DOI: 10.37863/umzh.v74i2.6984

УДК 519.62, 519.63

В. Б. Василик* (Ін-т математики НАН України, Київ),
І. П. Гаврилюк (Університет дуальної освіти Гера-Айзенах, Німеччина),
В. Л. Макаров** (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНО ЗБІЖНИЙ МЕТОД НАБЛИЖЕННЯ ДЛЯ РІВНЯННЯ З ДРОБОВОЮ ПОХІДНОЮ І НЕОБМЕЖЕНИМ ОПЕРАТОРНИМ КОЕФІЦІЄНТОМ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

We propose and analyze an exponentially convergent numerical method for solving a differential equation with a right-hand fractional Riemann – Liouville derivative and unbounded operator coefficient in Banach space. We use the representation of the solution by the Danford – Cauchy integral on a hyperbola, which covers the spectrum of the operator coefficient, with subsequent application of an exponentially convergent quadrature. To this end, we choose the parameters of the hyperbola in such a way that the integration function has an analytic extension in a strip containing the real axis, and then apply the Sinc-quadrature. We prove the exponential accuracy of the method and present a numerical example that confirms the obtained a priori estimate.

Запропоновано та проаналізовано експоненціально збіжний наближений метод розв’язування диференціального рівняння з правосторонньою дробовою похідною Рімана – Ліувілля і необмеженим операторним коефіцієнтом у банаховому просторі. Застосовано зображення розв’язку за допомогою інтеграла Данфорда – Коші по гіперболі, що охоплює спектр операторного коефіцієнта, з подальшим застосуванням експоненціально збіжної квадратурної формули. Для цього вибрано параметри гіперболи таким чином, щоб підінтегральна функція мала аналітичне продовження в смугу навколо дійсної осі, а потім застосовано Sinc-квадратуру. Показано експоненціальну точність методу і наведено числові розрахунки тестового прикладу, що підтверджують апріорну оцінку.

1. Вступ. За останні роки значно збільшився інтерес до диференціальних рівнянь з дробовими похідними. Це пов’язано з тим, що дробовий аналіз знайшов широке застосування в моделюванні багатьох природних і соціальних явищ, про що свідчить величезна кількість публікацій і конференцій. Найчастіше такі задачі виникають при моделюванні явищ лінійної в’язкопружності. Також ефективним є використання дробових похідних у моделях аномальної дифузії, теорії керування, електродинаміки, нелінійної гідроакустики тощо.

Дифузія — один із найважливіших механізмів переносу, що зустрічаються в природі. Класична дифузійна модель $\partial_t u - Au = f$, яка використовує похідну першого порядку $\partial_t u$ за часом та оператор Лапласа $Au = -\Delta u$ в просторі, базується на припущенні, що рух частинок є броунівським. Одна з характерних рис броунівського руху — це лінійне зростання середньоквадратичного переміщення частинок з часом t. Велика кількість експериментальних досліджень за останні кілька десятиліть вказує на те, що припущення про броунівський рух не може бути достатнім для точного опису деяких фізичних процесів, а середнє зміщення в квадраті може зростати або сублінійно, або суперлінійно з часом t, що відомо в літературі як субдифузія та супердифузія відповідно (див., наприклад, [1]). Ці експериментальні дослідження охоплюють надзвичайно широкий і різноманітний спектр і мають важливе практичне застосування в техні-

* Підтримано Національним фондом досліджень України (проєкт № 2020.02-0089).

** Роботу виконано в рамках цільової програми наукових досліджень НАН України „Математичне моделювання у міждисциплінарних дослідженнях процесів і систем на основі інтелектуальних суперкомп’ютерних, грід- і хмарних технологій” (проєкт № 10.2021.ММ).

ці, фізиці, біології та фінансах, включаючи переміщення електронів у копіювальному апараті, термічну дифузію у фрактальних областях, перенесення білка в клітинній мембрані тощо.

Вихідне рівняння пов'язує дробову похідну невідомої функції в часі з просторовим оператором A. Вхідні дані задачі та вихідні (розв'язки) поєднані за допомогою так званого розв'язуючого оператора $E_{1+\alpha}\left(-At^{1+\alpha}\right)$, який відображає вхідні дані у вихідні. Зв'язок між дробовою похідною та дробовими степенями операторів вивчався, наприклад, у [2]. В [3] було запропоновано алгоритмічне зображення дробових степенів додатного оператора A.

У цій роботі ми розглядаємо диференціальне рівняння з дробовою похідною Рімана – Ліувілля на півінтервалі та необмеженим операторним коефіцієнтом.

Велику кількість робіт присвячено різним методам дискретизації для таких математичних моделей (див., наприклад, [4]). Недолік деяких дискретизацій (див., наприклад, [4]) полягає в тому, що сталі в оцінках точності експоненціально залежать від t. Експоненціальна збіжність наближень до операторнозначних функцій та диференціальні рівняння з необмеженими операторними коефіцієнтами відіграють вирішальну роль при отриманні алгоритмів оптимальної або майже оптимальної складності [5, 6].

Ця робота продовжує цикл робіт з експоненціально збіжних наближених методів розв'язування диференціальних рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами. Зазначимо, що такі методи були розроблені також для задач з необмеженими операторними коефіцієнтами та різного роду нелокальними умовами (див., наприклад, [7 – 10]). Ми пропонуємо та обґрунтовуємо зображення розв'язку рівняння теплопровідності з дробовою похідною та з абстрактним операторним коефіцієнтом A.

2. Операторнозначні функції як оператори розв'язку диференціальних задач. Розглянемо задачу

$$-{}_tD_{\infty}^{\alpha+1}u(t)+Au(t)=0,\quad t\in(0,\infty),\quad \alpha\in(-1,1),$$
$$u(0)=u_0, \tag{2.1}$$

де ${}_tD_{\infty}^{1+\alpha}$ — (правостороння) похідна Рімана – Ліувілля, що визначається таким чином:

$${}_tD_{\infty}^{\nu}f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-\nu)}\displaystyle\int_t^{\infty}(s-t)^{-\nu-1}f(s)\,ds, & \nu<0,\\ \dfrac{1}{\Gamma(1-\{\nu\})}\left(-\dfrac{d}{dt}\right)^{[\nu]+1}\displaystyle\int_t^{\infty}\dfrac{f(s)}{(s-t)^{\{\nu\}}}\,ds, & \nu\geq 0,\end{cases} \tag{2.2}$$

A — сильно додатний оператор із скрізь щільною областю визначення $D(A)$ у банаховому просторі X. Його спектр лежить у секторі $\Sigma(A)$,

$$\Sigma(A)=\left\{z=\rho_0+re^{i\theta}\colon r\in[0,\infty),\ 0<|\theta|\leq\varphi<\frac{\pi}{2},\ \rho_0>0\right\},$$

і на його границі Γ_{Σ} та поза нею є справедливою оцінка

$$\left\|(zI-A)^{-1}\right\|\leq\frac{M}{1+|z|} \tag{2.3}$$

з деякою додатною сталою M. В [11] показано, що при виконанні припущення

$$\begin{aligned} &\lim_{s\to\infty}\left[(s-t)^{\alpha+1}{}_sD_\infty^\alpha u(s)\right]=0,\\ &\lim_{s\to\infty}\left[(s-t)^{\alpha}{}_sD_\infty^{\alpha-1} u(s)\right]=0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

розв'язок має вигляд

$$u(t)=\exp\left(-A^{1/(1+\alpha)}t\right)u(0), \tag{2.5}$$

тобто розв'язуючий оператор задається як

$$S(t,A)=\exp\left(-A^{1/(1+\alpha)}t\right).$$

Цю формулу отримано шляхом застосування оператора (2.2) до рівняння (2.1) з урахуванням (2.4). Як наслідок отримуємо рівняння

$$-u(t)+A\,{}_tD_\infty^{-(\alpha+1)}u(t)=0,\quad t\in(0,\infty),\quad \alpha\in(-1,1),$$

що збігається з інтегральним рівнянням Гарді – Тітчмарша [12] (із заміною α на $\alpha+1$). Таким чином, його розв'язок має вигляд (2.5).

Побудуємо розв'язок задачі (2.1), використавши інтеграл Данфорда – Коші. Як показано в [11] (див. також [5]), його можна записати так:

$$u(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-tz^{1/(1+\alpha)}}\left[(zI-A)^{-1}-\frac{1}{z}I\right]u(0)dz, \tag{2.6}$$

де Γ — гладка крива, що охоплює спектр.

Будемо називати гіперболу

$$\Gamma_0=\{z(s)=a_0(\cosh s-1)+\rho_0-ib_0\sinh s\colon\, s\in(-\infty,\infty),\ b_0=a_0\tan\varphi,\ a_0\colon \rho_0-a_0>0\}$$

спектральною гіперболою. Вона обходить зліва спектр $\Sigma(A)$, а її асимптоти при $s\to\pm\infty$ утворюють з дійсною віссю кут φ. Для побудови експоненціально збіжного наближеного методу потрібно вибрати контур інтегрування так, щоб він охоплював Γ_0, обходячи його зліва, і при цьому існував інтеграл (2.6) [5]. Будемо шукати такий контур у вигляді гіперболи

$$\Gamma_I=\{z(s)=a_I(\cosh s-1)+q-ib_I\sinh s\colon\, s\in(-\infty,\infty)\},$$

і називатимемо її інтегральною гіперболою.

Вибравши за контур інтегрування Γ_I, з (2.6) отримаємо розв'язок задачі (2.1) у вигляді

$$u(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}F_A(t,\xi)u(0)\,d\xi, \tag{2.7}$$

де

$$F_A(t,\xi)=e^{-z(\xi)^{1/(1+\alpha)}t}\,(a_I\sinh\xi-ib_I\cosh\xi)\left[(z(\xi)I-A)^{-1}-\frac{1}{z(\xi)I}\right],$$

$$z(\xi)=a_I(\cosh\xi-1)+q-ib_I\sinh\xi.$$

За теоремою 2.2 з [5] коефіцієнти інтегральної гіперболи потрібно вибрати таким чином, щоб виконувалися дві умови:

1) операторнозначна функція $F_A(t,\xi)$ належить $H^p(D_d)$ для всіх $t \geq 0$ (див. також [13]),

$$D_d = \{z \in \mathbb{C}\colon -\infty < \Re z < \infty,\ |\Im z| < d\},$$

$$\|\mathcal{F}\|_{\mathbf{H}^p(D_d)} := \begin{cases} \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{\partial D_d(\epsilon)} \|\mathcal{F}(z)\|^p |dz|\right)^{1/p}, & \text{якщо} \quad 1 \leq p < \infty, \\ \lim_{\epsilon\to 0}\sup_{z\in D_d(\epsilon)} \|\mathcal{F}(z)\|, & \text{якщо} \quad p = \infty, \end{cases}$$

$D_d(\epsilon)$ визначено для $0 < \epsilon < 1$ як

$$D_d(\epsilon) = \{z \in \mathbb{C}\colon |\Re z| < 1/\epsilon,\ |\Im z| < d(1-\epsilon)\};$$

2) існують такі додатні сталі c, δ, що справджується оцінка

$$\|F_A(t,\xi)\| \leq ce^{-\delta|\xi|}, \quad \xi \in (-\infty,\infty), \quad t \geq 0.$$

Дослідимо спочатку виконання першої умови. Для цього побудуємо параметричну сім'ю кривих

$$\Gamma_I(\nu) = z(s+i\nu), \quad \nu \in \left[-\frac{d_1}{2}, \frac{d_1}{2}\right].$$

Тоді

$$z(s+i\nu) = a(\nu)\cosh s - a_I + q - ib(\nu)\sinh s,$$

де

$$a(\nu) = a_I\cos\nu + b_I\sin\nu = \sqrt{a_I^2+b_I^2}\sin(\psi+\nu),$$

$$b(\nu) = b_I\cos\nu - a_I\sin\nu = \sqrt{a_I^2+b_I^2}\cos(\psi+\nu),$$

$$\cos(\psi) = \frac{b_I}{\sqrt{a_I^2+b_I^2}}.$$

Коефіцієнти a_I, b_I виберемо так, щоб крива $\Gamma_I(\nu)$ при $\nu = -\frac{d_1}{2}$ була прямою, паралельною уявній осі, а при $\nu = \frac{d_1}{2}$ збігалась зі спектральною гіперболою. Такі вимоги приводять до очевидних рівностей

$$a\left(-\frac{d_1}{2}\right) = 0,$$

$$a\left(\frac{d_1}{2}\right) = a_0,$$

$$b\left(\frac{d_1}{2}\right) = b_0,$$

тобто

$$a_I\cos\frac{d_1}{2} - b_I\sin\frac{d_1}{2} = 0,$$

$$-a_I \sin\frac{d_1}{2} + b_I \cos\frac{d_1}{2} = b_0,$$

$$a_I \cos\frac{d_1}{2} + b_I \sin\frac{d_1}{2} = a_0.$$

Звідси отримуємо

$$a_I = a_0 \cos\frac{d_1}{2} - b_0 \sin\frac{d_1}{2},$$

$$b_I = a_0 \sin\frac{d_1}{2} + b_0 \cos\frac{d_1}{2},$$

$$2a_I \cos\frac{d_1}{2} = a_0.$$

З першого і третього рівнянь та визначення спектральної гіперболи маємо

$$\cos d_1 = \tan\varphi \sin d_1.$$

Таким чином, одержуємо

$$d_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

$$a_I = a_0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\varphi},$$

$$b_I = a_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\varphi},$$

$$a(\nu) = a_0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} - \nu\right)}{\cos\varphi},$$

$$b(\nu) = a_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} - \nu\right)}{\cos\varphi}.$$

Далі потрібно визначити параметр q. Для цього сформулюємо дві умови:

1) крива $\Gamma(\nu)$, $\nu \in \left[-\frac{d_1}{2}, \frac{d_1}{2}\right]$, повинна бути у правій півплощині і $F_A(t,\xi) \in H^p(D_d)$ $\forall t \geq 0$;

2) крива $\Gamma(\nu)$ не повинна потрапляти в спектральну область.

Ці умови приводять до системи

$$q - a_I > 0,$$

$$q - a_I < \rho_0.$$

Звідси отримуємо

$$a_I < q < \rho_0 + a_I$$

або

$$a_0\,\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\varphi}{2}\right)}{\cos\varphi} < q < a_0\,\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\varphi}{2}\right)}{\cos\varphi} + \rho_0.$$

Виберемо

$$a_0 = \frac{\cos\varphi}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\varphi}{2}\right)},$$

$$q = \frac{\rho_0}{2} + 1.$$

Тоді, очевидно, будуть виконуватись вказані умови.

Таким чином, ми довели таку лему.

Лема 2.1. *Нехай параметри кривих Γ_0 і Γ_I визначаються як*

$$a_0 = \frac{\cos\varphi}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\varphi}{2}\right)}, \quad b_0 = \frac{\sin\varphi}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\varphi}{2}\right)},$$

$$a_I = 1, \quad b_I = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$d_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi, \quad q = \frac{\rho_0}{2} + 1.$$

Тоді сім'я $\Gamma_I(\nu)$ для $\nu \in \left[-\dfrac{d_1}{2}, \dfrac{d_1}{2}\right]$ буде знаходитись у правій півплощині і не перетинатиме спектральну гіперболу Γ_Σ.

Враховуючи, що

$$\sqrt{a_I^2 + b_I^2} = \sqrt{1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{1}{\left|\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\varphi}{2}\right)\right|},$$

одержуємо

$$\sin(\psi) = \frac{1}{\sqrt{a_I^2 + b_I^2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$\cos(\psi) = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right).$$

Далі дослідимо умову належності $F_A(t,\xi)$ до $H^p(D_d)$ для всіх $t \geq 0$ і експоненціального спадання на $\pm\infty$. Для $z^{\frac{1}{1+\alpha}}(\xi)$ маємо

$$[z(\xi + i\nu)]^{\frac{1}{1+\alpha}} = [r(\xi,\nu)]^{\frac{1}{1+\alpha}} \exp\left\{ i\,\frac{\theta(\psi+\nu,\xi)}{1+\alpha}\right\},$$

де

$$r(\xi,\nu) = |z(s + i\nu)|,$$

$$\cos\theta(\psi+\nu,\xi) = \frac{a(\nu)\cosh\xi + \dfrac{\rho_0}{2}}{r(\xi,\nu)} = \frac{\sqrt{a_I^2+b_I^2}\,\sin(\psi+\nu)\cosh\xi + \dfrac{\rho_0}{2}}{r(\xi,\nu)},$$

$$\sin\theta(\psi+\nu,\xi) = \frac{-\sqrt{a_I^2+b_I^2}\cos(\psi+\nu)\sinh\xi}{r(\xi,\nu)}.$$

Тоді для того, щоб

$$\left|\exp\left\{-z^{\frac{1}{1+\alpha}}(\xi)t\right\}\right| \to 0, \quad \xi\to\pm\infty,$$

потрібно вимагати, щоб

$$\cos\frac{\theta(\psi+\nu,\xi)}{1+\alpha} > 0.$$

Звідси з урахуванням нерівності $1+\alpha>0$ отримуємо

$$\left|\frac{\theta(\psi+\nu,\xi)}{1+\alpha}\right| < \frac{\pi}{2},$$

$$|\theta(\psi+\nu,\xi)| < \frac{\pi}{2}(1+\alpha). \tag{2.8}$$

Розглянемо випадок $-1<\alpha\le 0$. З нерівності (2.8) одержуємо

$$|\sin\theta(\psi+\nu,\xi)| < \sin\frac{\pi}{2}(1+\alpha) = \cos\frac{\pi\alpha}{2}.$$

Отже, маємо умову

$$\left|\frac{-\sqrt{a_I^2+b_I^2}\cos(\psi+\nu)\sinh\xi}{r(\xi,\nu)}\right| < \cos\frac{\pi\alpha}{2}.$$

Оцінимо ліву частину останньої нерівності. Оскільки

$$\psi = \frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}, \quad \nu\in\left[-\frac{d_1}{2},\frac{d_1}{2}\right] = \left[-\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2},\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right],$$

то

$$\psi+\nu\in\left[0,\frac{\pi}{2}-\varphi\right].$$

Таким чином,

$$\frac{\sqrt{a_I^2+b_I^2}\,|\sinh\xi|}{r(\xi,\nu)} =$$

$$= \frac{\sqrt{a_I^2+b_I^2}|\sinh\xi|}{\left[\left(\sqrt{a_I^2+b_I^2}\sin(\psi+\nu)\cosh\xi+\frac{\rho_0}{2}\right)^2+\left(\sqrt{a_I^2+b_I^2}\cos(\psi+\nu)\sinh\xi\right)^2\right]^{0{,}5}} =$$

$$= \frac{|\tanh\xi|}{\left[\left(\sin(\psi+\nu)+\frac{\rho_0}{2\sqrt{a_I^2+b_I^2}\cosh\xi}\right)^2+(\cos(\psi+\nu)\tanh\xi)^2\right]^{0{,}5}} \le$$

$$\leq \frac{|\tanh\xi|}{\left[\sin^2(\psi+\nu)+\cos^2(\psi+\nu)\tanh^2\xi\right]^{0,5}}.$$

Функція $f(y)=\dfrac{y}{\sqrt{a^2+b^2y^2}}$ при $y\in[0,\infty)$ є монотонно зростаючою, як і $\tanh y$. Тому

$$\frac{|\tanh\xi|}{\left[\sin^2(\psi+\nu)+\cos^2(\psi+\nu)\tanh^2\xi\right]^{0,5}}\leq\frac{1}{\left[\sin^2(\psi+\nu)+\cos^2(\psi+\nu)\right]^{0,5}}=1.$$

Отже,

$$\frac{\sqrt{a_I^2+b_I^2}|\cos(\psi+\nu)\sinh\xi|}{r(\xi,\nu)}\leq|\cos(\psi+\nu)|.$$

Таким чином, при виконанні умови

$$|\cos(\psi+\nu)|<\cos\frac{\pi\alpha}{2} \tag{2.9}$$

буде виконуватись умова (2.8). Тоді з (2.9) для $-1<\alpha\leq 0$ маємо

$$\psi+\nu>-\frac{\pi\alpha}{2},$$

що приводить до умови

$$\varphi<(1+\alpha)\frac{\pi}{2}. \tag{2.10}$$

Далі розглянемо випадок $0\leq\alpha<1$. Маємо

$$\cos\theta(\psi+\nu,\xi)=\frac{\dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\varphi}{2}\right)}\sin(\psi+\nu)\cosh\xi+\dfrac{\rho_0}{2}}{r(\xi,\nu)}>0,$$

оскільки

$$\psi+\nu\in\left[0,\frac{\pi}{2}-\varphi\right]\Rightarrow\sin(\psi+\nu)\geq 0,$$

$$0<\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)>0.$$

Тому

$$|\theta(\psi+\nu,\xi)|<\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}(1+\alpha).$$

Знайдемо $\|F_A(t,w)u(0)\|$ у смузі $w=\xi+i\nu\in D_1$. Згідно з теоремою 2.4 з [5] при $m=0$ маємо

$$\left\|\left[(z(\xi)I-A)^{-1}-\frac{I}{z(\xi)}\right]u_0\right\|\leq\frac{1}{|z(w)|}\frac{(1+M)K}{(1+|z(w)|)^{\gamma}}\|A^{\gamma}u(0)\|,\quad u(0)\in D\left(A^{\gamma}\right), \tag{2.11}$$

де невід'ємна стала K залежить від α.

Далі,

$$\left|\frac{z'(w)}{z(w)}\right| = \left|\frac{a(\nu)\sinh\xi - ib(\nu)\cosh\xi}{a(\nu)\cosh\xi + \dfrac{\rho_0}{2} - ib(\nu)\sinh\xi}\right| =$$

$$= \left[\frac{a^2(\nu)\sinh^2\xi + b^2(\nu)\cosh^2\xi}{\left(a(\nu)\cosh\xi + \dfrac{\rho_0}{2}\right)^2 + b^2(\nu)\sinh^2\xi}\right]^{0,5} = \left[\frac{a^2(\nu)\tanh^2\xi + b^2(\nu)}{\left(a(\nu) + \dfrac{\rho_0}{2\cosh\xi}\right)^2 + b^2(\nu)\tanh^2\xi}\right]^{0,5} \leq$$

$$\leq \left[\frac{a^2(\nu)\tanh^2\xi + b^2(\nu)}{a^2(\nu) + b^2(\nu)\tanh^2\xi}\right]^{0,5} \leq \max\left\{1, \left|\frac{a(\nu)}{b(\nu)}\right|\right\} = \max\left\{1, \tan(\psi+\nu)\right\}.$$

Оскільки $\psi + \nu \in \left[0, \dfrac{\pi}{2} - \varphi\right] \Rightarrow \tan(\psi+\nu) < \infty$, то

$$\left|\frac{z'(w)}{z(w)}\right| \leq \max\left\{1, \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right\} = c_1 < \infty, \tag{2.12}$$

$$\left|\exp\left\{-z^{\frac{1}{1+\alpha}}(\xi + i\nu)t\right\}\right| = \left|\exp\left\{-[r(\xi,\nu)]^{\frac{1}{1+\alpha}} \exp\left\{i\,\frac{\theta(\psi+\nu,\xi)}{1+\alpha}\right\} t\right\}\right| =$$

$$= \exp\left\{-[r(\xi,\nu)]^{\frac{1}{1+\alpha}} \cos\frac{\theta(\psi+\nu,\xi)}{1+\alpha}\, t\right\} \leq 1$$

при виконанні умови (2.10) для $-1 < \alpha \leq 0$ і для $\varphi < \dfrac{\pi}{2}$ при $0 < \alpha < 1$.

Далі, якщо $\nu \in \left(-\dfrac{d_1}{2}, \dfrac{d_1}{2}\right]$, то

$$\frac{1}{(1+|z(w)|)^\gamma} \leq \frac{1}{\left[\left(\dfrac{\sin(\psi+\nu)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\varphi}{2}\right)}\cosh\xi + \dfrac{\rho_0}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\cos(\psi+\nu)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\varphi}{2}\right)}\sinh\xi\right)^2\right]^{0,5\gamma}} =$$

$$= \frac{1}{\cosh^\gamma\xi \left[\left(\dfrac{\sin(\psi+\nu)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\varphi}{2}\right)} + \dfrac{\rho_0}{2\cosh\xi}\right)^2 + \left(\dfrac{\cos(\psi+\nu)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\varphi}{2}\right)}\tanh\xi\right)^2\right]^{0,5\gamma}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{C_1\cosh^\gamma\xi} \leq C_2 e^{-\gamma|\xi|},$$

де

$$C_1 = \min_{\xi,\nu}\left[\left(\frac{\sin(\psi+\nu)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\varphi}{2}\right)} + \frac{\rho_0}{2\cosh\xi}\right)^2 + \left(\frac{\cos(\psi+\nu)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\varphi}{2}\right)}\tanh\xi\right)^2\right]^{0,5\gamma} > 0.$$

Для $\nu = -\dfrac{d_1}{2}$ маємо

$$a(\nu) = 0, \quad b(\nu) = \frac{1}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\varphi}{2}\right)}.$$

Тоді

$$\frac{1}{(1+|z(w)|)^\gamma}=\frac{1}{\left(1+\left[\dfrac{\rho_0^2}{4}+\dfrac{\sinh^2\xi}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\varphi}{2}\right)}\right]^{0{,}5}\right)^\gamma}\leq\frac{1}{\left(1+\dfrac{|\sinh\xi|}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\varphi}{2}\right)}\right)^\gamma}=$$

$$=\frac{1}{\cosh^\gamma\xi\left(\dfrac{1}{\cosh\xi}+\dfrac{|\tanh\xi|}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\varphi}{2}\right)}\right)^\gamma}\leq\frac{\cos^\gamma\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\varphi}{2}\right)}{\cosh^\gamma\xi}\leq\cos^\gamma\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)e^{-\gamma|\xi|}.$$

Тут ми використали те, що функція

$$f(\xi)=\frac{1}{\cosh\xi}+\frac{|\tanh\xi|}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\varphi}{2}\right)}$$

досягає свого мінімуму при $\xi=\pm\infty$. Таким чином,

$$\frac{1}{(1+|z(w)|)^\gamma}\leq Ce^{-\gamma|\xi|}\quad\forall\nu\in\left[-\frac{d_1}{2},\frac{d_1}{2}\right].\tag{2.13}$$

Враховуючи оцінки (2.11)–(2.13), отримуємо

$$\begin{gathered}\|F_A(t,w)\|\leq(1+M)KC\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\|A^\gamma u(0)\|\,e^{-\gamma|\xi|},\\ w\in D_1=\left\{\xi+i\nu\colon\xi\in(-\infty,\infty),\ \nu\in\left[-\frac{d_1}{2},\frac{d_1}{2}\right]\right\}.\end{gathered}\tag{2.14}$$

Отже, ми довели таку теорему.

Теорема 2.1. *Нехай A — сильно додатний оператор із скрізь щільною областю визначення $D(A)$ у банаховому просторі X, зі спектром у секторі $\Sigma(A)$ й оцінкою для резольвенти* (2.3), *а спектральний кут φ задовольняє додатково обмеження* (2.10), *якщо $\alpha\in(-1,0)$. Крім того, нехай виконуються умови леми* 2.1 *і $u(0)\in D\left(A^\gamma\right)$. Тоді функція $F_A(t,\xi)$ має аналітичне продовження в смугу D_1 і для неї виконується оцінка* (2.14).

З теореми 2.1 випливає, що для $F_A(t,\xi)$ справедливою є оцінка

$$\begin{gathered}\|F_A(t,w)\|_{\mathbf{H}^1(D_d)}\leq\frac{2C(\varphi,\gamma)}{\gamma}\,\|A^\gamma u(0)\|\,,\\ C(\varphi,\gamma)=(1+M)KC\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right).\end{gathered}$$

Для наближення інтеграла (2.7) використаємо Sinc-квадратурну формулу (див. [5, 13])

$$u(t)\approx u_{h,N}(t)=\frac{h}{2\pi i}\sum_{k=-N}^{N}F_A(t,kh)\tag{2.15}$$

з похибкою $\eta_N(F_A,h)$, що оцінюється як

$$\|\eta_N(F_A,h)\| = \|u(t)-u_{h,N}(t)\| \leq$$
$$\leq \left\| u_h(t) - \frac{h}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_A(t,kh) \right\| + \left\| \frac{h}{2\pi i}\sum_{|k|>N} F_A(t,kh) \right\|.$$

Для першого доданка використаємо оцінку [5]

$$\left\| u(t) - \frac{h}{2\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_A(t,kh) \right\| \leq \frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{-\pi d_1/h}}{2\sinh\left(\pi d_1/h\right)}\,\|F_A(t,w)\|_{\mathbf{H}^1(D_{d_1})}.$$

Для другого доданка з оцінки (2.14) отримуємо

$$\left\| \frac{h}{2\pi i}\sum_{|k|>N} F_A(t,kh) \right\| \leq \frac{C(\varphi,\gamma)h\,\|A^\gamma u(0)\|}{2\pi}\sum_{k=N+1}^{\infty} e^{-\gamma kh} \leq$$
$$\leq \frac{C(\varphi,\gamma)h\,\|A^\gamma u(0)\|}{2\pi}\,e^{-\gamma Nh}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\gamma kh} = \frac{C(\varphi,\gamma)h\,\|A^\gamma u(0)\|}{2\pi}\,\frac{e^{-\gamma Nh}}{e^{\gamma h}-1} =$$
$$= \frac{C(\varphi,\gamma)h\,\|A^\gamma u(0)\|}{2\pi}\,\frac{e^{-\gamma Nh}}{\gamma h e^{\theta\gamma h}} = \frac{C(\varphi,\gamma)\,\|A^\gamma u(0)\|}{2\pi\gamma e^{\theta\gamma h}}\,e^{-\gamma Nh}, \quad \theta\in(0,1).$$

Тут ми використали теорему Лагранжа про приріст функції. Отже, остаточно маємо

$$\|\eta_N(F_A,h)\| \leq C_1(\varphi,\gamma)\,\|A^\gamma u(0)\| \left\{ \frac{e^{-\pi d_1/h}}{\sinh\left(\pi d_1/h\right)} + e^{-\gamma Nh} \right\},$$

де $C_1(\varphi,\gamma) > 0$ не залежить від $h,\ N$ і t. Зрівнюючи обидві експоненти, маємо

$$\frac{2\pi d_1}{h} = \gamma Nh,$$

або після перетворення

$$h = \sqrt{\frac{2\pi d_1}{\gamma N}}. \tag{2.16}$$

При такому виборі кроку h похибка квадратурної формули буде задовольняти оцінку

$$\|\eta_N(F_A,h)\| \leq C_1 \exp\left(-\sqrt{\frac{\pi d_1\gamma}{2}\,N} \right) \|A^\gamma u(0)\|, \tag{2.17}$$

де стала $C_1 > 0$ не залежить від t і N.

Таким чином, ми довели таку теорему.

Теорема 2.2. *Нехай виконано умови теореми* 2.1. *Тоді для наближення розв'язку задачі* (2.1) *за допомогою* (2.15) *виконується оцінка точності* (2.17), *якщо крок* h *вибрано за формулою* (2.16).

3. Числові розрахунки. Для ілюстрації розробленого наближеного методу розглянемо задачу (2.1) з $\alpha = \dfrac{1}{2}$ і оператором A вигляду

$$A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad D(A) = \left\{ v(x) \in \mathrm{W}_2^1(0,1) : v(0) = v(1) = 0 \right\},$$

де $\mathrm{W}_2^1(0,1)$ — стандартний простір Соболєва. За початкову умову візьмемо

$$u_0 = \sin(\pi\, x).$$

Безпосередньою перевіркою легко переконатись, що точним розв'язком є

$$u(x,t) = e^{-\pi^4 t} \sin(\pi\, x).$$

Похибку обчислення наближеного розв'язку задачі (2.1) за допомогою формули (2.15) для $t = \dfrac{1}{\pi^2}$, $x = \dfrac{1}{2}$ наведено в таблиці.

N	ε_N
4	$0,00225$
8	$0,00017$
16	$7,48280 \cdot 10^{-6}$
32	$3,72857 \cdot 10^{-7}$
64	$2,29011 \cdot 10^{-9}$
128	$1,28593 \cdot 10^{-12}$
256	$1,03171 \cdot 10^{-17}$
512	$2,94399 \cdot 10^{-23}$
1024	$1,25671 \cdot 10^{-30}$

Із результатів обчислень видно, що похибка зменшується згідно з апріорною оцінкою (2.17).

Література

1. B. Jin, R. Lazarov, Z. Zhou, *An analysis of the* L1 *scheme for the subdiffusion equation with nonsmooth data*, IMA J. Numer. Anal., **36**, № 1, 197 – 221 (2016).
2. A. Ashyralyev, *A note on fractional derivatives and fractional powers of operators*, J. Math. Anal. and Appl., **357**, № 1, 232 – 236 (2009).
3. I. P. Gavrilyuk, *An algorithmic representation of fractional powers of positive operators*, Numer. Funct. Anal. and Optim., **17**, № 3 – 4, 293 – 305 (1996).
4. William McLean, Vidar Thomée, *Numerical solution via Laplace transforms of a fractional order evolution equation*, J. Integral Equat. and Appl., **22**, № 1, 57 – 94 (2010).
5. I. Gavrilyuk, V. Makarov, V. Vasylyk, *Exponentially convergent algorithms for abstract differential equations*, Front. Math., Birkhäuser/Springer, Basel AG, Basel (2011).
6. I. P. Gavrilyuk, W. Hackbusch, B. N. Khoromskij, *Hierarchical tensor-product approximation to the inverse and related operators for high-dimensional elliptic problems*, Computing, **74**, № 2, 131 – 157 (2005).
7. I. P. Gavrilyuk, V. L. Makarov, D. O. Sytnyk, V. B. Vasylyk, *Exponentially convergent method for the m-point nonlocal problem for a first order differential equation in Banach space*, Numer. Funct. Anal. and Optim., **31**, № 1 – 3, 1 – 21 (2010).
8. В. Б. Василик, В. Л. Макаров, *Експоненціально збіжний метод для диференціального рівняння першого порядку в банаховому просторі з інтегральною нелокальною умовою*, Укр. мат. журн., **66**, № 8, 1029 – 1040 (2015).

9. В. Б. Василик, В. Л. Макаров, Д. О. Ситник, *Експоненціально збіжний метод для диференціального рівняння першого порядку в банаховому просторі з необмеженим оператором у нелокальній умові*, Праці Ін-ту математики НАН України, **12**, № 5, 32 – 45 (2015).
10. D. Sytnyk, *Parallel numerical method for nonlocal-in-time Schrödinger equation*, J. Coupled Systems and Multiscale Dynamics, № 2 – 4, 204 – 211 (2017).
11. В. Л. Макаров, І. П. Гаврилюк, В. Б. Василик, *Експоненціально збіжний метод для розв'язування абстрактного інтегро-диференціального рівняння з дробовим інтегралом Харді – Тітчмарша*, Доп. НАН України, № 1, 3 – 8 (2021).
12. G. H. Hardy, E.C. Titchmarsh, *An integral equation*, Proc. Cambridge Phil. Soc., **28**, № 2, 165 – 173 (1932).
13. F. Stenger, *Numerical methods based on sinc and analytic functions*, Springer Ser. Comput. Math., vol. 20, Springer-Verlag, New York (1993).

Одержано 04.11.21