DOI: 10.37863/umzh.v74i9.7068

УДК 517.5

А. В. Чайковський[1] (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПРО ДЕЯКІ УМОВИ ДЛЯ ДРУГИХ МОДУЛІВ НЕПЕРЕРВНОСТІ

We investigate the second moduli of continuity for functions from the space of continuous and periodic real functions and the space of functions uniformly continuous on the entire axis. For both spaces, we give the negative answer to a question about necessity of one condition formulated by V. E. Geit, which is sufficient for a function to be a second module of continuity.

Розглянуто другі модулі неперервності для функцій із простору неперервних та періодичних функцій і простору рівномірно неперервних на всій осі функцій. Для обох просторів дано негативну відповідь на поставлене В. Е. Гейтом питання про необхідність встановленої ним умови, яка є достатньою, щоб функція була другим модулем неперервності.

Вступ. Нехай $C_{2\pi}$ — клас неперервних 2π-періодичних дійсних функцій, визначених на $\mathbf{R}$, $UC(\mathbf{R})$ — клас рівномірно неперервних дійсних функцій, визначених на $\mathbf{R}$.

Для дійсних функцій f, визначених на $\mathbf{R}$, будемо використовувати позначення для скінченних різниць

$$\triangle_t^2 f(x) = f(x+2t) - 2f(x+t) + f(x), \qquad x \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Другим модулем неперервності для функції $f \in UC(\mathbf{R})$ називають функцію

$$\omega_2(f,h) = \sup_{t\in[0,h]} \sup_{x\in\mathbf{R}} \left|\triangle_t^2 f(x)\right|, \quad h \geq 0,$$

а для функції $f \in C_{2\pi}$ — функцію

$$\omega_2(f,h) = \sup_{t\in[0,h]} \sup_{x\in\mathbf{R}} \left|\triangle_t^2 f(x)\right|, \quad h \in [0,\pi].$$

Проблема простої характеризації всіх функцій, що можуть бути другими модулями неперервності для функцій з одного з уведених класів, є відкритою і виявилася складною для вирішення. Характеризацію з точністю до порядкової еквівалентності було отримано в роботах І. О. Шевчука [1, с. 25–29; 2] та В. Гейта [3].

Цікавою є задача отримання нових необхідних або достатніх умов на функції, що є другими модулями неперервності. В роботі [4] (теорема 3) отримано одну з відомих достатніх умов.

Теорема 1 (В. Гейт). *Функція $\varphi(t)$, $0 \leq t \leq \pi$, є другим модулем неперервності для деякої функції з класу $C_{2\pi}$, якщо:*

a) $\varphi(0) = 0$;

b) *φ неспадна і неперервна на $[0,\pi]$;*

c) *парне і 2π-періодичне продовження $\hat{\varphi}$ функції φ задовольняє умову*

$$\left|\triangle_t^2 \hat{\varphi}(x)\right| \leq 2\varphi\big(|t|\big), \qquad x \in \mathbf{R}, \quad |t| \leq \pi.$$

[1] e-mail: chaikovskiyav@ukr.net.

В роботі [4] зазначено, що питання щодо правильності оберненого твердження є відкритою проблемою.

***Зауваження* 1.** Наведена теорема залишається правильною, якщо функція φ визначена на $[0, +\infty)$ і нерівність в п. c) записати у вигляді

$$|\triangle_t^2 \hat{\varphi}(x)| \leq 2\varphi\big(|t|\big), \qquad x \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Справді, це випливає з того, що другий модуль неперервності довільної функції f з класу $C_{2\pi}$ є сталою на $[\pi, +\infty)$ величиною, оскільки

$$\big|f(x+2t) - 2f(x+t) + f(x)\big| =$$

$$= |f(x + 2(t - 2\pi k)) - 2f(x + (t - 2\pi k)) + f(x)| \leq \omega_2(f, \pi), \qquad t > \pi, \quad k := \left[\frac{t+\pi}{2\pi}\right]$$

(через $[c]$ позначено цілу частину числа c).

Для випадку простору $UC(\mathbf{R})$ можна отримати теорему, аналогічну теоремі 1. Зауважимо, що її доведення, по суті, не буде відрізнятися від доведення теореми 1, яке запропонував В. Гейт. Наведемо це твердження.

Теорема 2. *Функція $\varphi(t),\ t \geq 0$, є другим модулем неперервності для деякої функції з класу $UC(\mathbf{R})$ якщо*:

a) $\varphi(0) = 0$;

b) $\varphi \in UC([0, +\infty))$ *неспадна на* $[0, +\infty)$;

c) *парне продовження $\hat{\varphi}$ функції φ задовольняє умову*

$$|\triangle_t^2 \hat{\varphi}(x)| \leq 2\varphi\big(|t|\big), \qquad x \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

У роботі [5] отримано таке твердження (теорема 1).

Теорема 3 (С. В. Конягін)**.** *Для довільної функції $f \in UC(\mathbf{R})$ і невід'ємних чисел $\delta_2 \leq \delta_1$ справджується нерівність*

$$\omega_2(f, \delta_1 + \delta_2) + \omega_2(f, \delta_1 - \delta_2) + 2\omega_2(f, \delta_2) \geq \omega_2(f, \delta_1).$$

Якщо позначити $\varphi(t) = \omega_2(f, t),\ t \geq 0,\ x = \delta_1 - \delta_2 \geq 0,\ t = \delta_2 \geq 0$, то остання нерівність набере вигляду

$$\varphi(x + 2t) + \varphi(x) + 2\varphi(t) \geq 2\varphi(x + t).$$

Це дозволяє записати теорему 3 в еквівалентній формі, що дає необхідну умову, подібну до достатньої умови з теореми 2.

Теорема 4. *Якщо функція φ — другий модуль неперервності для деякої функції з класу $UC(\mathbf{R})$, то*

$$\triangle_t^2 \varphi(x) \geq -2\varphi(t), \qquad x \geq 0, \quad t \geq 0.$$

***Зауваження* 2.** 1. Оскільки $C_{2\pi} \subset UC(\mathbf{R})$, теорема справджується і для простору $C_{2\pi}$.

2. Легко перевірити, що нерівність Конягіна виконується для парного продовження $\hat{\varphi}$ функції φ :

$$\triangle_t^2 \hat{\varphi}(x) \geq -2\varphi\big(|t|\big), \qquad x \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Справді, для $x \geq 0,\ t \in \left[-\dfrac{x}{2}, 0\right)$, використовуючи теорему 4, маємо

$$\triangle_t^2 \hat{\varphi}(x) = \hat{\varphi}(x+2t) - 2\hat{\varphi}(x+t) + \hat{\varphi}(x) =$$

$$= \varphi\big((x+2t) + 2(-t)\big) - 2\varphi\big((x+2t) + (-t)\big) + \varphi(x+2t) \geq -2\varphi(-t).$$

Для $x \geq 0,\ t < -\dfrac{x}{2}$ маємо $|x+t| \leq -t$, отже, за теоремою 4

$$\triangle_t^2 \hat{\varphi}(x) = \varphi(-x-2t) - 2\varphi\big(|x+t|\big) + \varphi(x) =$$

$$= \varphi(x + 2(-x-t)) - 2\varphi\big(x + (-x-t)\big) + \varphi(x) + 2\varphi(-t) - 2\varphi\big(|x+t|\big) \geq$$

$$\geq -2\varphi(|x+t|) + 2\varphi(-t) - 2\varphi\big(|x+t|\big) \geq -2\varphi(-t).$$

Нарешті, для $x < 0$ внаслідок парності отримуємо

$$\triangle_t^2 \hat{\varphi}(x) = \hat{\varphi}(-x-2t) - 2\hat{\varphi}(-x-t) + \hat{\varphi}(-x) = \triangle_{-t}^2 \hat{\varphi}(-x) \geq -2\varphi\big(|t|\big).$$

Основні результати. В обох просторах $C_{2\pi}$ і $UC(\mathbf{R})$ відмінність між необхідною умовою Гейта і достатньою умовою Конягіна полягає в нерівності

$$\triangle_t^2 \hat{\varphi}(x) \leq 2\varphi\big(|t|\big), \qquad x \in \mathbf{R}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Відкрита проблема, поставлена Гейтом, еквівалентна питанню про можливість додати цю нерівність до необхідних умов. Нижче дано негативну відповідь на це питання для обох просторів.

Теорема 5. *Існує функція φ, що є другим модулем неперервності для деякої функції з класу $C_{2\pi}$, така що парне 2π-періодичне продовження $\hat{\varphi}$ функції φ з відрізка $[0, \pi]$ для деяких $x_0 > 0$, $t_0 > 0$ задовольняє умову*

$$\triangle_{t_0}^2 \hat{\varphi}(x_0) > 2\varphi\big(|t_0|\big).$$

Теорема 6. *Існує функція φ, що є другим модулем неперервності для деякої функції з класу $UC(\mathbf{R})$, така що парне продовження $\hat{\varphi}$ функції φ для деяких $x_0 > 0$, $t_0 > 0$ задовольняє умову*

$$\triangle_{t_0}^2 \hat{\varphi}(x_0) > 2\varphi\big(|t_0|\big).$$

Для доведення цих теорем нам знадобляться такі допоміжні результати.

Лема 1. *Нехай функції $f_1, f_2 \in UC(\mathbf{R})$ мають нульову другу похідну зовні деякого відрізка. Нехай $\varphi_1,\ \varphi_2$ — другі модулі неперервності для функцій $f_1,\ f_2$ відповідно. Тоді для довільного $L > 0$ існує функція $f \in UC(\mathbf{R})$ така, що*

$$\varphi(t) = \max\big\{\varphi_1(t), \varphi_2(t)\big\}, \quad t \in [0, L],$$

є другим модулем неперервності для f на $[0, L]$.

Доведення. Нехай $f_1'' = f_2'' = 0$ зовні відрізка $[-C, C]$ для деякого $C > 0$. Тоді функції f_1, f_2 лінійні на $(-\infty, -C]$ і $[C, +\infty)$. Визначимо функцію $f \in UC(\mathbf{R})$ рівностями

$$f(x) = f_1(x), \quad x \leq C + 3L,$$

$$f(x) = f_2(x - 3L - 2C) - f_2(-C) + f_1(x), \quad x > C + 3L.$$

Тоді функція f обов'язково є лінійною на кожному з проміжків $(-\infty, -C]$, $[C, C + 3L]$, $[3C + 3L, +\infty)$ і може бути нелінійною за їхніми межами. Тому величина $\triangle_t^2 f(x)$, $t \in [0, L]$, може бути ненульовою лише для $x \in (-C - 2L, C)$ або $x \in (C + L, 3C + 3L)$. При цьому

$$\sup_{x \in (-C-2L, C)} |\triangle_t^2 f(x)| = \sup_{x \in (-C-2L, C)} |f_1(x + 2t) - 2f_1(x + t) + f_1(x)| = \varphi_1(t), \quad t \in [0, L],$$

$$\sup_{x \in (C+L, 3C+3L)} |\triangle_t^2 f(x)| = \sup_{x \in (C+L, 3C+3L)} |f_2(x + 2t) - 2f_2(x + t) + f_2(x)| = \varphi_2(t), \quad t \in [0, L].$$

Звідси випливає твердження леми.

Лема 2. *Якщо функція* $f \in UC(\mathbf{R})$ *лінійна на кожному відрізку* $[2n, 2n + 2]$, $n \in \mathbf{Z}$, *то*

$$\omega_2(f, 2m) = \sup_{t \in \mathbf{N}, t \leq 2m} \sup_{x \in \mathbf{Z}} |\triangle_t^2 f(2x)|, \quad m \in \mathbf{N}.$$

Доведення. Припустимо від супротивного, що ця нерівність є хибною. Тоді існує таке $t_0 \in [0, 2m]$, $x_0 \in \mathbf{R}$, що

$$\Omega_m := \sup_{t \in \mathbf{N}, t \leq 2m} \sup_{x \in \mathbf{Z}} |\triangle_t^2 f(2x)| < |\triangle_{t_0}^2 f(x_0)|.$$

Розглянемо функцію

$$F(x, t) = |\triangle_t^2 f(x)| = |f(x + 2t) - 2f(x + t) + f(x)|, \qquad x \in \mathbf{R}, \quad t \in [0, 2m],$$

і опуклий багатокутник

$$D = \big\{(x, t) | 2a \leq x \leq 2a + 2, 2b \leq x + t \leq 2b + 2, 2c \leq x + 2t \leq 2c + 2, t \in [0, 2m]\big\},$$

де цілі числа $a = \left[\dfrac{x_0}{2}\right]$, $b = \left[\dfrac{x_0 + t_0}{2}\right]$, $c = \left[\dfrac{x_0 + 2t_0}{2}\right]$ вибрано так, що $(x_0, t_0) \in D$. Функція F дорівнює модулю лінійної функції на D, тому існує вершина (t_1, x_1) багатокутника D, в якій значення функції F максимальне, зокрема $F(x_1, t_1) \geq F(x_0, t_0)$.

Враховуючи означення багатокутника, якщо (t_1, x_1) — його вершина, то принаймні два з чотирьох чисел $x_1 + 2t_1, x_1 + t_1, x_1, t_1$ є парними цілими. Легко перевірити, що в будь-якому випадку $x_1, t_1 \in \mathbf{Z}$ і x_1 є парним. Тоді

$$\Omega_m \geq F(x_1, t_1) \geq F(x_0, t_0).$$

Прийшли до суперечності, що й завершує доведення леми.

***Доведення теореми* 6.** Виберемо функції $f_1, f_2 \in UC(\mathbf{R})$, що є лінійними на кожному відрізку $[2n, 2n + 2]$, $n \in \mathbf{Z}$, і визначені рівностями

$$f_1(x) = 0, \quad x \leq 0, \qquad f_1(2) = 2, \qquad f_1(4) = 4, \qquad f_1(6) = 6, \qquad f_1(8) = 8,$$

$$f_1(10) = 12, \qquad f_1(12) = 16, \qquad f_1(14) = 20, \qquad f_1(x) = 3x - 24, \quad x \geq 16,$$

$$f_2(x) = 0, \quad x \leq 0, \qquad f_2(2) = 2, \qquad f_2(4) = 6, \qquad f_2(6) = 8, \qquad f_2(8) = 8,$$

$$f_2(10) = 10, \qquad f_2(12) = 10, \qquad f_2(14) = 8, \qquad f_2(x) = x - 8, \quad x \geq 16.$$

Враховуючи лему 2 і фінітність другої похідної, отримуємо

$$\omega_2(f_k, 2m) = \sup_{t \in \mathbf{N}, t \leq 2m} \sup_{x \in \mathbf{Z}} |\triangle_t^2 f_k(2x)| = \sup_{t \in \mathbf{N}, t \leq 2m} \sup_{-2m \leq x \leq 16} |\triangle_t^2 f_k(2x)|, \quad k = 1, 2, \quad m \in \mathbf{N}.$$

Скінченним перебором одержуємо

$$\omega_2(f_1, 2) = 2, \qquad \omega_2(f_1, 4) = 4, \qquad \omega_2(f_1, 6) = 6, \qquad \omega_2(f_1, 8) = 8, \qquad \omega_2(f_1, 10) = 14,$$

$$\omega_2(f_2, 2) = 2, \qquad \omega_2(f_2, 4) = 6, \qquad \omega_2(f_2, 6) = 8, \qquad \omega_2(f_2, 8) = 8, \qquad \omega_2(f_2, 10) = 10.$$

Тоді за лемою 1 функція

$$\varphi(t) = \max \big\{ \omega_2(f_1, t), \omega_2(f_2, t) \big\}, \quad t \in [0, 10],$$

є другим модулем неперервності для деякої функції $f \in UC(\mathbf{R})$. Проте

$$\varphi(6) + \varphi(10) = 8 + 14 = 22 > 20 = 2\varphi(8) + 2\varphi(2),$$

тобто твердження теореми виконується при $x_0 = 6, \ t_0 = 2$.

***Доведення теореми* 5.** На основі функції $f \in UC(\mathbf{R})$ з попереднього доведення побудуємо функцію, що буде належати $C_{2\pi}$. Оскільки функція f побудована за лемою 1, то з доведення леми видно, що існують такі $C > 0$, $b \in \mathbf{R}$ і $a \in \mathbf{R}$, що $f(x) = 0$, $x \leq -C$; $f(x) = ax + b$, $x \geq C$. Тоді визначимо функцію

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \leq C + 20, \\ 2f(C+20) - f(2C + 40 - x), & x \in [C + 20, 3C + 60], \\ 2f(C+20) - f(x - 4C - 80), & x \in [3C + 60, 5C + 100], \\ f(6C + 120 - x), & x \geq 5C + 100. \end{cases}$$

Графік цієї функції складається з чотирьох копій суттєвої частини графіка функції f і лінійних частин. Тому $\omega_2(g, t) = \omega_2(f, t)$, $t \in [0, 10]$. І навіть більше, функція g фінітна: $g(x) = 0$, $x \notin (-C, 7C + 120)$. Тоді для 2π-періодичної функції u, для якої $u(x) = g(kx)$, $x \in [-\pi, \pi]$, де $k = \dfrac{7C + 120}{\pi}$ — коефіцієнт стиску, отримуємо

$$\varphi(t) := \omega_2(u, t) = \omega_2(g, kt) = \omega_2(f, kt), \quad t \in [0, 10/k].$$

Тоді $u \in C_{2\pi}$ і

$$\varphi(6/k) + \varphi(10/k) = 8 + 14 = 22 > 20 = 2\varphi(8/k) + 2\varphi(2/k),$$

тобто твердження теореми справджується при $x_0 = 6/k, \ t_0 = 2/k$.

Література

1. И. А. Шевчук, *Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций*, Наук. думка, Киев (1992).
2. И. А. Шевчук, *Некоторые замечания о функциях типа модуля непрерывности порядка* $k \geq 2$, Вопросы теории приближения функций и ее приложений, Ин-т математики АН УССР, Киев (1976), с. 194 – 199.
3. В. Э. Гейт, *Теоремы вложения для некоторых классов периодических непрерывных функций*, Изв. вузов. Математика, № 4, 67 – 77 (1972).
4. В. Э. Гейт, *О функциях, являющихся вторым модулем непрерывности*, Изв. вузов. Математика, № 9, 38 – 41 (1998).
5. С. В. Конягин, *О вторых модулях непрерывности*, Теория функций и дифференциальные уравнения, Тр. Мат. ин-та АН, **269** (2010), с. 150 – 152.

Одержано 27.12.21