DOI: 10.37863/umzh.v74i1.6989

УДК 517.587

С. М. Загороднюк (Харків. нац. ун-т ім. В. Н. Каразіна)

ПРО ОРТОГОНАЛЬНІСТЬ ЧАСТКОВИХ СУМ УЗАГАЛЬНЕНИХ ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНИХ РЯДІВ

It turns out that the partial sums $g_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(a_1)_k \ldots (a_p)_k}{(b_1)_k \ldots (b_q)_k} \dfrac{z^k}{k!}$ of the generalized hypergeometric series ${}_pF_q(a_1, \ldots \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_q; z)$ with parameters $a_j, b_l \in \mathbb{C}\backslash\{0, -1, -2, \ldots\}$ are Sobolev orthogonal polynomials. The corresponding monic polynomials $G_n(z)$ are R_I-type polynomials, and therefore, they are related to biorthogonal rational functions. The polynomials g_n satisfy a differential equation (in z) and a recurrence relation (in n). In this paper, we study the integral representations for g_n and their basic properties. It is shown that partial sums of arbitrary power series with non-zero coefficients are also related to biorthogonal rational functions. For polynomials $g_n(z)$, we obtain a relation to Jacobi-type pencils and their associated polynomials.

Виявилося, що часткові суми $g_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(a_1)_k \ldots (a_p)_k}{(b_1)_k \ldots (b_q)_k} \dfrac{z^k}{k!}$ узагальненого гіпергеометричного ряду ${}_pF_q(a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_q; z)$ з параметрами $a_j, b_l \in \mathbb{C}\backslash\{0, -1, -2, \ldots\}$ є соболєвськими ортогональними многочленами. Відповідні поліноми з одиничним старшим коефіцієнтом $G_n(z)$ є поліномами R_I-типу, а отже, пов'язані з біортогональними раціональними функціями. Поліноми g_n задовольняють диференціальне рівняння (щодо z) та рекурентне співвідношення (щодо n). У статті вивчаються інтегральні зображення для g_n та деякі їхні властивості. Часткові суми будь-якого степеневого ряду з ненульовими коефіцієнтами також пов'язані з біортогональними раціональними функціями. Встановлено зв'язок поліномів $g_n(z)$ зі жмутками якобієвого типу та асоційованими з ними поліномами.

1. Вступ. Теорія ортогональних поліномів для випадків дійсної осі та одиничного кола розвивалась у багатьох роботах (див., наприклад, [5, 10, 11, 13]). Як одне із можливих узагальнень, теорія соболєвських ортогональних многочленів зараз інтенсивно вивчається багатьма математиками (див. огляд [7]). Важливими елементами класичних систем многочленів $\{p_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ є рекурентне співвідношення і диференціальні рівняння для $p_n(z)$. Отже, природним є пошук таких властивостей для соболєвських ортогональних многочленів. У цій статті ми наведемо великий клас соболєвських ортогональних многочленів на одиничному колі $g_n(z)$, що мають обидві ці властивості. Крім того, поліноми $g_n(z)$ відповідають задачі 1, наведеній нижче. Многочлени $g_n(z)$ пов'язані з біортогональними раціональними функціями і жмутками якобієвого типу. В [16] було сформульовано таку задачу.

Задача 1. *Описати всі соболєвські ортогональні многочлени на одиничному колі $\{y_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, що мають дві властивості:*

(a) *поліноми $y_n(z)$ задовольняють диференціальне рівняння*

$$Ry_n(z) = \lambda_n S y_n(z), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

де R, S — лінійні диференціальні оператори скінченного порядку, поліноміальні коефіцієнти яких не залежать від n; $\lambda_n \in \mathbb{C}$;

(b) *многочлени $y_n(z)$ задовольняють різницеве рівняння*

$$L\vec{y}(z) = zM\vec{y}(z), \quad \vec{y}(z) = (y_0(z), y_1(z), \ldots)^T, \tag{2}$$

де L, M — напівнескінченні комплексні смугові (тобто такі, що мають скінченну кількість ненульових діагоналей) матриці.

Зауважимо, що ми включаємо ортогональні поліноми на одиничному колі до класу соболєвських ортогональних многочленів на одиничному колі (з похідними порядку 0). Співвідношення (1) означає, що $y_n(z)$ є власними функціями операторного полінома $R-\lambda S$, а співвідношення (2) — що вектори з $y_n(z)$ є власними функціями операторного полінома $L-zM$. Задача 1 є узагальненням класичних задач для ортогональних многочленів, де S та M одиничні (див., наприклад, [3, 4] та наведену там бібліографію). Властивості (1), (2) близькі до біспектральних задач. Подібні задачі для біортогональних раціональних функцій і відповідних поліномів вивчалися в [12].

Нехай $p,\ q$ — деякі фіксовані невід'ємні цілі числа. Позначимо

$$g_n(z)=g_n(z;a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(a_1)_k\ldots(a_p)_k}{(b_1)_k\ldots(b_q)_k}\,\frac{z^k}{k!},\quad n=0,1,2,\ldots, \tag{3}$$

де $a_j,b_l\in\mathbb{C}\backslash\{0,-1,-2,\ldots\}$. Таким чином, $g_n(z)$ є n-ю частковою сумою узагальненого гіпергеометричного ряду ${}_pF_q(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q;z)$ і $\deg g_n=n$. Як зазвичай, $p=0$ $(q=0)$ означає, що $(a_j)_k$ (відповідно $(b_l)_k$) немає. Через $G_n(z)$ ми позначаємо поліноми з одиничним старшим коефіцієнтом:

$$G_n(z)=\frac{n!(b_1)_n\ldots(b_q)_n}{(a_1)_n\ldots(a_p)_n}\,g_n(z),\quad n\in\mathbb{Z}_+. \tag{4}$$

Нагадаємо, що неперервний дріб R_I-типу є асоційованим із системою поліномів з одиничним старшим коефіцієнтом $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, що породжуються співвідношенням [6, с. 5]

$$P_n(z)=(z-\mathbf{c}_n)P_{n-1}(z)-\lambda_n(z-\mathbf{a}_n)P_{n-2}(z),\quad n=1,2,\ldots, \tag{5}$$

де $P_{-1}(z):=0,\ P_0(z):=1$ і

$$\lambda_{n+1}\neq 0,\quad P_n(\mathbf{a}_n)\neq 0.$$

Многочлени $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ пов'язані з біортогональними раціональними функціями [6] (теорема 2.1). Випадок $\mathbf{a}_n=0,\ n\geq 2$, відповідає загальним T-дробам [2]. Виявляється, що саме цей випадок має місце для поліномів $\{G_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$. З іншого боку, нам знадобиться наступне означення з [14].

Означення 1. *Набір $\Theta=(J_3,J_5,\alpha,\beta)$, де $\alpha>0,\ \beta\in\mathbb{R},\ J_3$ — якобієва матриця, а J_5 — напівнескінченна дійсна симетрична п'ятидіагональна матриця з додатними числами на другій піддіагоналі, називається* ***жмутком (матриць) якобієвого типу****.*

Матриці J_3 і J_5 мають вигляд

$$J_3=\begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ a_0 & b_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & a_1 & b_2 & a_2 & 0 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \end{pmatrix},\quad a_k>0,\quad b_k\in\mathbb{R},\quad k\in\mathbb{Z}_+,$$

$$J_5 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \beta_0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 & \cdots \\ \gamma_0 & \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & 0 & \cdots \\ 0 & \gamma_1 & \beta_2 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \end{pmatrix}, \quad \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}, \quad \gamma_n > 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Зі жмутком якобієвого типу Θ пов'язують таку систему многочленів $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$, що

$$p_0(\lambda) = 1, \quad p_1(\lambda) = \alpha\lambda + \beta$$

і

$$(J_5 - \lambda J_3)\vec{p}(\lambda) = 0, \tag{6}$$

де $\vec{p}(\lambda) = (p_0(\lambda), p_1(\lambda), p_2(\lambda), \ldots)^T$, індекс T означає транспонування. Поліноми $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ називаються асоційованими зі жмутком якобієвого типу Θ. Співвідношення (6) можна записати у скалярній формі

$$\gamma_{n-2}p_{n-2}(\lambda) + (\beta_{n-1} - \lambda a_{n-1})p_{n-1}(\lambda) +$$
$$+ (\alpha_n - \lambda b_n)p_n(\lambda) + (\beta_n - \lambda a_n)p_{n+1}(\lambda) + \gamma_n p_{n+2}(\lambda) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

де $p_{-2}(\lambda) = p_{-1}(\lambda) = 0$, $\gamma_{-2} = \gamma_{-1} = a_{-1} = \beta_{-1} = 0$.

У випадку додатних параметрів a_j, b_l многочлени $\{g_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ пов'язані з деякими жмутками якобієвого типу та асоційованими з ними поліномами $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$. Цей зв'язок нагадує зв'язок між ортогональними поліномами на одиничному колі та ортогональними многочленами на $[-1, 1]$.

У пункті 2 анонсовані вище рекурентне співвідношення та диференціальне рівняння для $g_n(z)$, соболєвські співвідношення ортогональності для $g_n(z)$ будуть наведені в теоремі 1. Зазначимо, що випадок $p = q = 0$ приводить до експоненти. Відповідні часткові суми з'явились у [16] у випадку $\rho = 1$.

Звичайно, многочлени $g_n(z)$ мають гарне коефіцієнтне зображення. Також становить інтерес отримання компактних інтегральних зображень для $g_n(z)$, що веде до зв'язку з іншими відомими поліномами та спеціальними функціями. Ми наведемо два інтегральних зображення для $g_n(z)$ в теоремі 2. Розташування нулів поліномів $g_n(z)$ також визначаються цією теоремою. Далі ми обговорюємо часткові суми довільного степеневого ряду з ненульовими коефіцієнтами. Як виявилося, вони також мають відношення до біортогональних раціональних функцій. Насамкінець ми пов'язуємо поліноми $g_n(z)$ з деякими жмутками якобієвого типу та асоційованими з ними многочленами.

Як звичайно, ми позначаємо через $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{Z}_+$ множини дійсних, комплексних, натуральних, цілих чисел та невід'ємних цілих чисел відповідно. Для $k,\ l \in \mathbb{Z}$ позначаємо $\mathbb{Z}_{k,l} := \{j \in \mathbb{Z} \colon k \le j \le l\}$. Нехай $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$, $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$, $\mathbb{D}_e := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| > 1\}$. Через $\mathfrak{B}(\mathbb{T})$ ми позначаємо множину всіх борелевських підмножин у $\mathbb{T}$, через $\mathbb{P}$ — множину всіх поліномів із комплексними коефіцієнтами. Для комплексного числа

c позначаємо $(c)_0 = 1,\ (c)_k = c(c+1)\ldots(c+k-1),\ k \in \mathbb{N}$ (*зсунутий факторіал або символ Похгаммера*). Узагальнена гіпергеометрична функція позначається так:

$$ {}_pF_q(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k\ldots(a_p)_k}{(b_1)_k\ldots(b_q)_k}\,\frac{z^k}{k!}, $$

де $p,q \in \mathbb{Z}_+,\ a_j, b_l \in \mathbb{C}$.

2. Часткові суми гіпергеометричних рядів і різні види ортогональності. Позначимо через μ_0 нормалізовану (ймовірнісну) міру довжини дуги на $\mathbb{T}$, що може бути ототожнена з мірою Лебега на $[0,2\pi)$. Використовуючи ідеї з [15], можемо сформулювати таку теорему.

Теорема 1. *Нехай $p,q \in \mathbb{Z}_+$ — деякі фіксовані числа й $a_1,\ldots,a_p,\ b_1,\ldots,b_q$ — деякі параметри з $\mathbb{C}\backslash\{0,-1,-2,\ldots\}$ (випадок $p=0$ $(q=0)$ означає, що a_j (відповідно b_l) немає). Тоді справджуються такі твердження:*

1. *Поліноми $g_n(z)$ з* (3) *задовольняють рекурентне співвідношення*

$$ \frac{(n+1)(b_1+n)\ldots(b_q+n)}{(a_1+n)\ldots(a_p+n)}\,(g_{n+1}(z)-g_n(z)) = $$
$$ = z(g_n(z)-g_{n-1}(z)), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad g_{-1}(z) := 0. \tag{7} $$

2. *Многочлени $G_n(z)$ з* (4) *задовольняють рекурентне співвідношення*

$$ G_n(z) = (z+\delta_n)G_{n-1}(z) - \delta_{n-1}zG_{n-2}(z), \quad n = 1,2,\ldots, $$

де $G_{-1}(z) := 0,\ \delta_0 := 0$ і

$$ \delta_k := \frac{k(b_1+k-1)\ldots(b_q+k-1)}{(a_1+k-1)\ldots(a_p+k-1)}, \quad k \in \mathbb{N}. $$

Отже, $G_n(z)$ пов'язані із загальними T-дробами та біортогональними раціональними функціями.

3. *Поліноми $g_n(z)$ задовольняють диференціальне рівняння*

$$ \theta R g_n(z) - nRg_n(z) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{8} $$

де

$$ R = \frac{d}{dz}\prod_{j=1}^{q}(\theta+b_j-1) - \prod_{j=1}^{p}(a_j+\theta), \quad \theta := z\,\frac{d}{dz}. \tag{9} $$

4. *Многочлени $g_n(z)$ є соболєвськими ортогональними многочленами на одиничному колі:*

$$ \int_{\mathbb{T}} \left(g_n(z), g_n'(z), \ldots, g_n^{(\rho)}(z)\right) M\, \overline{\begin{pmatrix} g_m(z) \\ g_m'(z) \\ \vdots \\ g_m^{(\rho)}(z) \end{pmatrix}}\, d\mu_0 = \delta_{n,m}, \quad n,m \in \mathbb{Z}_+, $$

де

$$M = (c_0(z), c_1(z), \ldots, c_\rho(z))^T \left(\overline{c_0(z)}, \overline{c_1(z)}, \ldots, \overline{c_\rho(z)}\right),$$

а $c_j(z) \in \mathbb{P}$ — *коефіцієнти диференціального оператора*

$$-\frac{n!(b_1)_n \ldots (b_q)_n}{(a_1)_{n+1} \ldots (a_p)_{n+1}} R = \sum_{l=0}^{\rho} c_l(z) \frac{d^l}{dz^l} \tag{10}$$

з $\rho = \max(p, q+1)$.

Випадок $p = 0$ $(q = 0)$ *означає, що всі* $(a_j)_k$, $(a_j + k)$ (*відповідно* $(b_l)_k$, $(b_l + k)$) *у попередніх формулах замінюються на* 1. *Те саме відбувається з добутками* $\prod_{j=1}^{p}$ *і* $\prod_{j=1}^{q}$.

Доведення. 1. Зауважимо, що

$$g_n(z) - g_{n-1}(z) = \frac{(a_1)_n \ldots (a_p)_n}{(b_1)_n \ldots (b_q)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

де $g_{-1} = 0$. Використовуючи це співвідношення з

$$z^{n+1} = z z^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{11}$$

отримуємо рекурентне співвідношення (7).

Друге твердження безпосередньо випливає з першого.

3. Застосуємо відому ідею виведення диференціального рівняння для ${}_pF_q$ [9]:

$$\theta \prod_{j=1}^{q} (\theta + b_j - 1) g_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(a_1)_k \ldots (a_p)_k}{(b_1)_k \ldots (b_q)_k} \frac{1}{k!} k \prod_{j=1}^{q} (k + b_j - 1) z^k =$$

$$= z \sum_{k=1}^{n} \frac{(a_1)_k \ldots (a_p)_k}{(b_1)_{k-1} \ldots (b_q)_{k-1}} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = z \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(a_1)_{l+1} \ldots (a_p)_{l+1}}{(b_1)_l \ldots (b_q)_l} \frac{z^l}{l!} =$$

$$= z \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(a_1)_l \ldots (a_p)_l}{(b_1)_l \ldots (b_q)_l} \frac{1}{l!} \prod_{j=1}^{p} (a_j + l) z^l = z \prod_{j=1}^{p} (a_j + \theta) \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(a_1)_l \ldots (a_p)_l}{(b_1)_l \ldots (b_q)_l} \frac{z^l}{l!} =$$

$$= z \prod_{j=1}^{p} (a_j + \theta) \left(g_n(z) - \frac{(a_1)_n \ldots (a_p)_n}{(b_1)_n \ldots (b_q)_n} \frac{z^n}{n!} \right), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Тоді

$$-\frac{n!(b_1)_n \ldots (b_q)_n}{(a_1)_{n+1} \ldots (a_p)_{n+1}} R g_n(z) = z^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{12}$$

де R визначено в (9). Тут ми припустили, що p, q належать $\mathbb{N}$, інші випадки подібні та приводять до цієї ж формули. Використовуючи

$$\theta z^n = n z^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

і співвідношення (12), одержуємо диференціальне рівняння (8).

Четверте твердження випливає зі співвідношень ортонормованості для $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ і співвідношень (12), (10).

Інтегральні зображення для поліномів $g_n(z)$ і деякі їхні основні властивості наведено в наступній теоремі.

Теорема 2. *В умовах теореми* 1 *справджуються такі твердження:*

1. *Якщо* $p \leq q$, *то поліноми* g_n *мають інтегральне зображення*

$$g_n\left(e^{i\tau}\right) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1-e^{i(n+1)(\tau-t)}}{1-e^{i(\tau-t)}}\right)\times$$

$$\times {}_pF_q\left(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q;e^{it}\right)dt, \quad \tau\in[0,2\pi), \quad n\in\mathbb{Z}_+. \tag{13}$$

Зокрема, якщо $p = q = 1,\ b_1 > a_1 > 0$, *то многочлени* g_n *мають таке зображення:*

$$g_n\left(e^{i\tau}\right) = \frac{\Gamma(b)}{2\pi\Gamma(a)\Gamma(b-a)}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1}\left(\frac{1-e^{i(n+1)(\tau-t)}}{1-e^{i(\tau-t)}}\right)\times$$

$$\times e^{(\cos t + i\sin t)u}u^{a-1}(1-u)^{b-a-1}\,du\,dt, \quad \tau\in[0,2\pi), \quad n\in\mathbb{Z}_+, \tag{14}$$

де $a := a_1,\ b := b_1$ *для простоти позначень.*

2. *Многочлени* g_n *мають інтегральне зображення*

$$g_n(x) = -(n+1)x^{n+1}\int\limits_{-\infty}^{x} t^{-n-2}\times$$

$$\times {}_{p+1}F_{q+1}(-n,a_1,\ldots,a_p;-n-1,b_1,\ldots,b_q;t)dt, \quad x<0, \quad n\in\mathbb{Z}_+. \tag{15}$$

Зауважимо, що ${}_{p+1}F_{q+1}(-n,a_1,\ldots,a_p;-n-1,b_1,\ldots,b_q;t)$ — *поліном степеня* n. *Зокрема, якщо* $p = 1,\ q = 0$, *то* $g_n(x)$ *виражається через кругові поліноми Якобі* (*див.* [5, *с.* 229]).

3. *Многочлени* g_n *мають прості корені. Якщо* $p \leq q$ *і*

$$0 < a_j \leq b_j, \quad j\in\mathbb{Z}_{1,p}, \tag{16}$$

$$b_k \geq 1, \quad k\in\mathbb{Z}_{p+1,q}, \tag{17}$$

то всі корені g_n *розташовані в* $\mathbb{D}_e\backslash(1,\infty)$.

Доведення. 1. Якщо $p \leq q$, то функція $g(z) := {}_pF_q(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q;z)$ аналітична на всій комплексній площині. Зокрема, ми можемо записати

$$g\left(e^{i\tau}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\xi_k e^{ik\tau} = \lim_{n\to\infty} g_n\left(e^{i\tau}\right), \quad \tau\in[0,2\pi), \tag{18}$$

де

$$\xi_k := \frac{(a_1)_k\ldots(a_p)_k}{(b_1)_k\ldots(b_q)_k}\,\frac{1}{k!}.$$

Перевіримо, що

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g\left(e^{i\tau}\right)e^{-ij\tau}d\tau = \xi_j, \quad j\in\mathbb{Z}_+. \tag{19}$$

Зауважимо, що

$$\left|g_n\left(e^{i\tau}\right)e^{-ij\tau}\right| \leq \sum_{k=0}^{n}|\xi_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty}|\xi_k| =: C < \infty. \tag{20}$$

Використовуючи (18), (20) і теорему Лебега про доміновану збіжність, отримуємо

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_n\left(e^{i\tau}\right)e^{-ij\tau}d\tau \to_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g\left(e^{i\tau}\right)e^{-ij\tau}d\tau. \tag{21}$$

Ліва частина (21) дорівнює ξ_j, якщо $n \geq j$. Отже, співвідношення (19) виконано. Далі ми записуємо

$$g_n\left(e^{i\tau}\right) = \sum_{k=0}^{n}\xi_k e^{ik\tau} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g\left(e^{it}\right)\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik(\tau-t)}\right)dt, \quad \tau\in[0,2\pi). \tag{22}$$

Зазначимо, що співвідношення

$$d_n = d_n(u) := \sum_{k=0}^{n} u^k = \frac{1-u^{n+1}}{1-u}, \quad n\in\mathbb{Z}_+, \tag{23}$$

виконано для всіх комплексних u (не лише для $u\in\mathbb{D}$). Це випливає, наприклад, з рекурентного співвідношення $d_{n+1} - ud_n = 1$ з $d_0 = 1$. За допомогою (22) і (23) ми отримуємо співвідношення (13). Щоб одержати (14), достатньо застосувати основне інтегральне зображення для виродженої гіпергеометричної функції.

2. Формулу (15) можна перевірити безпосередньо, інтегруючи поліном під знаком інтеграла і виконуючи деякі алгебраїчні спрощення.

3. Простота нулів g_n випливає з рекурентного співвідношення (7) (зауважимо, що $g_n(0) = 1$).

Нехай $p \leq q$ і виконано умови (16), (17). Оскільки коефіцієнти g_n є додатними, він має додатні значення на $(0,+\infty)$. Умови (16), (17) забезпечують те, що коефіцієнти g_n формують монотонну послідовність. Ми можемо застосувати теорему Eneström–Kakeya [8, с. 136]. В результаті одержимо, що нулі g_n розташовані в $\mathbb{D}_e$.

Теорему 2 доведено.

Наведемо можливі узагальнення. Розглянемо степеневий ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k, \quad d_k\in\mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Позначимо

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} d_k z^k, \quad n\in\mathbb{Z}_+, \tag{24}$$

$$F_n(z) = \frac{1}{d_n} f_n(z), \quad n\in\mathbb{Z}_+. \tag{25}$$

Тоді

$$\frac{1}{d_n}\left(f_n(z) - f_{n-1}(z)\right) = z^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{26}$$

де $f_{-1} := 0$. З (11), (26) отримуємо рекурентне співвідношення для f_n. Для поліномів з одиничним старшим коефіцієнтом F_n воно набирає вигляду

$$F_n(z) = \left(z + \frac{d_{n-1}}{d_n}\right)F_{n-1}(z) - \frac{d_{n-2}}{d_{n-1}}\, zF_{n-2}(z), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

де $F_{-1}(z) := 0$, $d_{-1} := 1$. Отже, поліноми $F_n(z)$ пов'язані з біортогональними раціональними функціями. Було б важливим отримати інтегральне зображення для відповідного функціонала зі співвідношень біортогональності. Щоб отримати деякі рівняння для $f_n(z)$ щодо z (наприклад, диференціальні, різницеві, q-різницеві), можливо варто розглянути степеневі ряди $f(z)$, що відповідають базовій гіпергеометричній функції, еліптичній гіпергеометричній функції тощо.

Припустимо, що всі коефіцієнти d_k додатні. Тоді записуємо

$$\operatorname{Re} f_n\left(e^{i\tau}\right) = \sum_{k=0}^{n} d_k T_k(x),$$

$$\operatorname{Im} f_{n+1}\left(e^{i\tau}\right) = \sin\tau \sum_{k=1}^{n+1} d_k U_{k-1}(x) = \sin\tau \sum_{j=0}^{n} d_{j+1} U_j(x),$$

$$x = \cos\tau, \quad \tau \in (0, \pi), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

де $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$ і $U_k(x) = \dfrac{\sin((k+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$ — поліноми Чебишова першого і другого роду. Отже, системи поліномів

$$\left\{\operatorname{Re} f_n\left(e^{i\arccos x}\right)\right\}_{n=0}^{\infty}, \quad \left\{\frac{1}{\sin\arccos x}\, \operatorname{Im} f_{n+1}\left(e^{i\arccos x}\right)\right\}_{n=0}^{\infty}$$

є *модифікованими ядерними поліномами* (див. [17]). Вони асоційовані зі жмутками якобієвого типу і мають спеціальні співвідношення ортогональності.

***Зауваження*[*].** Нехай $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ — будь-яка система многочленів, що задовольняє співвідношення (5). Зазначимо, що у роботі [18] вивчалося таке питання: коли похідні

$$\left\{\frac{1}{n+1}\, P'_{n+1}(z)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

задовольняють те ж співвідношення з можливо іншими параметрами $\mathbf{a}_n$, $\mathbf{c}_n$? Якщо похідні мають цю властивість, то у [18, с. 125] говорилося, що система $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ належить до класу Хана. Зрозуміло, що поліноми $\{F_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, визначені формулою (25), належать до класу Хана. Справді, поліноми

$$\left\{\frac{1}{n+1}\, F'_{n+1}(z)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

[*] Відображено важливі зауваження рецензента, який вказав автору на роботу [18].

є нормованими частковими сумами формального ряду $\sum_{k=0}^{\infty} d_{k+1}(k+1)z^k$. Позначимо через $\sigma = \sigma_F$ лінійний функціонал на комплексних лоранівських поліномах, по відношенню до якого є біортогональними поліноми $\{F_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, а через $s_k = s_{F;k}$ його степеневі моменти ($s_k = \sigma(z^k)$, $k \in \mathbb{Z}$). У статті [18] розрізнялися два важливих випадки для функціонала біортогональності: коли σ є 2-регулярним (див. точне означення у [18, с. 125]) і протилежний (2-іррегулярний). Зазначимо, що для σ_F виконано $0 = s_2 = s_3 = \ldots$. Отже, σ_F є 2-іррегулярним. Цей випадок вивчався у п. 13 статті [18], зокрема і випадок $0 = s_2 = s_3 = \ldots$. У твердженні 13.2 й у двох наступних пунктах у [18] вказано прості умови на відповідні рекурентні коефіцієнти. Зрозуміло, що ці умови виконано й у випадку σ_F.

Література

1. L. C. Andrews, *Special functions of mathematics for engineers*, Oxford Univ. Press, Oxford (1998).
2. E. Hendriksen, H. van Rossum, *Orthogonal Laurent polynomials*, Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math., **48**, № 1, 17 – 36 (1986).
3. E. Horozov, *d-Orthogonal analogs of classical orthogonal polynomials*, SIGMA Symmetry Integrability and Geom. Methods and Appl., **14**, Article 063 (2018), 27 p.
4. E. Horozov, *Vector orthogonal polynomials with Bochner's property*, Constr. Approx., **48**, № 2, 201 – 234 (2018).
5. M. E. H. Ismail, *Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable*, Encyclopedia Math. and Appl., **98**, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2005).
6. M. E. H. Ismail, D. R. Masson, *Generalized orthogonality and continued fractions*, J. Approx. Theory, **83**, № 1, 1 – 40 (1995).
7. F. Marcellán, Yuan Xu, *On Sobolev orthogonal polynomials*, Expo. Math., **33**, № 3, 308 – 352 (2015).
8. M. Marden, *Geometry of polynomials*, second ed., Math. Surveys and Monogr., № 3, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1966).
9. E. D. Rainville, *Special functions*, first ed., Chelsea Publ. Co., Bronx, N.Y. (1971).
10. B. Simon, *Orthogonal polynomials on the unit circle. Pt 1. Classical theory*, Colloq. Publ., **54**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (2005).
11. B. Simon, *Orthogonal polynomials on the unit circle. Pt 2. Spectral theory*, Colloq. Publ., **54**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (2005).
12. V. Spiridonov, A. Zhedanov, *Classical biorthogonal rational functions on elliptic grids*, C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can., **22**, № 2, 70 – 76 (2000).
13. G. Szegö, *Orthogonal polynomials*, fourth ed., Colloq. Publ., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1975).
14. С. М. Загороднюк, *Ортогональные многочлены, ассоциированные с некоторыми пучками якобиевого типа*, Укр. мат. журн., **68**, № 9, 1180 – 1190 (2016).
15. S. M. Zagorodnyuk, *On some classical type Sobolev orthogonal polynomials*, J. Approx. Theory, **250**, Article 105337 (2020), 14 p.
16. S. M. Zagorodnyuk, *On a family of hypergeometric Sobolev orthogonal polynomials on the unit circle*, Constr. Math. Anal., **3**, № 2, 84 – 75 (2020).
17. С. М. Загороднюк, *Про ряди за ортогональними многочленами та системи многочленів класичного типу*, Укр. мат. журн., **73**, № 6, 799 – 810 (2021).
18. A. Zhedanov, *The "classical" Laurent biorthogonal polynomials*, J. Comput. and Appl. Math., **98**, № 1, 121 – 147 (1998).

Одержано 06.11.21