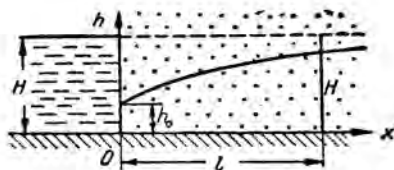


## Об одной задаче теории неустановившихся движений грунтовых вод

Ю. Д. Соколов

1

Рассмотрим простейшую задачу о плоском неустановившемся движении грунтовых вод при внезапном изменении уровня воды в водохранилище. Эта задача формулируется обычно следующим образом. Пусть до момента  $t=0$  свободная поверхность грунтовых вод была горизонтальной (фиг. 1) и имела высоту  $H$  (отсчитываемую от горизонтального водонепроницаемого основания  $Ox$ ). В начальный момент  $t=0$  уровень воды в водохранилище внезапно изменяется, принимая значение  $h_0$ , и в дальнейшем поддерживается постоянным. Найти уравнение кривой депрессии и определить расход через стенку водохранилища (при  $x=0$ ) в момент  $t>0$ . Следовательно, требуется найти решение уравнения Буссинеска [1, 2]



Фиг. 1.

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{c}{m} \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial h}{\partial x} \right), \quad (1)$$

удовлетворяющее начальному и граничному условиям

$$h(x, 0) = H, \quad h(0, t) = h_0. \quad (2)$$

Здесь  $h$  — уровень воды в сечении, определяемом абсциссой  $x$ ,  $c$  — коэффициент фильтрации и  $m$  — коэффициент водоотдачи. Положив в (1)

$$\frac{ch_0}{m} = a^2, \quad \frac{x}{2a\sqrt{t}} = \eta, \quad h = h_0 u, \quad (3)$$

приведем задачу к нахождению решения обыкновенного дифференциального уравнения [2]

$$u \frac{d^2 u}{d\eta^2} + \left( \frac{du}{d\eta} \right)^2 + 2\eta \frac{du}{d\eta} = 0, \quad (4)$$

удовлетворяющего условиям

$$u(0) = 1, \quad u(+\infty) = \frac{H}{h_0} = \frac{1}{k}. \quad (5)$$

Для построения искомого решения можно применить метод разложения по степеням некоторого параметра  $\theta$  [2]. Полагая в (4)

$$u(\eta) = 1 + \theta u_1(\eta) + \theta^2 u_2(\eta) + \dots,$$

причем  $u_i(0) = 0$ ,  $u_i(+\infty) = c_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ), где  $c_i$  — заданные постоянные, и приравнявая нулю коэффициенты при различных степенях  $\theta$ , получим бесконечную систему линейных дифференциальных уравнений, последовательно определяющих функции  $u_i(\eta)$ .

Параметр  $\theta$  определится из уравнения

$$\frac{1}{k} = 1 + c_1\theta + c_2\theta^2 + \dots \quad (6)$$

Положив  $c_1 = 1$ , в первом приближении найдем

$$\theta \approx \frac{1}{k} - 1 \quad (6_1)$$

и

$$\frac{h}{h_0} \approx 1 + \frac{2\left(\frac{1}{k} - 1\right)}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-y^2} dy = 1 + \left(\frac{1}{k} - 1\right) \Phi(\eta), \quad (1a)$$

где через  $\Phi(\eta)$  обозначена функция Крампа.

Формула расхода через стенку водохранилища (на погонную единицу длины) в первом приближении будет \*

$$q = c \left( h \frac{\partial h}{\partial x} \right)_0 \approx (1-k) \sqrt{\frac{cmkH^3}{\pi t}}. \quad (16)$$

Положив  $c_2 = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} = -0,182\dots$ , во втором приближении найдем

$$\frac{h}{h_0} \approx 1 + \theta \Phi(\eta) + \theta^2 \left[ \frac{1}{\pi} (1 - e^{-2\eta^2}) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta e^{-\eta^2} \Phi(\eta) - \frac{1}{2} \Phi^2(\eta) \right], \quad (A)$$

$$q \approx \sqrt{\frac{cmk^3H^3}{\pi t}} \theta, \quad (B)$$

где

$$\theta = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{1}{k} - 1\right)}}{1 - \frac{2}{\pi}}. \quad (6_2)$$

При  $k > 1$   $\theta$  имеет действительное отрицательное значение, причем

$$\max |\theta| = \frac{2}{1 + \sqrt{3 - \frac{4}{\pi}}} = 0,86401\dots \quad (\text{при } k = +\infty),$$

при  $0,4213\dots = \frac{2\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)}{3 - \frac{4}{\pi}} < k < 1$   $\theta$  имеет действительное положительное значение.

\*  $q$  считаем положительным при  $\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_0 > 0$ .

При  $0,55\dots = \frac{2}{3 + \frac{2}{\pi}} < k < 1$   $\theta < 1$ ; в частности, при  $k = \frac{8}{11 + \frac{2}{\pi}} = 0,68753\dots$ ;  $\theta = \frac{1}{2}$ .

Так как по (6<sub>2</sub>) при  $k < \frac{2(1 - \frac{2}{\pi})}{3 - \frac{4}{\pi}}$   $\theta$  принимает комплексное зна-

чение, то, несколько видоизменяя предыдущие рассуждения, можем положить

$$\frac{\sqrt{mx}}{2\sqrt{cHt}} = \eta', \quad u' = \frac{h}{H} = 1 + \theta' u_1'(\eta') + \theta'^2 u_2'(\eta') + \dots,$$

причем

$$u_i'(0) = c_i', \quad u_i'(+\infty) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

и определить  $\theta'$  из уравнения

$$k = 1 + c_1' \theta'^1 + c_2' \theta'^2 + \dots \quad (6')$$

Полагая  $c_1' = -1$ ,  $c_2' = -\frac{1}{\pi}$ , получим в первом приближении

$$\frac{h}{H} \approx k + (1-k) \Phi(\eta'), \quad (1a')$$

$$q \approx (1-k) \sqrt{\frac{cmH^3}{\pi t}} \quad (16')$$

и во втором

$$\begin{aligned} \frac{h}{H} \approx & 1 - \theta' [1 - \Phi(\eta')] + \\ & + \theta'^2 \left\{ \frac{1}{\pi} (1 - e^{-2\eta'^2}) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta' e^{-\eta'^2} [1 - \Phi(\eta')] - \frac{1}{2} \Phi^2(\eta') - \frac{1}{\pi} \right\}, \end{aligned} \quad (A')$$

$$q \approx \sqrt{\frac{cmH^3}{\pi t}} \theta', \quad (B')$$

$$\theta' = \frac{\sqrt{1 + \frac{4}{\pi} (1-k)} - 1}{\frac{2}{\pi}}. \quad (6_2')$$

### 3

Применим теперь к нахождению приближенного решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2), метод последовательной смены стационарных состояний [3], рассматривая первую фазу неустановившегося движения — распространение зоны депрессии. Согласно этому методу полагаем, что при  $x \geq l(t)$  (фиг. 1)  $h = H$ , а на сегменте  $0 \leq x \leq l(t)$  кривая депрессии имеет стационарный характер, т. е. определяется уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial h}{\partial x} \right) = 0,$$

откуда, принимая во внимание граничные условия, найдем

$$\frac{h^2}{H^2} = (1 - k^2)\xi + k^2 \quad \left(\xi = \frac{x}{l}\right) \quad (7)$$

и

$$q = \frac{cH^2}{2} \frac{1 - k^2}{l}. \quad (8)$$

Для общего расхода  $Q$  за время  $t$  будем иметь

$$\begin{aligned} Q &= mlH - m \int_0^l h dx = mlH \left(1 - \int_0^1 \sqrt{(1 - k^2)\xi + k^2} d\xi\right) = \\ &= \frac{(1 - k)(1 + 2k)}{3(1 + k)} mlH \end{aligned} \quad (9)$$

и, так как  $\frac{dQ}{dt} = q$ , то

$$\frac{m(1 + 2k)}{3(1 + k)} \frac{dl}{dt} = \frac{cH(1 + k)}{l},$$

откуда

$$l = \sqrt{\frac{3cH}{m} \frac{1 + k}{\sqrt{1 + 2k}}} \sqrt{t}. \quad (10)$$

Таким образом, по (7), (8) и (3)

$$\frac{h^2}{H^2} = (1 - k^2)\xi + k^2 = \frac{2}{\sqrt{3}} (1 - k) \sqrt{k(1 + 2k)} \eta + k^2 \quad (IIa)$$

и

$$q = \frac{cH^2}{2} \frac{1 - k^2}{l} = \sqrt{\frac{cmH^3}{12}} \frac{(1 - k) \sqrt{1 + 2k}}{\sqrt{t}}. \quad (IIб)$$

#### 4

К задачам теорий фильтрации и теплопроводности, аналогичным рассматриваемой (а также и к значительно более общим), можно применить следующий метод, с успехом могущий заменить метод последовательной смены стационарных состояний и приводящий подобно последнему к простым расчетным формулам.

Полагая, как и ранее

$$h = H \text{ при } x \geq l(t), \quad (11)$$

определим на сегменте  $0 \leq x \leq l(t)$  приближенное значение  $h$  уравнением

$$\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} = -2f(t), \quad (12)$$

где

$$-\frac{c}{m} f(t) = \frac{\int_0^l \frac{\partial h}{\partial t} dx}{l} = \frac{\frac{d}{dt} \int_0^l h dx - H \frac{dl}{dt}}{l}, \quad (13)$$

и условиями:

$$h(0, t) = h_0, \quad h(l, t) = H, \quad \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{x=l} = 0, \quad (14)$$

Из (12) на основании (14) получим

$$\frac{h^2}{H^2} = (1 - k^2)(-\xi^2 + 2\xi) + k^2, \quad (15)$$

$$f(t) = H^2 \frac{1 - k^2}{l^2}. \quad (16)$$

Далее, по (15)

$$\int_0^l h dx = Hl \int_0^1 \sqrt{(1 - k^2)(-\xi^2 + 2\xi) + k^2} d\xi = PHl, \quad (17)$$

где

$$P = \frac{1}{2} \left( k + \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} \arccos k \right) \quad \text{при } k < 1$$

$$P = \frac{1}{2} \left[ k + \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}} \ln(k + \sqrt{k^2 - 1}) \right] \quad \text{при } k > 1^*$$

и

Подставляя из (16) и (17) в (13), найдем

$$H(1 - P) \frac{dl}{dt} = \frac{cH^2}{m} \frac{1 - k^2}{l},$$

откуда

$$l = \sqrt{\frac{2cH}{m} \frac{1 - k^2}{1 - P} t}. \quad (19)$$

Подставляя это в (15) и полагая

$$b = \sqrt{\frac{2k(1 - P)}{1 - k^2}}, \quad (20)$$

окончательно получим

$$h = H \sqrt{1 - (1 - k^2)(1 - b\eta)^2} \quad (IIIa)$$

и

$$q = cH^2 \frac{1 - k^2}{l} = \frac{b(1 - k^2)}{2} \sqrt{\frac{cmH^3}{kt}}. \quad (IIIб)$$

## 5

В табл. 1—4 приведены результаты сравнения вышеописанных методов в применении к рассматриваемой задаче. В табл. 1 даны при различных значениях  $k$  отклонения (в процентах) значений дебита, вычисленных по формулам (16)\*\*\*, (16)\*\*\*, (IIб), (IIIб), от значения, получаемого по формулам (Б)\*\* или (Б')\*\*\*. При этом знак — указывает на отклонение с недостатком, а знак + на отклонение с избытком.

\* При  $k = 0 : P = \frac{\pi}{4}$ , при  $k = 1 : P = 1$ ;  $\lim_{k \rightarrow +\infty} P = +\infty$ .

\*\* В случаях 4—8.

\*\*\* В случаях 1—3.

В табл. 2—4 при тех же значениях  $k$  даны отклонения ординат кривой депрессии, вычисленных по формулам (Ia)\*, (Ia')\*\*, (IIa), (IIIa), от их значений, определяемых формулами (A)\* или (A')\*\*.

Таблица 1

Отклонения $q$								
№	1	2	3	4	5	6	7	8
$k$	0,4213	0,5000	0,5500	0,6875	0,9500	1,1111	2,2002	$+\infty$
	2,7473	1,3145	1,0000	0,5000	0,0531	-0,0982	-0,5000	-0,8640
$\theta'$	0,4994	0,4388	0,3993	0,2864	0,0492	-0,1153	—	—
% откл. ф. (I6),(I6')	15,9+	14,0+	12,7+	9,1—	1,0—	1,8+	9,1+	15,7+
ф.(II6)	19,6—	17,6—	8,2—	13,6—	11,5—	11,3—	12,5—	16,3—
ф.(III6)	8,0—	7,0—	2,1—	0,8—	2,2+	2,5+	2,5+	2,6+

Таблица 2

Отклонения $h$ при $\eta=0,1$								
№	1	2	3	4	5	6	7	8
% откл. ф. (Ia),(Ia')	2,5—	1,5—	1,4—	0,3—	0,0—	0,0—	0,4—	1,2—
ф.(IIa)	3,0+	1,4+	0,4+	0,7—	0,1—	0,2+	1,3+	2,0+
ф.(IIIa)	4,0+	2,1+	1,3+	0,2—	0,0+	0,0+	0,1+	0,2+

Таблица 3

Отклонения $h$ при $\eta=1,0$							
№	1	2	3	4	5	6	7
% откл. ф. (Ia), (Ia')	5,3—	4,0—	3,3—	3,0+	0,0+	0,1+	5,0+
ф.(IIa)	5,0+	6,0+	3,6+	3,6+	0,7+	1,5—	11,7—
ф.(IIIa)	1,4+	1,5+	0,3—	0,2+	0,1—	0,2+	0,1—

Таблица 4

Отклонения $h$ при $\eta=1,15$							
№	1	2	3	4	5	6	7
% откл. ф. (Ia), (Ia')	1,9—	3,3—	2,4—	1,8+	0,0+	0,1+	5,0+
ф.(IIa)	6,2+	6,0+	6,0+	5,2+	0,5+	1,0—	7,0—
ф.(IIIa)	1,2+	0,2—	0,0—	0,1+	0,5—	0,1+	2,0—

\* В случаях 4—8.

\*\* В случаях 1—3.

Приведенные таблицы в достаточной степени иллюстрируют преимущества метода усреднения  $\frac{\partial h}{\partial t}$ , изложенного в п. 4.

6

Путем применения метода Фурье к уравнению (1) Буссинеск нашел точное решение этого уравнения, соответствующее граничным условиям (фиг. 2)

$$h(0, t) = 0, \quad \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{x=L} = 0 \quad (21)$$

и начальному условию

$$h(x, 0) = F(\xi) \quad \left(\xi = \frac{x}{l}\right), \quad (21')$$

где

$$\xi = \frac{1}{C} \int_0^F \frac{y dy}{\sqrt{1-y^3}} \quad \left(C = \int_0^1 \frac{y dy}{\sqrt{1-y^3}} = 0,86236\dots\right), \quad (21'')$$

характеризующее так называемый „упорядоченный режим“. Это решение имеет вид\*

$$h = \frac{H_0 F(\xi)}{1 + \alpha \tau}, \quad (22)$$

где

$$\tau = \frac{cH_0}{mL^2}, \quad \alpha = \frac{3}{2} C^2 = 1,1155\dots, \quad (22')$$

так что

$$K = \frac{H}{H_0} = \frac{1}{1 + \alpha \tau} \quad [H = h(L, t)], \quad (23)$$

$$q = \frac{cCH_0}{L} K^2, \quad (24)$$

$$Q = \frac{2mLH_0}{3C} (1 - K) = \frac{CmLH_0 \tau}{1 + \alpha \tau}. \quad (25)$$

Представляет известный интерес сравнение приближенных решений задачи Буссинеска с ее точным решением. Одним из наиболее распространенных приемов приближенного решения подобных задач является сведение уравнения (1) к уравнению теплопроводности путем замены множителя  $h$ , стоящего в скобках, его некоторым средним значением  $\bar{h}$ . Поступая таким образом, получим решение соответствующего уравнения теплопроводности, удовлетворяющее условиям (21), (21'):

$$h = H_0 \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 \bar{k} \tau}{4}} \sin \frac{2n+1}{2} \pi \xi, \quad (26)$$

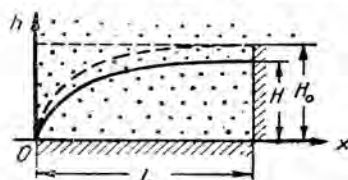
\* Можно указать еще два точных решения уравнения (1):

$$h = \frac{-\frac{m x^3}{6c} + \beta x - \frac{3c}{2m} \beta^2 + \gamma(t+a)^{\frac{2}{3}}}{t+a}$$

и

$$h = \beta x + \frac{c}{m} \beta^2 (t+a),$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  — произвольные постоянные.



Фиг. 2.

где

$$\bar{k} = \frac{\bar{h}}{H_0}, \quad A_n = 2 \int_0^1 F(\xi) \sin \frac{2n+1}{2} \pi \xi d\xi. \quad (26')$$

Ограничиваясь только первым членом ряда, полагая  $A_0 \approx 1^*$  и определяя  $\bar{k}$  из условия

$$\bar{k} = \frac{\int_0^1 d\xi \int_0^\tau \frac{h}{H_0} dx}{\tau} \quad \left( \bar{k} = \frac{2}{\pi} \frac{1-K}{\ln \frac{1}{K}} \right)^{**},$$

найдем:

$$h \approx H_0 e^{-\frac{\bar{k} \pi^2 x}{4}} \sin \frac{\pi}{2} \xi, \quad (27)$$

$$K \approx e^{-\frac{\bar{k} \pi^2 \tau}{4}}, \quad (27')$$

$$\tau \approx \frac{4}{K \pi^2} \ln \frac{1}{K}, \quad (27'')$$

$$q \approx \frac{\pi c \bar{k} H_0^2}{2L} e^{-\frac{\bar{k} \pi^2 \tau}{4}}, \quad (28)$$

$$Q \approx \frac{2mLH_0}{\pi} \left( 1 - e^{-\frac{\bar{k} \pi^2 \tau}{4}} \right). \quad (29)$$

Вычисляя  $\tau$ ,  $q$ ,  $Q$  при данном значении  $K$  по формулам (27''), (28), (29) и сравнивая с результатами вычислений по формулам (23)–(25), найдем, что погрешности вычисления  $\tau$  и  $q$  возрастают при  $K \rightarrow +0$  от 29% до 100% и от 16% до  $+\infty$  соответственно; погрешность  $Q$  постоянна и составляет 18%.

Метод последовательной смены стационарных состояний (в применении ко второй фазе неустановившегося движения — истощению пласта, с прямоугольным сечением, с основанием  $L$  и высотой  $H_0$ ) дает по (7), (8) при  $l=L$  и  $k=0$ :

$$h = H \sqrt{\xi}, \quad (30)$$

$$q = \frac{cH_0^2}{2L} K^2, \quad (31)$$

$$Q = mL(H_0 - H) \int_0^1 \sqrt{\xi} d\xi = \frac{2}{3} mLH_0(1-K), \quad (32)$$

так что

$$\frac{2}{3} mLH_0 \frac{dK}{dt} = -\frac{cH_0^2}{2L} K^2$$

\* По (26') найдем:  $A_0 \approx 1,1$ .

\*\* Здесь  $\tau$  и  $K$  имеют соответствующие фиксированные значения.



или

$$-\frac{4}{3} \frac{dK}{K^2} = d\tau,$$

откуда

$$\tau = \frac{4}{3} \left( \frac{1}{K} - 1 \right) \quad \text{и} \quad K = \frac{1}{1 + \frac{4}{3} \tau}. \quad (33)$$

Таким образом, погрешности вычисления  $\tau$ ,  $q$  и  $Q$  по данному  $K$  по формулам (33), (31), (32) составляют при всех значениях  $K$  соответственно 49%, 42% и 14%. Наконец, метод п. 4 дает по (13), (16), (17) при  $l = L$ ,  $k = 0$ ,  $P = \frac{\pi}{4}$ :

$$-\frac{c}{m} \frac{H^2}{L^2} = \frac{\pi}{4} \frac{dH}{dt}$$

или

$$-\frac{dK}{K^2} = \frac{4}{\pi} d\tau,$$

откуда

$$\tau = \frac{\pi}{4} \left( \frac{1}{K} - 1 \right) \quad \text{и} \quad K = \frac{1}{1 + \frac{4}{\pi} \tau}. \quad (34)$$

Тогда по (15), (IIIб) и (17) при  $k = 0$ :

$$h = H_0 \frac{\sqrt{2\xi - \xi^2}}{1 + \frac{4}{\pi} \tau}, \quad (35)$$

$$q = \frac{cH_0^2}{L} K^2, \quad (36)$$

$$Q = \frac{\pi mLH_0}{4} (1 - K); \quad (37)$$

максимальные погрешности при вычислении  $\tau$ ,  $q$ ,  $Q$  по (34), (36), (37) составляют 12,4%, 16% и 16% (1,6% около  $K = 1$ ).

Следовательно, и в данном случае наилучшие результаты дает метод усреднения  $\frac{\partial h}{\partial t}$  п. 4.

Сопоставляя (22) и (35), при  $\tau = 0$  получаем приближенное обращение формулы (21'')

$$F(\xi) \approx \sqrt{2\xi - \xi^2}. \quad (38)$$

Погрешность вычисления  $F(\xi)$  по этой формуле в окрестности  $\xi = 0$  составляет 7,7%; при  $\xi = 0,04$ ; 0,15; 0,36 погрешность равна соответственно 7%, 5%, 1,4% и стремится к нулю при  $\xi \rightarrow 1$ .

## 7

Метод усреднения  $\frac{\partial h}{\partial t}$  п. 4 в применении к уравнению теплопроводности приводит, естественно, к еще более простым результатам. При этом получается достаточная степень точности в случае постоянства знака  $\frac{\partial h}{\partial t}$  (повсеместно монотонного процесса).

В качестве примера рассмотрим задачу о плоском притоке жидкости к дренажной галерее при упругом режиме фильтрации. В простейшем случае, как известно [например, (3)], задача эта сводится к нахождению решения, соответствующего данным граничным и начальным условиям уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad (39)$$

где  $p(x, t)$  — давление в жидкости в момент  $t$  в сечении, соответствующем абсциссе  $x$ , а  $\kappa$  — коэффициент пьезопроводности.

При условиях

$$p(x, 0) = \text{const} = p_i, \quad p(0, t) = p_0(t) \quad (40)$$

решение, как известно, будет иметь вид

$$p = p_i + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left[ p_0 \left( t - \frac{x^2}{4\kappa y^2} \right) - p_i \right] e^{-y^2} dy \quad \left( \eta = \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right). \quad (41)$$

В частности, при  $p_0(t) = \text{const}$

$$\frac{p - p_i}{p_0 - p_i} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = 1 - \Phi(\eta) \quad (42)$$

и при  $p_0(t) = p_i - \beta t$

$$p = p_i - \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left( t - \frac{x^2}{4\kappa y^2} \right) e^{-y^2} dy. \quad (43)$$

Отсюда „скорость фильтрации“  $v(t)$  определяется по формуле

$$v(t) = \frac{k}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{x=0}, \quad (44)$$

где  $k$  — коэффициент проницаемости среды, а  $\mu$  — абсолютный коэффициент вязкости жидкости.

В частности, при  $p_0(t) = \text{const}$  по (42)

$$v(t) = \frac{k}{\mu \sqrt{\pi}} \frac{p_i - p_0}{\sqrt{\kappa t}}. \quad (44_1)$$

Применяя метод последовательной смены стационарных состояний, И. А. Чарный нашел приближенные формулы [3]:

$$t = \frac{2\sqrt{\kappa}}{p_i - p_0} \sqrt{\int_0^t (p_i - p_0)^2 dt} \quad (45)$$

$$v(t) = \frac{k}{\mu} \frac{(p_i - p_0)^2}{2\sqrt{\kappa}} \frac{1}{\sqrt{\int_0^t (p_i - p_0)^2 dt}}. \quad (46)$$

Последняя формула при  $p_0(t) = \text{const}$  дает

$$v(t) = \frac{k}{2\mu} \frac{p_i - p_0}{\sqrt{xt}}. \quad (44_2)$$

Сравнивая это с (44<sub>1</sub>), найдем, что погрешность (44<sub>2</sub>) составляет 11,5%; в случае же закона (43) погрешность (46) достигнет 23%.

Применим теперь к нахождению решения уравнения (39), удовлетворяющего условиям (40), метод п. 4.

Полагая при  $x \geq l(t)$

$$p = p_i.$$

определим приближенное значение  $p$  на сегменте  $0 \leq x \leq l(t)$  уравнением

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = f(t), \quad (47)$$

где

$$f(t) = \frac{\int_0^l \frac{\partial p}{\partial t} dx}{l}, \quad (48)$$

и условиями

$$p(0, t) = p_0(t), \quad p(l, t) = p_i, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{x=l} = 0. \quad (49)$$

Из (47) на основании (49) получим

$$p = (p_i - p_0) \left(2 \frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right) + p_0 \quad (50)$$

и

$$f(t) = -2 \frac{p_i - p_0}{l^2}. \quad (51)$$

Подставляя из (50) и (51) в (48), найдем

$$\frac{dl^2}{dt} + \frac{2 \frac{dp_0}{dt}}{p_0 - p_i} l^2 = 12x,$$

откуда

$$l^2 = \frac{12x \int_0^t (p_i - p_0)^2 dt}{(p_i - p_0)^2}. \quad (52)$$

Тогда

$$v(t) = \frac{2k}{\mu} \frac{p_i - p_0}{l} = \frac{k}{\mu} \frac{(p_i - p_0)^2}{\sqrt{3x}} \frac{1}{\sqrt{\int_0^t (p_i - p_0)^2 dt}}. \quad (53)$$

В частности, при  $p_0 = \text{const}$

$$l^2 = 12xt, \quad p = p_0 + (p_i - p_0) \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \eta - \frac{\eta^2}{3} \right) \quad (54)$$

и

$$v(t) = \frac{k}{\mu} \frac{p_i - p_0}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{xt}} \quad (44_2)$$

Погрешность (44<sub>2</sub>) составляет 2,3%, а при законе (43) погрешность формулы (53) достигает 11,5%.

Сравнивая решения (42) и (54), получаем аппроксимационные формулы:

$$\Phi(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-y^2} dy \approx \frac{2}{\sqrt{3}} \eta - \frac{\eta^2}{3} \approx 1,1547\eta - 0,3333\eta^2 \quad \text{при } \eta \leq \sqrt{3}, \quad (55)$$

$$\Phi(\eta) \approx 1 \quad \text{при } \eta \geq \sqrt{3}. \quad (55')$$

Погрешности этих формул иллюстрируются нижеследующей таблицей.

Таблица 5

$\eta$	$\approx 0$	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Погрешности (55) в %	2,3+	0,9+	0,4—	2,3—	3,7—	4,6—	5,1—	5,1—	4,8—	4,3—	3,5—	2,5—
$\eta$	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2
Погрешности (55) — (55') в %	1,5—	0,5—	0,4—	1,2+	1,7+	1,8+	1,6+	1,1+	0,7+	0,5+	0,3+	0,2+

В связи с ф. (55) интересно отметить, что полином второй степени, наименее уклоняющийся (в смысле Чебышева) от функции  $\Phi(\eta)$ , на сегменте  $[0,2]$  имеет вид\*:  $P(\eta) = 0,0206 + 1,1421\eta - 0,3325\eta^2$ , причем

$$\max_{0 < \eta < 2} |\Phi(\eta) - P(\eta)| = 0,0212.$$

Пусть  $q$  — точное значение наименьшего уклонения, тогда  $0,0206 \leq q \leq 0,0212$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Boussinesq J., Journ. math., 10, 14, 1904.
2. Полубаринова-Кочина П. Я., О неустановившихся движениях грунтовых вод при фильтрации из водохранилищ, ПММ, т. XIII, в. 2, 1949.
3. Чарный И. А., Подземная гидромеханика, гл. IX, ОГИЗ, Гостехиздат, 1948.

Получена 2 декабря 1952 г.

Киев.

\* Вычисления произведены доктором физ.-мат. наук С. И. Зуховицким по его методу.