DOI: 10.37863/umzh.v74i7.6981

УДК 517.5

С. Б. Вакарчук (Університет ім. А. Нобеля, Дніпро),
М. Б. Вакарчук (Дніпр. нац. ун-т ім. О. Гончара)

K-ФУНКЦІОНАЛИ ТА ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ АПРОКСИМАЦІЇ КЛАСІВ АНАЛІТИЧНИХ У КРУЗІ ФУНКЦІЙ. II

The exact values of the Kolmogorov, Bernstein, and trigonometric n-widths of the classes defined by using the Hadamard compositions, generalized K-functionals, and majorants are obtained in the Hardy, Bergman, and Gvaradze Banach spaces. The exact values of the upper boundaries of the moduli of Fourier coefficients were also found in the indicated classes of functions.

У банахових просторах Гарді, Бергмана та Гварадзе аналітичних в одиничному крузі функцій отримано точні значення колмогоровського, бернштейнівського та тригонометричного n-поперечників класів, означених за допомогою композицій Адамара, узагальнених K-функціоналів та мажорант. На зазначених класах функцій також знайдено точні значення верхніх меж модулів коефіцієнтів Тейлора.

Ця стаття є продовженням роботи [1], тому в ній продовжено нумерацію пунктів і формул у кожному з них.

5. Точні значення n-поперечників класів аналітичних в одиничному крузі функцій, визначених за допомогою K-функціоналів. ***5.1.*** Нагадаємо, що під $X(U)$, як і в [1], розуміємо такі банахові простори аналітичних в одиничному крузі U функцій: простори Гарді H_q, $1 \le q \le \infty$, Бергмана H'_q, $1 \le q \le \infty$, та Гварадзе $\mathfrak{B}(p,q,\lambda)$, $0 < p < q \le \infty$, $1 \le \lambda \le \infty$, $\min(q,\lambda) \ge 1$.

Нехай $L_n \subset X(U)$, $n \in \mathbb{N}$, — підпростір розмірності n, а $E(f, L_n, X)$, де X є простором $X(U)$, — найкраще наближення функції $f \in X(U)$ елементів підпростору L_n у метриці простору $X(U)$. Величина $E(\mathfrak{M}, L_n, X)$ буде характеризувати відхилення множини функцій $\mathfrak{M} \subset X(U)$ від підпростору L_n в $X(U)$, тобто

$$E(\mathfrak{M}, L_n, X) := \sup\{E(f, L_n, X) : f \in \mathfrak{M}\}.$$

Для центрально-симетричної множини $\mathfrak{M} \subset X(U)$ величина

$$d_n(\mathfrak{M}, X) = \inf\{E(\mathfrak{M}, L_n, X) : L_n \subset X(U)\}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5.1}$$

є колмогоровським n-поперечником $\mathfrak{M}$ у просторі $X(U)$ і характеризує мінімальну похибку, яку можна забезпечити, якщо наближати $\mathfrak{M}$ різними n-вимірними підпросторами L_n з $X(U)$. Підпростір L_n^*, для якого

$$d_n(\mathfrak{M}, X) = E(\mathfrak{M}, L_n^*, X),$$

буде екстремальним для множини $\mathfrak{M}$ у просторі $X(U)$. Нагадаємо, що n-поперечники $d_n(\mathfrak{M}, X)$ було введено А. М. Колмогоровим у 1936 році.

На початку 70-х років минулого століття В. М. Тихомиров увів до розгляду бернштейнівський n-поперечник b_n. Нехай $\mathbb{S}$ — одинична куля у просторі $X(U)$. Тоді, з огляду на введені позначення, можемо записати

$$b_n(\mathfrak{M}, X) = \sup\{\sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon\mathbb{S} \cap L_{n+1} \subset \mathfrak{M}\} : L_{n+1} \subset X(U)\}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.2}$$

Якщо існує підпростір $\widetilde{L}_{n+1} \subset X(U)$, для якого

$$b_n(\mathfrak{M}, X) = \sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon\mathbb{S} \cap \widetilde{L}_{n+1} \subset \mathfrak{M}\},$$

то він буде екстремальним для бернштейнівського n-поперечника.

Нехай $\mathfrak{N}_n := \{\overrightarrow{M}_n = (m_1, \ldots, m_n) : m_j \in \mathbb{Z}_+, j = \overline{1,n}, m_1 < m_2 < \ldots < m_n\}$. Символом $L(\overrightarrow{M}_n)$ позначимо n-вимірний підпростір поліномів вигляду

$$L(\overrightarrow{M}_n) := \left\{ P_{\overrightarrow{M}_n}(z) = \sum_{j=1}^{n} a_j z^{m_j} : a_j \in \mathbb{C}, j = \overline{1,n} \right\}.$$

У 1974 році Р. С. Ісмагілов увів до розгляду поняття тригонометричного n-поперечника d_n^{T}, який у комплексному випадку можна записати таким чином [2]:

$$d_n^{\mathrm{T}}(\mathfrak{M}, X) = \inf\left\{ E(\mathfrak{M}, L(\overrightarrow{M}_n), X) : \overrightarrow{M}_n \subset \mathfrak{N}_n \right\}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.3}$$

Якщо існує підпростір $L(\overrightarrow{M}_n^*) \subset X(U)$, для якого

$$d_n^{\mathrm{T}}(\mathfrak{M}, X) = E(\mathfrak{M}, L(\overrightarrow{M}_n^*), X),$$

то він є екстремальним для множини $\mathfrak{M}$ у просторі $X(U)$.

Між указаними n-поперечниками, коли $\mathfrak{M}$ є центрально-симетричною множиною, має місце така низка нерівностей:

$$b_n(\mathfrak{M}, X) \le d_n(\mathfrak{M}, X) \le d_n^{\mathrm{T}}(\mathfrak{M}, X) \le E(\mathfrak{M}, \mathcal{P}_{n-1}, X), \tag{5.4}$$

де $\mathcal{P}_{n-1} := \left\{ p_{n-1}(z) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j : a_j \in \mathbb{C}, j = \overline{0, n-1} \right\}$.

5.2. Неперервну функцію Ω, яка зростає на $[0,\infty)$ й така, що $\Omega(0) = 0$, будемо називати мажорантою. Мажоранту Ω ще називають k-мажорантою, $k \in \mathbb{N}$ [3] (гл. 1, § 2, пункт 3), якщо функція $\Omega(t)/t^k$ не зростає на інтервалі $(0,\infty)$, тобто

$$\frac{\Omega(t_1)}{t_1^k} \ge \frac{\Omega(t_2)}{t_2^k}, \tag{5.5}$$

де $0 < t_1 \le t_2 < \infty$. Скрізь далі вважаємо, що мажоранта Ω є 1-мажорантою.

Розглянемо функції

$$B_s^*(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+(j \ge s)} \beta_j^* z^j, \quad s \in \mathbb{Z}_+, \quad \text{і} \quad B_m(z) = \sum_{j \in \mathbb{N}(j \ge m)} \beta_j z^j, \quad m \in \mathbb{Z}_+,$$

коефіцієнти Тейлора яких $\{\beta_j^*\}_{j \in \mathbb{Z}_+(j \ge s)}$ і $\{\beta_j\}_{j \in \mathbb{N}(j \ge m)}$ відповідно задовольняють вимоги зауваження 1 із роботи [1]. За допомогою цих функцій визначимо такі класи:

$$W_X(\mathcal{K}_{B_m}, \Omega) := \left\{ f \in X(U) : \mathcal{K}_{B_m}(f,t)_X \le \Omega(t) \ \ \forall t \in (0,\pi] \right\},$$

де

$$\mathcal{K}_{B_m}(f,t)_X = \inf\left\{ \|f-g\|_X + t\|D(B_m, g)\|_X : g \in X(U, D(B_m)\right\}, \quad t \ge 0, \tag{5.6}$$

$$X(U, D(B_m)) = \{g \in A(U) \colon D(B_m, g) \in X(U)\},$$

де $A(U)$ — множина аналітичних у крузі U функцій, $D(B_m, g)$ — композиція Адамара функцій $B_m(z)$ і $g(z) \in A(U)$. Формулою (5.6) визначається узагальнений K-функціонал, уведений в [1]. Далі будемо вважати, що

$$W_X(D(B_s^*); \mathcal{K}_{B_m}, \Omega) := \big\{f \in X(U, D(B_s^*)) \colon D(B_s^*, f) \in W_X(\mathcal{K}_{B_m}, \Omega)\big\}. \tag{5.7}$$

Не зменшуючи загальності, надамо певну конкретизацію класів (5.7) у випадку, коли $X(U) = H_q$, $1 \le q \le \infty$. Нагадаємо (див. [1]), що при $m = 1$ і

$$B_1(z) = \widetilde{B}_1^{l,\arg}(z) = \sum_{j \in \mathbb{N}} (ij)^l z^j, \quad l \in \mathbb{N},$$

для $f \in H_q$ маємо

$$K_{l,\arg}(f, t)_q := \mathcal{K}_{\widetilde{B}_1^{l,\arg}}(f, t)_{H_q} = \inf\big\{\|f - g\|_q + t\|g_{\arg}^{(l)}\|_q \colon g \in H_q^{l,\arg}\big\}. \tag{5.8}$$

Якщо ж $m = l$, $l \in \mathbb{N}$, і

$$B_l(z) = \widehat{B}_l(z) = \sum_{j \in \mathbb{N}(j \ge l)} \alpha_{j,l} z^j,$$

де $\alpha_{j,l} = \prod_{\nu=0}^{l-1}(j - \nu)$, то для $f \in H_q$ з (5.6) одержимо [1]

$$\widetilde{K}_l(f, t)_q := \mathcal{K}_{\widehat{B}_l}(f, t)_{H_q} = \inf\big\{\|f - g\|_q + t\|g^{(l)}\|_q \colon g \in H_q^l\big\}. \tag{5.9}$$

Тут $g_{\arg}^{(l)}(z) = \dfrac{\partial^l g(\rho \exp(it))}{\partial t^l}$, а $g^{(l)}(z) = \dfrac{d^l g(z)}{dz^l}$.

Використовуючи замість функцій $B_s^*(z)$, $s \in \mathbb{Z}_*$, наприклад, функції [1]

$$B_1^*(z) = \widetilde{B}_1^{r,\arg}(z) = \sum_{j \in \mathbb{N}} (ij)^r z^j, \quad r \in \mathbb{N},$$

або функції

$$B_r^*(z) = \widehat{B}_r(z) = \sum_{j \in \mathbb{N}(j \ge r)} \alpha_{j,r} z^j, \quad r \in \mathbb{N},$$

з (5.7) – (5.9) отримуємо такі класи:

$$W_{l,\arg}^{r,\arg} H_q(\Omega) := W_{H_q}(D(\widetilde{B}_1^{r,\arg}); \mathcal{K}_{\widetilde{B}_1^{l,\arg}}, \Omega) =$$

$$= \big\{f \in H_q^{r,\arg} \colon K_{l,\arg}(f_{\arg}^{(r)}, t)_q \le \Omega(t) \;\; \forall t \in (0, \pi]\big\}, \tag{5.10}$$

$$W_l^r H_q(\Omega) := W_{H_q}(D(\widehat{B}_r); \mathcal{K}_{\widehat{B}_l}, \Omega) = \big\{f \in H_q^r \colon \widetilde{K}_l(f^{(r)}, t) \le \Omega(t) \;\; \forall t \in (0, \pi]\big\}, \tag{5.11}$$

$$W_{l,\arg}^r H_q(\Omega) := W_{H_q}(D(\widehat{B}_r); \mathcal{K}_{\widetilde{B}_1^{l,\arg}}, \Omega) =$$

$$= \big\{f \in H_q^r \colon K_{l,\arg}(f^{(r)}, t) \le \Omega(t) \;\; \forall t \in (0, \pi]\big\}, \tag{5.12}$$

$$W_l^{r,\arg} H_q(\Omega) := W_{H_q}(D(\widetilde{B}_1^{r,\arg}); \mathcal{K}_{\widehat{B}_l}, \Omega) =$$

$$= \left\{ f \in H_q^{r,\arg} : \widetilde{K}_l(f_{\arg}^{(r)}, t) \le \Omega(t) \ \ \forall t \in (0, \pi] \right\}. \tag{5.13}$$

***5.3.* Теорема 2.** *Нехай $s, m \in \mathbb{Z}_+$, функції $B_s^*(Z)$ і $B_m(z)$ задовольняють вимоги зауваження 1 та твердження 3 із [1] і є припустимими у крузі U_ρ, $0 < \rho \le 1$; $X_\rho(U)$ — будь-який банаховий простір: Гарді, Бергмана або Гварадзе у крузі U_ρ. Тоді для довільного натурального числа $n > \max(s, m)$ мають місце рівності*

$$\Pi_n(W_X(D(B_s^*); \mathcal{K}_{B_m}, \Omega), X_\rho) = E(W_X(D(B_s^*); \mathcal{K}_{B_m}, \Omega), \mathcal{P}_{n-1}, X_\rho) = \frac{\rho^n}{|\beta_n^*|} \Omega\left(\frac{1}{|\beta_n|}\right), \tag{5.14}$$

де X_ρ — простір $X_\rho(U)$, $\Pi_n(\mathfrak{M}, X_\rho)$ — будь-який n-поперечник: бернштейнівський, колмогоровський або тригонометричний центрально-симетричної множини $\mathfrak{M} \subset X_\rho(U)$. При цьому підпростір алгебраїчних поліномів $\mathcal{P}_{n-1}$ буде екстремальним для колмогоровського і тригонометричного n-поперечників, а підпростір $\mathcal{P}_n$ — для бернштейнівського n-поперечника.

Доведення. З теореми 1 (див. [1]) та означення класу $W_X(D(B_s^*); \mathcal{K}_{B_m}, \Omega)$ отримаємо оцінку зверху його найкращого наближення елементами підпростору $\mathcal{P}_{n-1}$, а саме,

$$E(W_X(D(B_s^*); \mathcal{K}_{B_m}, \Omega), \mathcal{P}_{n-1}, X_\rho) \le \frac{\rho^n}{|\beta_n^*|} \Omega\left(\frac{1}{|\beta_n|}\right). \tag{5.15}$$

Виходячи з (5.4), обчислимо оцінку знизу бернштейнівського n-поперечника досліджуваного класу функцій. Для цього скористаємось означенням поперечника (5.2) і в підпросторі поліномів $\mathcal{P}_n$ розглянемо кулю $\sigma_{n+1}(\widetilde{\varepsilon})$ радіуса

$$\widetilde{\varepsilon} := \frac{\rho^n}{|\beta_n^*|} \Omega\left(\frac{1}{|\beta_n|}\right), \tag{5.16}$$

тобто $\sigma_{n+1}(\widetilde{\varepsilon}) := \widetilde{\varepsilon}\mathbb{S} \cap \mathcal{P}_n = \{p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\|_{X_\rho} \le \widetilde{\varepsilon}\}$.

Покажемо, що множина $\sigma_{n+1}(\widetilde{\varepsilon})$ належить класу $W_X(D(B_s^*); \mathcal{K}_{B_m}, \Omega)$. Оскільки для довільного полінома $p_n(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ $(n > \max(s, m))$ його композицією Адамара є функція $D(B_m, p_n; z) = \sum_{j=m}^n \beta_j a_j z^j$, то очевидно, що $p_n \in X(U, D(B_m))$. Покладаючи у формулі (5.6) для $f = p_n$ послідовно $g \equiv 0$ і $g = p_n$, одержуємо співвідношення

$$\mathcal{K}_{B_m}(p_n, t)_X \le \min\{\|p_n\|_X, t\|D(B_m, p_n)\|_X\}, \quad t \ge 0. \tag{5.17}$$

Використовуючи отриману в твердженні 3 з [1] нерівність

$$\|D(B_m, p_n)\|_X \le |\beta_n| \, \|p_n\|_X, \tag{5.18}$$

з (5.17) маємо

$$\mathcal{K}_{B_m}(p_n, t)_X \le \|p_n\|_X \min(1, t|\beta_n|), \quad t \ge 0. \tag{5.19}$$

Нехай поліном $p_n(z)$ є довільним елементом множини $\sigma_{n+1}(\widetilde{\varepsilon})$. Розглянемо два випадки: $0 < |\beta_n| \le 1/\pi$ і $1/\pi < |\beta_n|$.

Оскільки у першому випадку маємо $\pi \le 1/|\beta_n|$, то, використовуючи співвідношення (5.19), формулу (5.18) для функції B_s^*, нерівність [1] (твердження 2)

$$\|p_n\|_X \le \frac{1}{\rho^n} \|p_n\|_{X_\rho} \tag{5.20}$$

і формулу (5.16), для довільного значення $t \in (0, \pi]$ отримуємо низку нерівностей

$$\mathcal{K}_{B_m}(D(B_s^*, p_n), t)_X \leq t|\beta_n| \, \|D(B_s^*, p_n)\|_X \leq t|\beta_n| \, |\beta_n^*| \, \|p_n\|_X \leq$$

$$\leq \frac{t}{\rho^n}|\beta_n| \, |\beta_n^*| \, \|p_n\|_{X_\rho} \leq t|\beta_n| \, \Omega\left(\frac{1}{|\beta_n|}\right). \tag{5.21}$$

Оскільки функція Ω є 1-мажорантою, то згідно з (5.5) для неї виконується нерівність

$$\frac{\Omega(t_1)}{t_1} \geq \frac{\Omega(t_2)}{t_2}, \tag{5.22}$$

де $0 < t_1 \leq t_2 < \infty$. Покладаючи у (5.22) $t_1 = t$, де $0 < t \leq \pi$, і $t_2 = 1/|\beta_n|$, з (5.21) одержуємо

$$\mathcal{K}_{B_m}(D(B_s^*, p_n), t)_X \leq \Omega(t). \tag{5.23}$$

У другому випадку маємо $0 < 1/|\beta_n| < \pi$. Щодо змінної $t \in (0, \pi]$ розглянемо дві можливі ситуації: $0 < t \leq 1/|\beta_n|$ або $1/|\beta_n| < t \leq \pi$. Нехай має місце перша з них. Використовуючи формули (5.19), (5.18), (5.20), (5.16) та (5.22), де $t_1 = t$, а $t_2 = 1/|\beta_n|$, для довільного елемента $p_n \in \sigma_{n+1}(\widetilde{\varepsilon})$, як і у першому випадку, отримуємо нерівність (5.23).

Якщо ж має місце друга ситуація, то скористаємося формулами (5.19), (5.18), (5.20), (5.16) та монотонністю функції Ω. В результаті для довільного полінома $p_n \in \sigma_{n+1}(\widetilde{\varepsilon})$ маємо

$$\mathcal{K}_{B_m}(D(B_s^*, p_n), t)_X \leq \|D(B_s^*, p_n)\|_X \leq \; |\beta_n^*| \, \|p_n\|_X \leq \frac{|\beta_n^*|}{\rho^n} \, \|p_n\|_{X_\rho} \leq \Omega\left(\frac{1}{|\beta_n|}\right) \leq \Omega(t).$$

Таким чином, показано правильність включення $\sigma_{n+1}(\widetilde{\varepsilon}) \subset W_X(D(B_s^*); \mathcal{K}_{B_m}, \Omega)$. Використовуючи означення бернштейнівського n-поперечника (5.2) і формулу (5.16), отримуємо оцінку знизу

$$b_n(W_X(D(B_s^*); \mathcal{K}_{B_m}, \Omega), X_\rho) \geq$$

$$\geq \sup\{\varepsilon : \varepsilon\mathbb{S} \cap \mathcal{P}_n \subset W_X(D(B_s^*); \mathcal{K}_{B_m}, \Omega)\} \geq \widetilde{\varepsilon} = \frac{\rho^n}{|\beta_n^*|}\Omega\left(\frac{1}{|\beta_n|}\right). \tag{5.24}$$

Рівності (5.14) одержимо зі співвідношень (5.4), (5.15) і (5.24), що і завершить доведення теореми 2.

Не зменшуючи загальності, конкретизуємо у введених нами позначеннях теорему 2 для просторів Гарді. Для цього скористаємося співвідношеннями (5.8) – (5.13), де $l = m$, і (5.14).

Наслідок 2. *Нехай $r, m \in \mathbb{N}$ і $0 < \rho \leq 1$. Якщо*

$$B_1^*(z) := \widetilde{B}_1^{r,\arg}(z) = \sum_{j \in \mathbb{N}} (ij)^r z^j \quad i \quad B_1(z) := \widetilde{B}_1^{m,\arg}(z) = \sum_{j \in \mathbb{N}} (ij)^m z^j, \tag{5.25}$$

то для будь-якого натурального числа $n > 1$ мають місце рівності

$$\Pi_n(W_{m,\arg}^{r,\arg} H_q(\Omega); H_{q,\rho}) = E(W_{m,\arg}^{r,\arg} H_q(\Omega); \mathcal{P}_{n-1}; H_{q,\rho}) = \frac{\rho^n}{n^r}\Omega\left(\frac{1}{n^m}\right).$$

Якщо

$$B_r^*(z) := \widehat{B}_r(z) = \sum_{j\in\mathbb{N}(j\geq r)} \alpha_{j,r} z^j \quad i \quad B_m(z) := \widehat{B}_m(z) = \sum_{j\in\mathbb{N}(j\geq m)} \alpha_{j,m} z^j, \tag{5.26}$$

то для довільного натурального числа $n > \max(r, m)$ *справджуються рівності*

$$\Pi_n(W_m^r H_q(\Omega); H_{q,\rho}) = E(W_m^r H_q(\Omega); \mathcal{P}_{n-1}; H_{q,\rho}) = \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}} \Omega\left(\frac{1}{\alpha_{n,m}}\right).$$

Якщо

$$B_r^*(z) := \widehat{B}_r(z) \quad i \quad B_1(z) := \widetilde{B}_1^{m,\arg}(z), \tag{5.27}$$

то для будь-якого натурального числа $n > r$ *правильними є рівності*

$$\Pi_n(W_{m,\arg}^r H_q(\Omega); H_{q,\rho}) = E(W_{m,\arg}^r H_q(\Omega); \mathcal{P}_{n-1}; H_{q,\rho}) = \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}} \Omega\left(\frac{1}{n^m}\right).$$

Якщо ж

$$B_1^*(z) := \widetilde{B}_1^{r,\arg}(z) \quad i \quad B_m(z) := \widehat{B}_m(z), \tag{5.28}$$

то для довільного натурального числа $n > m$ *справедливими є рівності*

$$\Pi_n(W_m^{r,\arg} H_q(\Omega); H_{q,\rho}) = E(W_m^{r,\arg} H_q(\Omega); \mathcal{P}_{n-1}; H_{q,\rho}) = \frac{\rho^n}{n^r} \Omega\left(\frac{1}{\alpha_{n,m}}\right),$$

де $\Pi_n(\mathfrak{M}; H_{q,\rho})$ — *будь-який із* n*-поперечників центрально-симетричної множини* $\mathfrak{M} \subset H_{q,\rho}$, *перерахованих у теоремі* 2.

Зазначимо, що одним із прикладів мажоранти Ω, для якої виконується умова (5.22), є довільний опуклий догори модуль неперервності ω, означений на множині $[0, \infty)$ [4] (гл. 2, § 1). Інші приклади мажорант, що задовольняють умову (5.22), наведено в роботах [5 – 7].

6. Точні значення модулів коефіцієнтів Тейлора на класах функцій $W_X(D(B_s^*); \mathcal{K}_{B_m}, \Omega)$, $s, m, \in \mathbb{Z}_+$. Питання щодо знаходження точних верхніх меж коефіцієнтів Фур'є на різних класах функцій дійсної змінної досліджувалися, наприклад, у роботах О. В. Єфімова, О. П. Тімана, М. П. Корнєйчука, В. І. Бердишева, С. О. Теляковського, А. І. Степанця та інших. У випадку аналітичних функцій комплексної змінної подібні задачі розглядалися, наприклад, у роботах [2, 8, 9].

Нехай $\mathfrak{M}$ — центрально-симетрична множина у банаховому просторі $X_\rho(U)$, $0 < \rho \leq 1$. Введемо позначення

$$\mathcal{L}_n(\mathfrak{M}) := \sup\{|c_n(f)| : f \in \mathfrak{M}\}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{6.1}$$

де $c_n(f)$ $(n \in \mathbb{N})$ — коефіцієнти Тейлора функції f.

Теорема 3. *Нехай функції* $B_s^*(z)$ *і* $B_m(z)$, $s, m \in \mathbb{Z}_+$, *задовольняють умови теореми* 2 *і функція* Ω *є мажорантою. Тоді для будь-якого натурального числа* $n > \max(s, m)$ *має місце співвідношення*

$$\mathcal{L}_n(W_X(D(B_s^*); \mathcal{K}_{B_m}, \Omega)) =$$

$$= \frac{1}{|\beta_n^*|}\Omega\left(\frac{1}{|\beta_n|}\right)\begin{cases} 1, & \text{якщо } X_\rho(U) = H_{q,\rho}, \quad 1 \le q \le \infty, \\ \left(\dfrac{nq}{2}+1\right)^{1/q}, & \text{якщо } X_\rho(U) = H'_{q,\rho}, \quad 1 \le q < \infty, \\ B^{-1/\lambda}(n\lambda+1, \lambda(1/p-1/q)), & \text{якщо } X_\rho(U) = \mathfrak{B}_\rho(p,q,\lambda), \\ & \qquad 0 < p < q \le \infty, \\ & \qquad 1 \le \lambda \le \infty, \min(q,\lambda) \ge 1, \end{cases} \tag{6.2}$$

де $0 < \rho \le 1,\ B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt\ (a,b>0)$ — *інтеграл Ейлера першого роду.*

Доведення. Для коефіцієнтів Тейлора $c_n(f),\ n \in \mathbb{N}$, довільної функції $f \in A(U)$ і будь-якого алгебраїчного полінома $p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$ маємо

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=r} f(\xi)\xi^{-(n+1)}d\xi = \frac{1}{2\pi r^n}\int\limits_0^{2\pi}(f(re^{it}) - p_{n-1}(re^{it}))e^{-int}dt,$$

де $0 < r < 1$. Використовуючи нерівність Гельдера, звідси одержуємо

$$|c_n(f)| \le \frac{1}{2\pi r^n}\int\limits_0^{2\pi}|f(re^{it}) - p_{n-1}(re^{it})|dt \le \frac{1}{r^n}M_q(f - p_{n-1}; r), \quad 1 \le q \le \infty.$$

Вважаючи $r := \rho R$, де $0 < \rho \le 1,\ 0 < R < 1$, маємо

$$R^n|c_n(f)| \le \frac{1}{\rho^n}M_q(f - p_{n-1}; \rho R). \tag{6.3}$$

Не зменшуючи загальності, розглянемо випадок, коли $X_\rho(U) = \mathfrak{B}_\rho(p,q,\lambda)$, де $0 < p < q \le \infty,\ \min(\lambda, q) \ge 1,\ \lambda \ne \infty$. Виконаємо над обома частинами нерівності (6.3) послідовно такі дії: піднесемо їх до степеня λ, помножимо на величину $(1-R)^{\lambda(1/p-1/q)-1}$, зінтегруємо по R в межах від 0 до 1 і піднесемо до степеня $1/\lambda$. Використовуючи означення норми у банаховому просторі Гварадзе (див. [1]), в результаті отримуємо оцінку зверху

$$|c_n(f)| \le \frac{E(f, \mathcal{P}_{n-1}, \mathfrak{B}_\rho(p,q,\lambda))}{\rho^n B^{1/\lambda}(n\lambda+1, \lambda(1/p-1/q))}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6.4}$$

З (5.14), (6.1) і (6.4) одержуємо нерівність

$$\mathcal{L}_n(W_{\mathfrak{B}(p,q,\lambda)}(D(B_s^*); \mathcal{K}_{B_m}, \Omega)) \le \frac{E(W_{\mathfrak{B}(p,q,\lambda)}(D(B_s^*); \mathcal{K}_{B_m}, \Omega), \mathcal{P}_{n-1}, \mathfrak{B}_\rho(p,q,\lambda))}{\rho^n B^{1/\lambda}(n\lambda+1, \lambda(1/p-1/q))} =$$

$$= \frac{1}{|\beta_n^*|B^{1/\lambda}(n\lambda+1, \lambda(1/p-1/q))}\Omega\left(\frac{1}{|\beta_n|}\right), \quad n > \max(s,m). \tag{6.5}$$

Якщо $\lambda = \infty$, то, переходячи в (6.5) до границі при $\lambda \to \infty$, записуємо оцінку зверху

$$\mathcal{L}_n(W_{\mathfrak{B}(p,q,\infty)}(D(B_s^*); \mathcal{K}_{B_m}, \Omega)) \le$$

$$\leq \frac{1}{|\beta_n^*| \sup\{R^n(1-R)^{1/p-1/q} \colon 0 < R < 1\}} \Omega\left(\frac{1}{|\beta_n|}\right), \quad n > \max(s, m). \tag{6.6}$$

Отримаємо оцінку знизу досліджуваної екстремальної характеристики. Для цього розглянемо функцію

$$f_1(z) := \frac{\rho^n}{|\beta_n^*|}\, \Omega\left(\frac{1}{|\beta_n|}\right) \frac{z^n}{\|z^n\|_{\mathfrak{B}_\rho(p,q,\lambda)}}. \tag{6.7}$$

Оскільки

$$\|f_1\|_{\mathfrak{B}_\rho(p,q,\lambda)} = \frac{\rho^n}{|\beta_n^*|}\, \Omega\left(\frac{1}{|\beta_n|}\right) = \widetilde{\varepsilon}, \tag{6.8}$$

де величину $\widetilde{\varepsilon}$ було введено при доведенні теореми 5.1 (див. формулу (5.16)), то (6.8) означає, що функція f_1 належить кулі $\sigma_{n+1}(\widetilde{\varepsilon})$, яка, в свою чергу, є підмножиною класу $W_{\mathfrak{B}(p,q,\lambda)}(D(B_s^*); \mathcal{K}_{B_m}, \Omega)$. Зважаючи на те, що

$$\|z^n\|_{\mathfrak{B}_\rho(p,q,\lambda)} = \rho^n B^{1/\lambda}(n\lambda + 1, \lambda(1/p - 1/q)),$$

з (6.1) та (6.7) для $n > \max(s, m)$ маємо

$$\mathcal{L}_n(W_{\mathfrak{B}(p,q,\lambda)}(D(B_s^*); \mathcal{K}_{B_m}, \Omega)) \geq |c_n(f_1)| = \frac{1}{|\beta_n^*| B^{1/\lambda}(n\lambda + 1; \lambda(1/p - 1/q))} \Omega\left(\frac{1}{|\beta_n|}\right), \tag{6.9}$$

де $1 \leq \lambda \leq \infty$. Співвідношення (6.2), де $X_\rho(U) = \mathfrak{B}_\rho(p, q, \lambda)$, одержимо, використавши формули (6.5), (6.6) і (6.9).

Теорему 3 доведено.

Як і для теорем 1 (див. [1]) і 2, наведемо конкретизацію теореми 3 на прикладі просторів Гарді H_q, $1 \leq q \leq \infty$.

Наслідок 3. *Нехай $r, m \in \mathbb{N}$. Якщо функції $B_1^*(z)$ і $B_1(z)$ визначаються формулами* (5.25), *то для довільного натурального числа $n > 1$ має місце рівність*

$$\mathcal{L}_n(W_{m,\arg}^{r,\arg} H_q(\Omega)) = \frac{1}{n^r} \Omega\left(\frac{1}{n^m}\right).$$

Якщо функції $B_r^*(z)$ і $B_m(z)$ визначаються формулами (5.26), *то для будь-якого натурального числа $n > \max(r, m)$ правильним є співвідношення*

$$\mathcal{L}_n(W_m^r H_q(\Omega)) = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \Omega\left(\frac{1}{\alpha_{n,m}}\right).$$

Якщо функції $B_r^*(z)$ і $B_1(z)$ визначаються формулами (5.27), *то для довільного натурального числа $n > r$ справджується рівність*

$$\mathcal{L}_n(W_{m,\arg}^r H_q(\Omega)) = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \Omega\left(\frac{1}{n^m}\right).$$

Якщо ж функції $B_1^*(z)$ і $B_m(z)$ визначаються формулами (5.28), *то для будь-якого натурального числа $n > m$ справедливою є рівність*

$$\mathcal{L}_n(W_m^{r,\arg} H_q(\Omega)) = \frac{1}{n^r} \Omega\left(\frac{1}{\alpha_{n,m}}\right).$$

Література

1. С. Б. Вакарчук, М. Б. Вакарчук, *K-функціонали та екстремальні задачи теорії апроксимації класів аналітичних у крузі функцій. I*, Укр. мат. журн., **74**, № 4, 469 – 485 (2022).
2. S. B. Vakarchuk, *On some extremal problems of approximation theory in the complex plane*, Ukr. Math. J., **56**, № 9, 1371 – 1390 (2004).
3. И. А. Шевчук, *Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций*, Наук. думка, Киев (1992).
4. И. К. Даугавет, *Введение в теорию приближения функций*, Ленингр. гос. ун-т, Ленинград (1977).
5. S. B. Vakarchuk, *K-functionals and exact values of n-widths of some classes in L_2*, Math. Notes, **66**, № 4, 404 – 408 (1999).
6. С. Б. Вакарчук, *О точных значениях n-поперечников функциональных классов в банаховых пространствах H_p*, Доп. НАН України, **9**, 7 – 10 (2000).
7. S. B. Vakarchuk, *K-functionals and exact values of n-widths of certain classes in the spaces $C(2\pi)$ and $L_1(2\pi)$*, Math. Notes, **71**, № 4, 477 – 485 (2002).
8. S. B. Vakarchuk, M. Sh. Shabozov, *The widths of classes of analytic functions in a disc*, Sb. Math., **201**, № 8, 1091 – 1110 (2010).
9. M. Sh. Shabozov, Kh. M. Khuromonov, *On the best approximation in the mean of functions of a complex variable by Fourier series in the Bergman space*, Russian Math., **64**, № 2, 66 – 83 (2020).

Одержано 03.11.21