k(3)\,F(x, \nu, z').$$

Пусть $F(x, \nu, z')=\Delta\nu(1)\ F^{(1)}(x, \nu, z')$ ($\Delta_\nu(1)$ по-предыдущему — $(n-1)$-мерный оператор Лапласа, действующий в плоскости ортогональной ν, по точке x); если $\nu=\nu(z)$, $z\in S_a$, то очевидно

$$\Delta_{\nu(z)}(1)=\partial_1^2(1)+\cdots+\partial_{n-1}^2(1)+\partial_n^2(1)-\sum_{k,\,l=1}^{n}\nu_k(z)\,\nu_l(z)\,\partial_k(1)\,\partial_l(1),$$

$\nu(z)=(\nu_1(z),\ldots,\nu_n(z))$, или

$$\Delta_{\nu(z)}(1)=\partial_1^2(1)+\cdots+\partial_{n-1}^2(1)-\sum_{k,\,l=1}^{n-1}\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial z_k}\dfrac{\partial\varphi}{\partial z_c}}{1+\sum\limits_{i=1}^{n-1}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z_j}\right)^2}\partial_k(1)\,\partial_c(1)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial z_k}}{1+\sum\limits_{j=1}^{n-1}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z_j}\right)^2}\partial_k(1)\,\partial_n(1)+\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n-1}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z_k}\right)^2}{1+\sum\limits_{j=1}^{n-1}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z_k}\right)^2}\partial_n^2(1). \tag{3,11}$$

С другой стороны, при $1\leqslant j\leqslant n-1$, $z\in S_a$

$$\partial_j(1)\,F(x-z, \nu(z), z')=-\frac{\partial}{\partial z_j}F(x-z, \nu(z), z')-\frac{\partial\varphi}{\partial z_j}\partial_n(1)\,F(x-z, \nu(z), z')+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_j}\left\{\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial z_k}}{\sqrt{1+\sum\limits_{l=1}^{n-1}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z_l}\right)^2}}\right\}\partial_k(2)\,F(x-z, \nu(z), z')+\partial_j(3)\,F(x-z, \nu(z), z'). \tag{3,12}$$

Для краткости, если $\psi(z')$ есть непрерывная и l раз непрерывно дифференцируемая в T_a функция, допускающая для каждой j-производной оценку $c\,|z'|^{l-j}$ $(l\geqslant 0)$, $F_1(x, \nu, z')$ — какая-либо матрица, обладающая j-свойством, то матрице $\psi(z')\,F_1(x-z, \nu(z), z')$ $(z\in S_a,\ x\in U)$ будет приписываться вес $j-l$ в начале.

Тогда из формул (3,11), (3,12) получают

$$F(x-z, \nu(z), z')=\Delta_{\nu(z)}(1)\,F^{(1)}(x-z, \nu(z), z')=$$

$$=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial z_j^2}F^{(1)}(x-z, \nu(z), z')+\cdots \tag{3,13}$$

[1] Здесь сохранено прежнее функциональное обозначение, не учитывающее переноса начала координат при переходе к рассматриваемой системе координат; это не существенно для дальнейшего, так как будет рассматриваться матрица $F(x-z, \nu(z), z)$.

Здесь пропущены члены веса, меньшего k ($F(x-z, \nu(z), z')$ имеет вес k). Таким же образом получается представление вида

$$F(x-z, \nu(z), z') =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial z_1}\delta_1(1)F^{(1)}(x-z, \nu(z), z') - \cdots - \frac{\partial}{\partial z_{n-1}}\delta^{(1)}_{n-1}F^{(1)}(x-z, \nu(z), z') - \cdots \tag{3,14}$$

Здесь $\delta_k(1)$ обозначает дифференцирование $F^{(1)}(x-z, \nu(z), z')$ по первой точке по направлению, полученному параллельным перемещением на S k-оси по геодезической кривой из 0 в z (при достаточно малом a такое перемещение определено однозначно); при этом снова пропущены члены меньшего веса.

Формулам (3,13), (3,14) соответствуют следующие интегральные соотношения, легко получаемые интегрированием по частям:

$$\int\limits_{S_a}\ldots(n-1)\ldots\int F(x-z, \nu(z), z')g(z, y)\,d_zS =$$

$$= \int\limits_{T_a}\ldots(n-1)\ldots\int F^{(1)}(x-z, \nu(z), z')\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial z_j^2}g(z', y)\,d_{z'}T +$$

$$+ \int\limits_{C_a}\ldots(n-2)\ldots\int\sum_{j=1}^{n-1}\frac{z_j}{|z'|}\left\{\frac{\partial}{\partial z_j}F^{(1)}(x-z, \nu(z), z')\cdot g(z', y) -\right.$$

$$\left.- F^{(1)}(x-z, \nu(z), z')\frac{\partial}{\partial z_j}g(z', y)\right\}d_{z'}C + \int\limits_{T_a}\ldots(n-1)\ldots\int\{\ldots\}\,d_{z'}T; \tag{3,15}$$

в последнем интеграле многоточия обозначают слагаемые меньшего, чем k, веса; C_a есть граница шара T_a. Таким же образом

$$\int\limits_{S_a}\ldots(n-1)\ldots\int F(x-z, \nu(z), z')g(z, y)\,d_zS =$$

$$= \int\limits_{T_a}\ldots(n-1)\ldots\int\sum_{j=1}^{n-1}\delta_j(1)F^{(1)}(x-z, \nu(z), z')\frac{\partial}{\partial z_j}g(z', y)\,d_{z'}T -$$

$$- \int\limits_{C_a}\ldots(n-2)\ldots\int\sum_{j=1}^{n-1}\frac{z_j}{|z'|}\delta_j(1)F^{(1)}(x-z, \nu(z), z')g(z', y)\,d_{z'}C +$$

$$+ \int\limits_{T_a}\ldots(n-1)\ldots\int\{\ldots\}\,d_{z'}T. \tag{3,16}$$

Пользуясь формулой (3,15) при $k \geqslant n$ в случае леммы 3,2 и при $k \geqslant n+1$ — в случае леммы 3,3, а также формулой (3,16) при $k = n-1$ в случае леммы 3,2 и при $k = n$ — в случае леммы 3,3, индукцией по весу легко проверить справедливость всех утверждений лемм 3,2 и 3,3 [1]. Леммы доказаны.

[1] Предположения о гладкости S, $F(x, \nu, z)$ и $g(z, y)$ обеспечивают возможность необходимых интегрирований по частям.

обства здесь будут повторены некоторые прежние опре-

рассматриваться система уравнений эллиптического типа вида

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x)=0; \tag{3,17}$$

n будет обозначать количество аргументов, p — порядок квадратной матрицы $A(x, \alpha)$, s — максимальную степень элементов этой матрицы относительно $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Коэффициенты элементов этой матрицы при $\alpha_1^{k_1} \ldots \alpha_n^{k_n}$ предполагаются непрерывно дифференцируемыми $\max\{k_1 + \ldots + k_n, 1\}$ раз комплексно-значными функциями в действительной области D; коэффициенты при членах степени s предполагаются непрерывно дифференцируемыми $s+1$ раз. Пусть $A_0(x, \alpha)$ — матрица, составленная из членов $A(x, \alpha)$ степени s. Предполагается, что для каждого $x \in D$ и произвольных ненулевых действительных n-мерных точек τ, ν, $(\tau, \nu)=0$ уравнение

$$\det A_0(x, \tau+\lambda\nu)=0$$

имеет только недействительные λ-корни, поровну распределенные в верхней и нижней λ-полуплоскостях.

Пусть V — конечная выпуклая область, ограниченная поверхностью S, удовлетворяющей условиям Ляпунова; $V \cup S \subset D$.

Пусть $B\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — операторная матрица, содержащая $\frac{1}{2} ps$ строк и p столбцов. Коэффициенты этой матрицы предполагаются непрерывными функциями x, определенными на S. Пусть s_k максимальный порядок дифференцирований, встречающихся в k-строке матрицы $B\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$; будет предполагаться, что $0 \leqslant s_k < s$ $\left(k=1, \ldots, \frac{1}{2} ps\right)$; $\underline{s}=\inf\limits_k \{s_k\}$, $\bar{s}=\sup\limits_k \{s_k\}$.

$\overset{k}{B}_0\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ будет обозначать матрицу, k-строка которой состоит из членов порядка s_k соответствующей строки матрицы $B\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$.

Для системы (13,17) рассматривается следующая граничная задача: определить в V непрерывное и s раз непрерывно дифференцируемое решение $u(x)$ системы (3,17), удовлетворяющей условию

$$\lim_{x \to y} B\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x)=f(y); \tag{3,18}$$

здесь $x \in V$, $y \in S$, предельный переход $x \to y$ совершается по произвольному некасательному к S пути, $f(y)$ есть заданный на S непрерывный функциональный столбец.

Следующая теорема указывает условия, достаточные для сведения задач (3,17), (3,18) к системе регулярных интегральных уравнений. Метод такого сведения является соответствующим усложнением метода, указанного в работе З. Я. Шапиро [1] для следующего частного случая: $n=3$, $s=2$ $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ содержит только производные второго порядка и притом с постоянными коэффициентами, $B\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — единичная матрица (задача Дирихле).

Теорема 3. Для сводимости задач (3,17), (3,18) к системе регулярных интегральных уравнений достаточны следующие дополнительные предположения:

1. Граница S $(\bar{s}-s)$-кратно гладка.

2. Коэффициенты при j-производных в матрице $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ непрерывны и дифференцируемы $j+(\bar{s}-s)$ раз $(j=0, \ldots, s)$.

3. Коэффициенты при j-производных в k-строке матрицы $B\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ непрерывно дифференцируемы вдоль по S $j-s_k+\bar{s}-s$ раз.

4. Для каждой точки $y \in S$, произвольного ненулевого действительного вектора τ, такого, что $(\tau, \nu(y))=0$ ($\nu(y)$ — единичный вектор внутренней нормали к S), ранг матрицы

$$\int_{+} B_0(y, \tau+\lambda\nu(y))\, A_0^{-1}(y, \tau+\lambda\nu(y))\, (E, \ldots, \lambda^{s-1}E)\, d\lambda$$

равен $\frac{1}{2}ps$. При этом можно выбрать такие столбцы этой матрицы, что соответствующий минор порядка $\frac{1}{2}ps$ отличен от нуля при всех y и τ.

5. k-элемент столбца $f(y)$, — $f_k(y)$ — непрерывно дифференцируем (вдоль по S) $\bar{s}-s_k$ раз.

Доказательство. Для каждой точки $y \in S$ выбирается матрица $R(\tau, \nu, y)$, являющаяся правой обратной к матрице

$$\int_{+} B_0(y, \tau+\lambda\nu)\, A_0^{-1}(y, \tau+\lambda\nu)\, (E, \ldots, \lambda^{s-1}E)\, d\lambda, \quad ((\tau, \nu)=0, \ |\nu-\nu(y)|$$

достаточно мало).

Согласно условиям 1, 2, 3 и 4 можно предполагать, что элементы $R(\tau, \nu, y)$ непрерывно дифференцируемы по ν (в окрестности $\nu(y)$) и по y вдоль по S) $\bar{s}-s$ раз.

Кроме того, обозначая k-столбец $R(\tau, \nu, y)$ через $R_k(\tau, \nu, y)$, можно предполагать, что

$$Q_k(\lambda, \tau, \nu, y)=(E, \ldots, \lambda^{s-1}E)\, R_k(\tau, \nu, y)$$

обладает свойством: при $\varrho>0$

$$Q_k(\varrho\lambda, \varrho\tau, \nu, y)=\varrho^{s-s_k-1}\, Q_k(\lambda, \tau, \nu, y).$$

Легко видеть, что каждая матрица

$$F_k(x-y, \nu, y)=$$

$$=\int \ldots (n-2) \ldots \int_{T} d_\tau T \int_{+} \Phi^{(s-s_k-1)}(x-y, \tau+\lambda\nu)\, A_0^{-1}(y, \tau+\lambda\nu)\, Q_k(\lambda, \tau, \nu, y)\, d\lambda$$

$\left(\nu\right.$ достаточно близко к $\nu(y)$ $(\tau, \nu)=0$; T есть единичная сфера с центром в нуле, лежащая в плоскости, ортогональной ν; $\left.k=1, \ldots, \frac{1}{2}ps\right)$ обладает $(n-s_{k-1})$-свойством.

По теореме 2 (3,3) можно построить для каждого $k\left(k=1,\ldots,\frac{1}{2}ps\right)$ последовательность матриц $F_{k,0}(x-y,\nu,y),\ldots,F_{k,s-s_k-2}(x-y,\nu,y)$ (при $s_k>s-2$ эти матрицы отсутствуют) и матрицу $u_k(x-y,\nu,y)$ так, что

$$G_k(x-y,\nu,y)=F_k(x-y,\nu,y)+\sum_{l=0}^{s-s_k-2}F_{k,l}(x-y,\nu,y)+u_k(x-y,\nu,y)$$

есть решение в V системы (3,17), $F_{kl}(x-y,\nu,y)$ обладает l-свойством, $u_k(x-y,\nu,y)$ и производные $u_k(x-y,\nu,y)$ по x до порядка $s-1$ непрерывны при $x\neq y$ и не превышают по модулю $c\,|x-y|^{2-n}\times\times(|\lg|x-y||+1)$.

Решение задач и (3,17), (3,18) определяется в следующем виде:

$$u(x)=\sum_{k=1}^{\frac{1}{2}ps}\int\ldots(n-1)\ldots\int_S G_k(x-y,\nu(y),y)\,\mu_k(y)\,d_yS;$$

здесь $\mu_k(y)\left(k=1,\ldots,\frac{1}{2}ps\right)$ суть искомые „плотности" рассматриваемых интегралов типа потенциала; плотности эти предполагаются непрерывными; очевидно, $A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)=0\quad(x\in V)$.

Пусть $\underline{s}=s_1\leqslant s_2\leqslant\cdots\leqslant s_{\frac{1}{2}ps}=\overline{s}$.

Граничные условия, соответствующие разным строкам матрицы $B\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ $\left(k\text{-строка будет обозначаться через } B_k\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)$ объединяются в группы с одинаковыми порядками s_k; количество граничных условий в l-группе будет обозначаться через $\varkappa_l$, $\sum_l\varkappa_l=\frac{1}{2}ps$.

Пусть $j\leqslant\varkappa_1$; тогда, если $x_0\in S$ и $x\to x_0$ обозначает предельный переход по некасательному к S пути, то, по лемме 3,1,

$$\lim_{x\to x_0}B_j\left(x_0,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\sum_{k=1}^{\frac{1}{2}ps}\int\ldots(n-1)\ldots\int_S B_j\left(x_0,\frac{\partial}{\partial x}\right)G_k(x-y,\nu(y),y)\,\mu_k(y)\,d_yS=$$

$$=\mu_j(x_0)+\sum_{k=1}^{\varkappa_1}\int\ldots(n-1)\ldots\int_S B_j\left(x_0,\frac{\partial}{\partial x_0}\right)G_k(x_0-y,\nu(y),y)\,\mu_k(y)\,d_yS+$$

$$+\sum_{k=\varkappa_1+1}^{\frac{1}{2}ps}\int\ldots(n-1)\ldots\int_S B_j\left(x_0,\frac{\partial}{\partial x_0}\right)G_k(x_0-y,\nu(y),y)\,\mu_k(y)\,d_yS.\quad(3,21)$$

Здесь ядра $B_j\left(x_0,\frac{\partial}{\partial x_0}\right)G_k(x_0-y,\nu(y),y)$ при $k\leqslant\varkappa_1$ имеют представление вида

$$\frac{h(x_0,y)}{|x_0-y|^n}H(x_0,y)+L_{jk}(x_0,y);$$

($H(x_0, y)$ — ограниченная матрица, $h(x_0, y)$ — расстояние от $x_0 j_0$ касательной в точке y плоскости, элементы $L_{jk}(x_0, y)$ имеют оценку вида $\frac{c}{|x_0-y|^{n-2}}$; элементы

$$B_j\left(x_0, \frac{\partial}{\partial x_0}\right) G_k(x_0-y, \nu(y), y) \quad (k > \varkappa_1)$$

(имеют оценку вида $c|x_0-y|^{s_k-\underline{s}+1-n}$, или вида $c(|\lg|x_0-y||+1)$, или вида C, в зависимости от соотношения $s_k-\underline{s}<n-1$, или $s_k-\underline{s}=n-1$, или $s_k-\underline{s}>n-1$).

Если система регулярных интегральных уравнений

$$L_j(\mu_1, \ldots, \mu_{\varkappa_1})(x_0) \equiv \mu_j(x_0) + \sum_{k=1}^{\varkappa_1} \int \ldots (n-1) \ldots \int_S B_j\left(x_0 \frac{\partial}{\partial x_0}\right) \times$$
$$\times G_k(x_0-y, \nu(y), y)\mu_k(y)\, d_yS = g_j(x_0), \qquad (j=1, \ldots, \varkappa_1) \qquad (3,22)$$

однозначно разрешима, то, обозначая $R_{jk}(x_0, y)$ элементы резольвентной матрицы, из части граничных условий (3,18)

$$L_j(\mu_1, \ldots, \mu_{\varkappa_1})(x_0) + \sum_{k=\varkappa_1+1}^{\frac{1}{2}ps} \int \ldots (n-1) \ldots \int_S B_j\left(x_0 \frac{\partial}{\partial x_0}\right) \times$$
$$\times G_k(x_0-y, \nu(y), y)\mu_k(y)\, d_yS = f_j(x_0), \qquad (j=1, \ldots, \varkappa_1),$$

определяют

$$\mu_j(x_0) = \sum_{k=\varkappa_1+1}^{\frac{1}{2}ps} \int \ldots (n-1) \ldots \int_S \left\{ \sum_{l=1}^{\varkappa_1} \int \ldots (n-1) \ldots \int_S R_{jl}(x_0, z) \times \right.$$
$$\times B_j\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right) G_k(z-y, \nu(y), y)\, d_zS +$$
$$\left. + B_j\left(x_0, \frac{\partial}{\partial x_0}\right) G_k(x_0-y, \nu(y), y) \right\} \mu_k(y)\, d_yS - f_j(x_0) -$$
$$- \sum_{l=1}^{\varkappa_1} \int \ldots (n-1) \ldots \int R_{jl}(x_0, y) f_l(y)\, d_yS, \qquad (j=1, \ldots, \varkappa_1). \qquad (3,23)$$

В случае, если однородная система (3,22) имеет ненулевое решение, для $\mu_j(x_0)$ получаются сходные выражения (с добавлением решений однородной системы) и, кроме того, из условий разрешимости (3,21) возникают некоторые интегральные соотношения для искомых

$$\mu_{\varkappa_1+1}(y), \ldots, \mu_{\frac{1}{2}ps}(y).$$

Выражения (3,23) теперь подставляются в формулы для

$$B_j\left(x_0, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) \qquad \left(j=\varkappa_1+1, \ldots, \frac{1}{2}ps\right).$$

Используя методы п. 3 работы [3], которые очевидным образом переносятся из области n-мерного пространства на достаточно гладкую поверхность S, легко доказать, что при рассматриваемых ограничениях выражения

$$T_{jk}(x_0, y)=\sum_{l=1}^{\varkappa_1}\int\limits_S \ldots (n-1) \ldots \int R_{jl}(x_0, z) B_j\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times$$

$$\times G_k(z-y, \nu(y), y)\, d_z S + B_j\left(x_0, \frac{\partial}{\partial x_0}\right) G_k(x_0-y, \nu(y), y),$$

$$g_j(x_0)=-f_j(x_0)-\sum_{l=1}^{\varkappa_1}\int\limits_S \ldots (n-1) \ldots \int R_{jl}(x_0, y) f_l(y)\, d_y S$$

удовлетворяют условиям лемм 3,2; 3,3: $T_{jk}(x_0, y)$ непрерывно дифференцируемы вдоль по S по x_0 (при $x_0 \neq y$) $s_{\varkappa_1+1}-s_1$ раз и вместе с этими производными подчинены оценке вида $c\,|x_0-y|^{2-n}(|\lg|x_0-y||+1)$; $g_j(x_0)$ непрерывно дифференцируемы $\bar{s}-s_j$ раз (вдоль по S).

Теперь рассматриваются граничные условия второй группы [после подстановки (3,22)]:

$$B_j\left(x_0, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x)=\sum_{l=\varkappa_1+1}^{\varkappa_1+\varkappa_2}\int\limits_S \ldots (n-1) \ldots \int\left\{\sum_{k=1}^{\varkappa_1}\int\limits_S \ldots (n-1) \ldots \int B_j\left(x_0, \frac{\partial}{\partial x}\right) \times\right.$$

$$\left.\times G_k(x-z, \nu(z), z)\, T_{kl}(z, y)\, d_z S\right\} \mu_l(y)\, d_l S +$$

$$+\sum_{l=\varkappa_1+1}^{\varkappa_1+\varkappa_2}\int\limits_S \ldots (n-1) \ldots \int B_j\left(x_0, \frac{\partial}{\partial x}\right) G_l(x-y, \nu(y), y) \mu_l(y)\, d_y S + \ldots$$

($j=\varkappa_1+1, \ldots, \varkappa_1+\varkappa_2$; пропущены члены, содержащие $\mu_l(y)$ при $l>\varkappa_1+\varkappa_2$, и члены, не содержащие неизвестных $\mu_j(y)$), применяя на основании представления (3,19) к слагаемым первого типа леммы 3,2 и 3,3 и к слагаемым второго типа лемму 3,1, при $x \to x_0$ снова получают регулярные интегральные уравнения вида

$$\mu_j(x_0)+\sum_{k=\varkappa_1+1}^{\varkappa_1+\varkappa_2}\int\limits_S \ldots (n-1) \ldots \int F_{jk}(x_0, y) \mu_k(y)\, d_y S +$$

$$+\sum_{k>\varkappa_1+\varkappa_2}\int\limits_S \ldots (n-1) \ldots \int F_{jk}(x_0, y) \mu_k(y)\, d_y S + h_j(x_0)=f_j(x_0),$$

$$(j=\varkappa_1+1, \ldots, \varkappa_1+\varkappa_2)$$

($F_{jk}(x_0, y)$, $h_j(x_0)$ — известные функции). Повторяя для этой системы прежние рассуждения, переходят затем к граничным условиям третьей группы и т. д.

Предположения теоремы при этом обеспечивают применимость лемм 3,1, 3,2 и 3,3. Теорема доказана.

Полезно отметить, что для сильно эллиптических систем, рассматриваемых М. И. Вишиком, условие 4 теоремы 3 выполняется для граничных условий типа Дирихле $\left(s\right.$ четно, граничные значения $u(x)$ и нормальных производных до порядка $\left.\frac{s}{2}-1\right.$ заданы$\left.\right)$.

Можно отметить, что рассматриваемый метод в применении к задачам Дирихле или Неймана для уравнения Лапласа приводит в представлении (3,19) к потенциалам двойного и простого слоев соответственно. Для примера приводится система интегральных уравнений, соответствующая задаче $u(x)=f(x)$, $\frac{\partial}{\partial\nu(x)}u(x)=g(x)\,(x_1\in S)$ для бигармонического уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)^2 u(x)=0:$$

$$\lambda(z)+\frac{3}{2\pi}\iint\limits_S\frac{(z-y,\nu(y))^3}{|z-y|^5}\lambda(y)\,d_yS+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S\frac{(z-y,\nu(y))^2}{|z-y|^3}\mu(y)\,d_yS=f(z),$$

$$\mu(z)+\frac{3}{2\pi}\iint\limits_S\left\{\frac{3(z-y,\nu(y))^2(\nu(y),\nu(z))}{|z-y|^5}-\right.$$

$$\left.-\frac{5(z-y,\nu(y))^3(z-y,\nu(z))}{|z-y|^7}\right\}\lambda(y)\,d_yS+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S\left\{\frac{2(z-y,\nu(y))(\nu(y),\nu(z))}{|z-y|^3}-\right.$$

$$\left.-\frac{3(z-y,\nu(y))^2(z-y,\nu(z))}{|z-y|^5}\right\}\mu(y)\,d_yS=g(z).$$

Решение $u(x)$ представляется формулой

$$u(x)=\frac{3}{2\pi}\iint\limits_S\frac{(x-y,\nu(y))^3}{|x-y|^5}\lambda(y)\,d_yS+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S\frac{(x-y,\nu(y))^2}{|x-y|^3}\mu(y)\,d_yS.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. З. Я. Шапиро, Матем. сб., 28 (70), 1 (1951).
2. М. И. Вышик, Матем. сб., 29 (71), 3 (1951).
3. Я. Б. Лопатинский, Укр. матем. журнал, III, № 3 (1951).

Получена 16 июля 1952 г.
Львов.