DOI: 10.37863/umzh.v74i6.7070

УДК 517.51

С. Б. Гембарська (Волин. нац. ун-т ім. Л. Українки, Луцьк),
П. В. Задерей (Нац. техн. ун-т України „КПІ ім. І. Сікорського”, Київ)

НАЙКРАЩІ ОРТОГОНАЛЬНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ ТИПУ НІКОЛЬСЬКОГО – БЄСОВА ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ У ПРОСТОРІ $B_{\infty,1}$

Exact order estimates are obtained for the best orthogonal trigonometric approximations of the Nikol'skii – Besov-type classes of periodic functions in one and many variables in the space $B_{\infty,1}$.

Одержано точні за порядком оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів типу Нікольського – Бєсова періодичних функцій однієї та багатьох змінних у просторі $B_{\infty,1}$.

1. Вступ. У цій статті продовжено дослідження апроксимаційних характеристик класів типу Нікольського – Бєсова періодичних функцій однієї та багатьох змінних (позначення $B^{\omega}_{p,\theta}$ і $B^{\Omega}_{p,\theta}$ відповідно) у просторі $B_{\infty,1}$, норма в якому є не слабшою, ніж L_∞-норма. Як зазначено у роботах [1 – 8], мотивацією дослідження апроксимаційних характеристик (найкращі наближення, поперечники, найкращі n-членні наближення та ін.) класів $B^r_{p,\theta}$ і $B^{\Omega}_{p,\theta}$ у просторах $B_{q,1}$, $q \in \{1,\infty\}$, була та обставина, що питання про їхні порядки, особливо у багатовимірному випадку у просторах L_1 і L_∞, у деяких ситуаціях досі залишаються відкритими (див. [9]).

Перед формулюванням одержаних результатів введемо необхідні позначення, наведемо означення функціональних класів і апроксимаційної характеристики, яку будемо досліджувати.

Нехай $\mathbb{R}^d$ — d-вимірний простір з елементами $x = (x_1, \ldots, x_d)$ і $(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_d y_d$ — скалярний добуток елементів $x, y \in \mathbb{R}^d$. Через $L_p(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^{d} [0, 2\pi)$, позначимо простір 2π-періодичних за кожною змінною функцій f, для яких

$$\|f\|_p := \|f\|_{L_p(\pi_d)} = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{L_\infty(\pi_d)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \pi_d} |f(x)| < \infty.$$

Далі будемо вважати, що для $f \in L_p(\pi_d)$ виконується умова

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x) dx_j = 0, \quad j = \overline{1, d},$$

і множину таких функцій позначимо $L^0_p(\pi_d)$.

Крім цього для зручності замість $L_p(\pi_d)$ будемо використовувати позначення L_p і, відповідно, L^0_p замість $L^0_p(\pi_d)$.

Означимо l-ту різницю функції $f \in L^0_p$, $1 \le p \le \infty$, з кроком h_j за змінною x_j згідно з формулою

$$\triangle_h^j f(x) = \sum_{n=0}^{l} (-1)^{l-n} C_l^n f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + nh_j, x_{j+1}, \ldots, x_d).$$

Для $f \in L_p^0$, $1 \le p \le \infty$, $h = (h_1, \ldots, h_d)$ і $t \in \mathbb{R}_+^d$ введемо мішану l-ту різницю

$$\triangle_h^l f(x) = \triangle_{h_d}^l \ldots \triangle_{h_1}^l f(x) = \triangle_{h_d}^l \Big(\ldots \big(\triangle_{h_1}^l f(x) \big) \Big)$$

і означимо мішаний модуль неперервності порядку l таким чином:

$$\Omega_l(f, t)_p = \sup_{\substack{|h_j| \le t_j \\ j=\overline{1,d}}} \|\triangle_h^l f(\cdot)\|_p.$$

Нехай $\Omega(t) = \Omega(t_1, \ldots, t_d)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l. Це означає, що функція $\Omega(t)$ задовольняє такі умови:

1) $\Omega(t) > 0$, $t_j > 0$, $j = \overline{1,d}$, і $\Omega(t) = 0$, якщо $\prod_{j=1}^{d} t_j = 0$;
2) $\Omega(t)$ зростає по кожній змінній;
3) $\Omega(m_1 t_1, \ldots, m_d t_d) \le \left(\prod_{j=1}^{d} m_j \right)^l \Omega(t)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$;
4) $\Omega(t)$ неперервна при $t_j \ge 0$, $j = \overline{1,d}$.

Наслідуючи С. Н. Бернштейна [10], будемо називати функцію однієї змінної $\varphi(\tau)$ майже зростаючою (майже спадною) на $[a, b]$, якщо існує стала $C_1 > 0$ ($C_2 > 0$), яка не залежить від τ_1, τ_2, така, що

$$\varphi(\tau_1) \le C_1 \varphi(\tau_2), \quad a \le \tau_1 \le \tau_2 \le b,$$

у випадку майже зростання і, відповідно,

$$\varphi(\tau_1) \ge C_2 \varphi(\tau_2), \quad a \le \tau_1 \le \tau_2 \le b,$$

у випадку майже спадання.

Будемо вважати, що функція $\Omega(t)$, $t \in \mathbb{R}_+^d > 0$, задовольняє також умови (S^α) і (S_l), які називають умовами Барі – Стєчкіна [11, 12]. Це означає наступне.

Функція однієї змінної $\varphi(\tau) > 0$, $\tau \in [0, 1]$, задовольняє умову (S^α), якщо $\dfrac{\varphi(\tau)}{\tau^\alpha}$ майже зростає при деякому $\alpha > 0$.

Функція $\varphi(\tau) > 0$, $\tau \in [0, 1]$, задовольняє умову (S_l), якщо $\dfrac{\varphi(\tau)}{\tau^\gamma}$ майже спадає при деякому $0 < \gamma < l$, $l \in \mathbb{N}$.

Тепер наведемо означення функціональних класів $B_{p,\theta}^\Omega$ ($B_{p,\theta}^\omega$ в одновимірному випадку), які було розглянуто в роботі [13].

Нехай $1 \le p$, $\theta \le \infty$ і $\Omega(t)$ — функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови 1 – 4, (S^α) і (S_l). Тоді класи $B_{p,\theta}^\Omega$ визначаються таким чином:

$$B_{p,\theta}^\Omega = \left\{ f \in L_p^0 \colon \|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} \le 1 \right\},$$

де

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} = \left(\int\limits_{\pi_d} \left(\frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)} \right)^{\theta} \prod_{j=1}^{d} \frac{dt_j}{t_j} \right)^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \le \theta < \infty,$$

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} = \sup_{t>0} \frac{\Omega_l(f,t)_p}{\Omega(t)}.$$

Зауважимо, що у випадку, коли $r = (r_1, \ldots, r_d)$, $0 < r_j < l$, $j = \overline{1,d}$, і $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^{r_j}$, класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ збігаються з аналогами класів Бєсова $B^{r}_{p,\theta}$, які розглядалися у роботах [14, 15]. Крім того, при $\theta = \infty$ класи $B^{r}_{p,\infty} = H^{r}_{p}$ є аналогами класів С. М. Нікольського [16]. Класи $B^{\Omega}_{p,\infty} \equiv H^{\Omega}_{p}$ розглядалися у роботі М. М. Пустовойтова [17].

У подальших міркуваннях нам буде зручно користуватися означенням класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ в дещо іншому вигляді. Для цього нагадаємо поняття порядкового співвідношення.

Для двох невід'ємних послідовностей $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ і $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ співвідношення (порядкова нерівність) $a_n \ll b_n$ означає, що існує стала $C_3 > 0$, яка не залежить від n і така, що $a_n \le C_3\, b_n$. Співвідношення $a_n \asymp b_n$ рівносильне тому, що $a_n \ll b_n$ і $b_n \ll a_n$.

Поставимо у відповідність кожному вектору $s \in \mathbb{N}^d$ множину вигляду

$$\rho(s) = \left\{ k \in \mathbb{Z}^d \colon 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j},\ j = \overline{1,d} \right\}$$

і для $f \in L^0_p$, $1 < p < \infty$, покладемо

$$\delta_s(f) := \delta_s(f,x) = \sum_{k \in \rho(s)} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)},$$

де $\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

Отже, для $f \in B^{\Omega}_{p,\theta}, 1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, де $\Omega(t)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови $1-4$, (S^{α}) і (S_l), справджуються співвідношення

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \begin{cases} \left(\sum_{s \in \mathbb{N}^d} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \big\|\delta_s(f)\big\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup_{s \in \mathbb{N}^d} \dfrac{\big\|\delta_s(f)\big\|_p}{\Omega(2^{-s})}, & \theta = \infty. \end{cases} \tag{1}$$

Тут і далі $\Omega(2^{-s}) = \Omega(2^{-s_1}, \ldots, 2^{-s_d})$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,d}$.

Зауважимо, що випадок $1 \le \theta < \infty$ в (1) було розглянуто у роботі [13], а випадок $\theta = \infty$ — у роботі [17].

Для норм функцій із класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ можна записати зображення, аналогічні (1) у випадках $p = 1$ і $p = \infty$, дещо видозмінивши при цьому „блоки" $\delta_s(f)$.

Позначимо через $V_m(u),\ m \in \mathbb{N},\ u \in \mathbb{R}$, ядро Валле Пуссена

$$V_m(u) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos ku + 2\sum_{k=m+1}^{2m-1} \left(\frac{2m-k}{m}\right) \cos ku$$

(при $m = 1$ третій доданок вважаємо рівним нулю).

Кожному вектору $s \in \mathbb{N}^d$ поставимо у відповідність поліном

$$A_s(x) = \prod_{j=1}^{d} (V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j)), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

і для $f \in L_p^0,\ 1 \le p \le \infty$, покладемо

$$A_s(f) := A_s(f, x) = (f * A_s)(x),$$

де $*$ — операція згортки.

Тоді справджуються співвідношення

$$\|f\|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \begin{cases} \left(\sum_{s\in\mathbb{N}^d} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|A_s(f)\|_p^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup_{s\in\mathbb{N}^d} \dfrac{\|A_s(f)\|_p}{\Omega(2^{-s})}, & \theta = \infty. \end{cases} \qquad (2)$$

Зазначимо, що випадок $1 \le \theta < \infty$ у (2) було розглянуто в роботі [13], а випадок $\theta = \infty$ — в роботі [17].

Нагадаємо також, що для введених класів справедливим є співвідношення

$$B^{\Omega}_{p,1} \subset B^{\Omega}_{p,\theta_1} \subset B^{\Omega}_{p,\theta_2} \subset B^{\Omega}_{p,\infty} \equiv H^{\Omega}_p,$$
$$1 \le \theta_1 \le \theta_2 \le \infty.$$

У подальших дослідженнях будемо розглядати класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ (відповідно $B^{\omega}_{p,\theta}$ при $d = 1$), які визначаються функцією типу мішаного модуля неперервності порядку l деякого спеціального вигляду, а саме,

$$\Omega(t) = \omega\left(\prod_{j=1}^{d} t_j\right), \qquad (3)$$

де $\omega(\tau)$ — задана функція (однієї змінної) типу модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови (S^{α}) і (S_l). Зрозуміло, що для $\Omega(t)$ вигляду (3) виконуються властивості 1–4 функції типу мішаного модуля неперервності порядку l, а також умови (S^{α}) і (S_l), і тому справедливими є наведені вище зображення (1), (2) для норм функцій із класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$.

Тепер дамо означення норми у підпросторі $B_{\infty,1}$ простору L_{∞}.

Для тригонометричних поліномів t вона означується згідно з формулою

$$\|t\|_{B_{\infty,1}} = \sum_{s \in \mathbb{N}^d} \|A_s(t)\|_\infty.$$

Аналогічним чином означується норма $\|f\|_{B_{\infty,1}}$ для функцій $f \in L_\infty$ за умови збіжності ряду $\sum_{s \in \mathbb{N}^d} \|A_s(t)\|_\infty$. При цьому справедливим є співвідношення

$$\| \cdot \|_\infty \ll \| \cdot \|_{B_{\infty,1}}. \tag{4}$$

Означимо апроксимаційну характеристику, яку будемо досліджувати.

Нехай Ω_M — довільний набір із M d-вимірних векторів $k^j = (k_1^j, \ldots, k_d^j)$, $j = \overline{1, M}$, з цілочисловими координатами. Для $f \in L_1(\pi_d)$ покладемо

$$S_{\Omega_M}(f) := S_{\Omega_M}(f, x) = \sum_{j=1}^{M} \widehat{f}(k^j) e^{i(k^j, x)}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Нехай $\mathscr{X}$ — нормований простір з нормою $\| \cdot \|_{\mathscr{X}}$, $\mathscr{X} \subset L_1(\pi_d)$. Для $f \in \mathscr{X}$ розглянемо величину

$$e_M^\perp(f)_{\mathscr{X}} = \inf_{\Omega_M} \left\| f - S_{\Omega_M}(f) \right\|_{\mathscr{X}}$$

і для функціонального класу $F \subset \mathscr{X}$ означимо

$$e_M^\perp(F)_{\mathscr{X}} := \sup_{f \in F} e_M^\perp(f)_{\mathscr{X}}. \tag{5}$$

Величину $e_M^\perp(F)_{\mathscr{X}}$ називають найкращим ортогональним тригонометричним наближенням класу F у просторі $\mathscr{X}$.

Апроксимаційна характеристика (5) для різноманітних функціональних класів F як у просторах Лебега $L_q(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$, так і в інших функціональних просторах, досліджувалась у роботах [18 – 24]. З детальнішою бібліографією можна ознайомитись у монографії [23].

Перед тим як безпосередньо перейти до розгляду одержаних результатів, наведемо відоме твердження, потрібне для подальшого викладу.

Теорема A [24]. *Нехай $d \ge 1$, $1 \le p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ і $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S^α) з деяким $\alpha > \dfrac{1}{p}$, а також умову (S_l). Тоді для будь-яких M, $n \in \mathbb{N}$ таких, що $M \asymp 2^n n^{d-1}$, справджується оцінка*

$$e_M^\perp(B_{p,\theta}^\Omega)_\infty \asymp \omega(2^{-n})\, 2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

2. Оцінки величин $e_M^{\perp}(B^{\omega}_{p,\theta})_{B_{\infty,1}}$. У цьому пункті встановимо порядок найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $B^{\omega}_{p,\theta}$ у просторі $B_{\infty,1}$.

Теорема 1. *Нехай $d=1$, $1<p<\infty$, $1\le\theta\le\infty$ і $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S^{α}) з деяким $\alpha>\dfrac{1}{p}$, а також умову (S_l). Тоді має місце оцінка*

$$e_M^{\perp}(B^{\omega}_{p,\theta})_{B_{\infty,1}} \asymp \omega(M^{-1})M^{\frac{1}{p}}. \tag{6}$$

Доведення. Встановимо в (6) оцінку зверху, попередньо зазначивши, що внаслідок вкладення $B^{\omega}_{p,\theta}\subset H^{\omega}_p$, $1\le\theta<\infty$, її достатньо отримати при $\theta=\infty$, тобто для класів H^{ω}_p.

Отже, нехай $M\in\mathbb{N}$ і $f\in H^{\omega}_p$. Розглянемо наближення функції f за допомогою поліномів вигляду

$$S_n(f):=S_n(f,x)=\sum_{s=1}^{n}\delta_s(f),\quad x\in\mathbb{R},\quad n\in\mathbb{N},$$

де число n пов'язане з M співвідношенням $2^n\le M\le 2^{n+1}$. Тоді згідно з означенням норми у просторі $B_{\infty,1}$, беручи до уваги одну з властивостей згортки, отримуємо

$$e_M^{\perp}(f)_{B_{\infty,1}}\ll\|f-S_n(f)\|_{B_{\infty,1}}\le\left\|\sum_{s=n+1}^{\infty}\delta_s(f)\right\|_{B_{\infty,1}}=$$

$$=\sum_{s=n+1}^{\infty}\left\|A_s*\sum_{s'=s-1}^{s+1}\delta_{s'}(f)\right\|_{\infty}\le\sum_{s=n+1}^{\infty}\|A_s\|_{p'}\left\|\sum_{s'=s-1}^{s+1}\delta_{s'}(f)\right\|_{p}=J_1, \tag{7}$$

де $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$.

Для продовження оцінювання величини J_1 зазначимо, що згідно зі співвідношенням $\|V_{2^s}\|_p\asymp$ $\asymp 2^{s(1-\frac{1}{p})}$, $1\le p\le\infty$ (див., наприклад, [25], гл. 1, §1), маємо

$$\|A_s\|_{p'}=\|V_{2^s}-V_{2^{s-1}}\|_{p'}\le\|V_{2^s}\|_{p'}+\|V_{2^{s-1}}\|_{p'}\asymp 2^{\frac{s}{p}}. \tag{8}$$

Крім того, беручи до уваги, що для $f\in H^w_p$

$$\|\delta_{s'}(f)\|_p\ll\omega(2^{-s'}),\qquad s'\in\mathbb{N},\quad 1<p<\infty,$$

записуємо

$$J_1\ll\sum_{s=n+1}^{\infty}2^{\frac{s}{p}}\sum_{s'=s-1}^{s+1}\|\delta_{s'}(f)\|_p\ll$$

$$\ll\sum_{s=n+1}^{\infty}2^{\frac{s}{p}}\sum_{s'=s-1}^{s+1}\omega(2^{-s'})\ll\sum_{s=n+1}^{\infty}2^{\frac{s}{p}}\omega(2^{-s})=J_2. \tag{9}$$

Далі, зауважуючи, що згідно з умовою теореми

$$\frac{\omega(2^{-s})}{2^{-\alpha s}}\le C_4\frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}},\qquad s\ge n,\quad C_4>0,$$

продовжуємо оцінювання величини J_2:

$$J_2 \ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{-s(\alpha-\frac{1}{p})} \ll \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}. \tag{10}$$

Насамкінець, враховуючи співвідношення між числами M і n із (7)–(10), приходимо до оцінки

$$e_M^{\perp}(B_{p,\theta}^{\omega})_{B_{\infty,1}} \ll \omega(M^{-1})M^{\frac{1}{p}}.$$

Щодо оцінки знизу в (6) зауважимо, що вона є наслідком теореми A за умови $d = 1$, оскільки відповідно до співвідношення (4)

$$e_M^{\perp}(B_{p,\theta}^{\omega})_{B_{\infty,1}} \gg e_M^{\perp}(B_{p,\theta}^{\omega})_{\infty}.$$

Теорему 1 доведено.

***Наслідок* 1.** *Нехай $d = 1$, $1 \le \theta \le \infty$, $1 < p < \infty$ і $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S^{α}) з деяким $\alpha > \dfrac{1}{p}$, а також умову (S_l). Тоді*

$$\mathscr{E}_n(B_{p,\theta}^{\omega})_{B_{\infty,1}} = \sup_{f\in B_{p,\theta}^{\omega}} \|f - S_n(f)\|_{B_{\infty,1}} \asymp \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}. \tag{11}$$

Оцінку зверху в (11) встановлено при доведенні теореми 1. Відповідна оцінка знизу також є наслідком цієї теореми, оскільки при $2^n \le M \le 2^{n+1}$

$$\mathscr{E}_n(B_{p,\theta}^{\omega})_{B_{\infty,1}} \gg e_M^{\perp}(B_{p,\theta}^{\omega})_{B_{\infty,1}} \asymp \omega(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}.$$

***Зауваження* 1.** Проаналізувавши доведення теореми 1 і наслідку 1, можна зробити висновок, що при $1 \le \theta \le \infty$ і $\omega(\tau)$, які задовольняють умову (S^{α}) з деяким $\alpha > \dfrac{1}{p}$, а також умову (S_l), справджуються співвідношення

$$e_M^{\perp}(B_{p,\theta}^{\omega})_{B_{\infty,1}} \asymp e_M^{\perp}(B_{p,\theta}^{\omega})_{\infty},$$
$$\mathscr{E}_n(B_{p,\theta}^{\omega})_{B_{\infty,1}} \asymp \mathscr{E}_n(B_{p,\theta}^{\omega})_{\infty}.$$

***Зауваження* 2.** Якщо $1 < p < \infty$, $\omega(\tau) = \tau^r$, де $r > \dfrac{1}{p}$, то при $1 \le \theta \le \infty$ справедливою є оцінка

$$e_M^{\perp}(B_{p,\theta}^{r})_{B_{\infty,1}} \asymp M^{-r+\frac{1}{p}},$$

яку встановлено в роботі [3].

3. Оцінки величин $e_M^{\perp}(B_{p,\theta}^{\Omega})_{B_{\infty,1}}$. Спочатку наведемо деякі позначення, які будуть необхідні при доведенні основного результату цього пункту, а також наслідку з нього.

Для вектора $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, d}$, покладемо

$$\rho(s) = \left\{k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d \colon 2^{s_j-1} \le |k_j| < 2^{s_j}, j = \overline{1, d}\right\}$$

і для $n \in \mathbb{N}$ визначимо множину

$$Q_n := \bigcup_{(s,1)\le n} \rho(s),$$

яка називається східчастим гіперболічним хрестом. Якщо $f \in L_1(\pi_d)$, то через $S_{Q_n}(f)$ позначимо її часткову так звану східчасто-гіперболічну суму Фур'є:

$$S_{Q_n}(f) := S_{Q_n}(f,x) = \sum_{k \in Q_n} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)} = \sum_{(s,1) \le n} \delta_s(f), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Справедливим є таке твердження.

Теорема 2. *Нехай* $d \ge 2$, $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $\Omega(t) = \omega\Big(\prod_{j=1}^{d} t_j\Big)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S^α) *з деяким* $\alpha > \dfrac{1}{p}$ *і умову* (S_l). *Тоді для будь-якої послідовності* $M = (M_n)_{n=1}^{\infty}$ *натуральних чисел такої, що виконується співвідношення* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *має місце оцінка*

$$e_M^{\perp}(B_{p,\theta}^{\Omega})_{B_{\infty,1}} \asymp \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \tag{12}$$

Доведення. Встановимо в (12) спочатку оцінку зверху. Покажемо, що шукана оцінка реалізується за наближення функцій $f \in B_{p,\theta}^{\Omega}$ їх східчасто-гіперболічними сумами Фур'є $S_{Q_n}(f)$ за умови $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

Отже, згідно з означенням норми у просторі $B_{\infty,1}$ і співвідношенням (8) можемо записати

$$\begin{aligned}
e_M^{\perp}(f)_{B_{\infty,1}} \ll \|f - S_{Q_n}(f)\|_{B_{\infty,1}} &= \Bigg\| \sum_{(s,1) > n} \delta_s(f) \Bigg\|_{B_{\infty,1}} = \\
&= \sum_{s \in \mathbb{N}^d} \Bigg\| A_s * \sum_{\substack{s' \in \mathbb{N}^d \\ (s',1) \ge n+1}} \delta_{s'}(f) \Bigg\|_{\infty} \le \\
&\le \sum_{(s,1) \ge n-d} \Bigg\| A_s * \sum_{\|s-s'\|_\infty \le 1} \delta_{s'}(f) \Bigg\|_{\infty} \le \\
&\le \sum_{(s,1) \ge n-d} \|A_s\|_{p'} \Bigg\| \sum_{\|s-s'\|_\infty \le 1} \delta_{s'}(f) \Bigg\|_{p} \ll \\
&\ll \sum_{(s,1) \ge n-d} 2^{(s,1)\frac{1}{p}} \sum_{\|s-s'\|_\infty \le 1} \big\|\delta_{s'}(f)\big\|_p \le \\
&\ll \sum_{(s,1) \ge n-d} 2^{\frac{2d}{p}} \sum_{\|s-s'\|_\infty \le 1} 2^{(s',1)\frac{1}{p}} \big\|\delta_{s'}(f)\big\|_p \ll \\
&\ll \sum_{(s,1) \ge n-2d} 2^{(s,1)\frac{1}{p}} \big\|\delta_s(f)\big\|_p = J_3.
\end{aligned} \tag{13}$$

Для продовження оцінювання величини J_3 розглянемо кілька випадків залежно від значень параметра θ.

Нехай $\theta \in (1, \infty)$. Тоді, скориставшись нерівністю Гельдера, будемо мати

$$J_3 \leq \left(\sum_{(s,1) \geq n-2d} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)}) \|\delta_s(f)\|_p^\theta \right)^{1/\theta} \left(\sum_{(s,1) \geq n-2d} \omega^{\theta'}(2^{-(s,1)}) 2^{(s,1)\frac{1}{p}\theta'} \right)^{1/\theta'} \ll$$

$$\ll \|f\|_{B^\Omega_{p,\theta}} \left(\sum_{(s,1) \geq n-2d} \omega^{\theta'}(2^{-(s,1)})\, 2^{(s,1)\frac{1}{p}\theta'} \right)^{1/\theta'} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{(s,1) \geq n-2d} \omega^{\theta'}(2^{-(s,1)}) 2^{(s,1)\theta'\frac{1}{p}} \right)^{1/\theta'} = J_4. \tag{14}$$

Далі, позначивши $n - 2d = m$ і врахувавши, що

$$\frac{\omega(2^{-(s,1)})}{2^{-\alpha(s,1)}} \leq C_5 \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}}, \qquad C_5 > 0, \quad (s,1) \geq m, \tag{15}$$

одержимо

$$J_4 \ll \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}} \left(\sum_{(s,1) \geq m} 2^{-(s,1)\alpha\theta'} 2^{(s,1)\theta'\frac{1}{p}} \right)^{1/\theta'} =$$

$$= \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}} \left(\sum_{(s,1) \geq m} 2^{-(s,1)(\alpha - \frac{1}{p})\theta'} \right)^{1/\theta'} =$$

$$= \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}} \left(\sum_{j \geq m} 2^{-j(\alpha - \frac{1}{p})\theta'} \sum_{(s,1)=j} 1 \right)^{1/\theta'} \asymp$$

$$\asymp \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}} \left(\sum_{j \geq m} 2^{-j(\alpha - \frac{1}{p})\theta'} j^{d-1} \right)^{1/\theta'} \ll \omega(2^{-m}) 2^{\frac{m}{p}} m^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \tag{16}$$

У випадку $\theta = \infty$ для величини J_3 можна записати

$$J_3 \leq \sup_{s\,:\,(s,1) \geq m} \frac{\|\delta_s(f)\|_p}{\omega(2^{-(s,1)})} \sum_{(s,1) \geq m} \omega(2^{-(s,1)}) 2^{(s,1)\frac{1}{p}} \ll$$

$$\ll \|f\|_{B^\Omega_{p,\infty}} \sum_{(s,1) \geq m} \omega(2^{-(s,1)}) 2^{(s,1)\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \sum_{(s,1) \geq m} \omega(2^{-(s,1)}) 2^{(s,1)\frac{1}{p}} = J_5. \tag{17}$$

Взявши до уваги (15), продовжимо оцінювання J_5 :

$$J_5 \ll \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}} \sum_{(s,1)\geq m} 2^{-\alpha(s,1)} 2^{(s,1)\frac{1}{p}} = \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}} \sum_{j\geq m} 2^{-j(\alpha-\frac{1}{p})} \sum_{(s,1)=j} 1 \asymp$$

$$\asymp \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}} \sum_{j\geq m} 2^{-j(\alpha-\frac{1}{p})} j^{d-1} \ll \omega(2^{-m}) 2^{\frac{m}{p}} m^{d-1}. \tag{18}$$

При $\theta = 1$ продовження оцінювання величини J_3 з урахуванням (15) набере вигляду

$$J_3 \leq \sup_{s\,:\,(s,1)\geq m} 2^{(s,1)\frac{1}{p}} \omega(2^{-(s,1)}) \sum_{(s,1)\geq m} \omega^{-1}(2^{-(s,1)}) \|\delta_s(f)\|_p \ll$$

$$\ll \sup_{s\,:\,(s,1)\geq m} \omega(2^{-(s,1)}) 2^{(s,1)\frac{1}{p}} \|f\|_{B^{\Omega}_{p,1}} \leq \sup_{s\,:\,(s,1)\geq m} \omega(2^{-(s,1)}) 2^{(s,1)\frac{1}{p}} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-m})}{2^{-\alpha m}} \sup_{s\,:\,(s,1)\geq m} 2^{-(s,1)(\alpha-\frac{1}{p})} \asymp \omega(2^{-m}) 2^{\frac{m}{p}}. \tag{19}$$

Таким чином, зіставивши (13) – (19), одержимо шукану оцінку зверху величини $e^{\perp}_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_{B_{\infty,1}}$.

Щодо оцінки знизу в (12) зауважимо, що згідно зі співвідношенням (4) вона є наслідком із теореми A, тобто

$$e^{\perp}_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_{B_{\infty,1}} \gg e^{\perp}_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_{\infty} \asymp \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}, \quad M \asymp 2^n n^{d-1}.$$

Теорему 2 доведено.

Для того щоб сформулювати наслідок з теореми 2, наведемо означення відповідної апроксимаційної характеристики.

Нехай $\mathscr{X}$ — нормований простір із нормою $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$, $\mathscr{X} \subset L_1(\pi_d)$. Для класу $F \subset \mathscr{X}$ покладемо

$$\mathscr{E}_{Q_n}(F)_{\mathscr{X}} := \sup_{f\in\mathscr{X}} \|f - S_{Q_n}(f)\|_{\mathscr{X}}.$$

Зазначимо, що величини $\mathscr{E}_{Q_n}(F)_{\mathscr{X}}$ для класів Соболєва $W^r_{p,\alpha}$ і Нікольського – Бєсова $B^r_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторах L_q, $1 \leq q \leq \infty$, вивчали у багатьох роботах. З детальною бібліографією можна ознайомитись у монографіях [9, 23, 25, 26].

Отже, безпосередньо з теореми 2 випливає таке твердження.

Наслідок 2. *Нехай $d \geq 2$, $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\Omega(t) = \omega\Big(\prod_{j=1}^d t_j\Big)$, де $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S^{α}) з деяким $\alpha > \dfrac{1}{p}$ і умову (S_l). Тоді справедливою є оцінка*

$$\mathscr{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_{B_{\infty,1}} \asymp \omega(2^{-n}) 2^{\frac{n}{p}} n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \tag{20}$$

Оцінку зверху в (20) встановлено при доведенні теореми 2, а відповідна оцінка знизу також випливає з цієї теореми, оскільки при $M \asymp 2^n n^{d-1}$

$$\mathscr{E}_{Q_n}(B^{\Omega}_{p,\theta})_{B_{\infty,1}} \gg e^{\perp}_M(B^{\Omega}_{p,\theta})_{B_{\infty,1}}.$$

***Зауваження* 3.** Проаналізувавши доведення теореми 2 і наслідку 2, зазначимо справедливість співвідношень

$$e_M^{\perp}(B_{p,\theta}^{\Omega})_{B_{\infty,1}} \asymp e_M^{\perp}(B_{p,\theta}^{\Omega})_{\infty},$$

$$\mathscr{E}_{Q_n}(B_{p,\theta}^{\Omega})_{B_{\infty,1}} \asymp \mathscr{E}_{Q_n}(B_{p,\theta}^{\Omega})_{\infty}.$$

***Зауваження* 4.** Якщо $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^{r_1}$, $d \geq 2$, то при $1 < p < \infty$, $r_1 > \dfrac{1}{p}$, $1 \leq \theta \leq \infty$ має місце оцінка

$$e_M^{\perp}(B_{p,\theta}^{r})_{B_{\infty,1}} \asymp (M^{-1}\log^{d-1} M)^{r_1-\frac{1}{p}}(\log^{d-1} M)^{1-\frac{1}{\theta}}. \tag{21}$$

Оцінку (21) встановлено в роботі [3].

Насамкінець звернемо увагу на особливість багатовимірного випадку $(d \geq 2)$ у порівнянні з одновимірним, яка полягає в такому.

Аналізуючи теорему 1 і наслідок 1, бачимо, що оцінки відповідних апроксимаційних характеристик класів $B_{p,\theta}^{\omega}$, $1 \leq \theta < \infty$, і H_p^{ω} у просторі $B_{\infty,1}$ однакові за порядком і, навіть більше, ці оцінки для класів $B_{p,\theta}^{\omega}$, $1 \leq \theta < \infty$, не залежать від параметра θ.

Принципово інша ситуація спостерігається у багатовимірному випадку. А саме, як видно з теореми 2 і наслідку 2, оцінки розглянутих у них величин залежать від параметра θ і, крім того, ці оцінки є різними за порядком для класів $B_{p,\theta}^{\Omega}, 1 \leq \theta < \infty$, і H_p^{Ω}.

Література

1. А. С. Романюк, Энтропийные числа и поперечники классов $B_{p,\theta}^{r}$ периодических функций многих переменных, Укр. мат. журн., **68**, № 10, 1403 – 1417 (2016).
2. А. С. Романюк, В. С. Романюк, *Апроксимаційні характеристики класів періодичних функцій багатьох змінних у просторі* $B_{\infty,1}$, Укр. мат. журн., **71**, № 2, 271 – 278 (2019).
3. А. С. Романюк, В. С. Романюк, *Оцінки деяких апроксимаційних характеристик класів періодичних функцій багатьох змінних*, Укр. мат. журн., **71**, № 8, 1102 – 1115 (2019).
4. А. С. Романюк, В. С. Романюк, *Апроксимаційні характеристики і властивості операторів найкращого наближення класів функцій з просторів Соболєва та Нікольського – Бєсова*, Укр. мат. вісн., **17**, № 3, 372 – 395 (2020).
5. А. С. Романюк, С. Я. Янченко, *Оцінки апроксимаційних характеристик і властивості операторів найкращого наближення класів періодичних функцій у просторі* $B_{1,1}$, Укр. мат. журн., **73**, № 8, 1102 –1119 (2021).
6. М. В. Гембарський, С. Б. Гембарська, *Поперечники класів* $B_{p,\theta}^{\Omega}$ *періодичних функцій багатьох змінних у просторі* $B_{1,1}$, Укр. мат. вісн., **15**, № 1, 43 – 57 (2018).
7. М. В. Гембарський, С. Б. Гембарська, К. В. Соліч, *Найкращі наближення і поперечники класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних у просторі* $B_{\infty,1}$, Мат. студ., **51**, № 1, 74 – 85 (2019).
8. O. V. Fedunyk-Yaremchuk, M. V. Hembarskyi, S. B. Hembarska, *Approximative characteristics of the Nikol'skii – Besov-type classes of periodic functions in the space* $B_{\infty,1}$, Carpathian Math. Publ., **12**, № 2, 376 – 391 (2020).
9. D. Ding, V. N. Temlyakov, T. Ullrich, *Hyperbolic cross approximation*, Birkhäuser (2018).
10. С. Н. Бернштейн, *Собрание сочинений, т. 2, Конструктивная теория функций (1931 – 1953)*, Изд-во АН СССР, Москва (1954).
11. С. Б. Стечкин, *О порядке наилучших приближений непрерывных функций*, Изв. АН СССР. Сер. мат., **15**, 219 – 242 (1951).
12. Н. К. Бари, С. Б. Стечкин, *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций*, Тр. Моск. мат. о-ва, **5**, 483 – 522 (1956).
13. S. Yongsheng, W. Heping, *Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness*, Тр. Мат. ин-та РАН, **219**, 356 – 377 (1997).

14. Т. И. Аманов, *Теоремы представления и вложения для функциональных пространств* $S^{(r)}_{p,\theta}B(\mathbb{R}_n)$ *и* $S^{(r)}_{p,\theta}$ $(0 \leq \leq x_j \leq 2\pi;\ j = 1, \ldots, n)$, Тр. Мат. ин-та АН СССР, **77**, 5 – 34 (1965).
15. П. И. Лизоркин, С. М. Никольский, *Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения*, Тр. Мат. ин-та АН СССР, **187**, 143 – 161 (1989).
16. С. М. Никольский, *Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гельдера*, Сиб. мат. журн., **4**, № 6, 1342 – 1364 (1963).
17. Н. Н. Пустовойтов, *Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности*, Anal. Math., **20**, 35 – 48 (1994).
18. Э. С. Белинский, *Приближение „плавающей” системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной*, Исследования по теории функций многих вещественных переменных, Ярослав. ун-т, Ярославль (1988), с. 16 – 33.
19. А. С. Романюк, *Приближение классов функций многих переменных их ортогональными проекциями на подпространства тригонометрических полиномов*, Укр. мат. журн., **48**, № 1, 80 – 89 (1996).
20. А. С. Романюк, *Приближение классов периодических функций многих переменных*, Мат. заметки, **71**, № 1, 109 – 121 (2002).
21. А. С. Романюк, *Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова* $B^r_{p,\theta}$ *периодических функций многих переменных*, Изв. РАН. Сер. мат., **70**, № 2, 69 – 98 (2006).
22. А. С. Романюк, *Наилучшие тригонометрические приближения классов периодических функций многих переменных в равномерной метрике*, Мат. заметки, **82**, № 2, 247 – 261 (2007).
23. А. С. Романюк, *Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных*, Праці Ін-ту математики НАН України, **93** (2012).
24. А. Ф. Конограй, С. А. Стасюк, *Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів* $B^{\Omega}_{p,\theta}$ *періодичних функцій багатьох змінних*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **4**, № 1, 151 – 171 (2007).
25. V. N. Temlyakov, *Approximation of periodic functions*, Nova Sci. Publ., New York (1993).
26. В. Н. Темляков, *Приближение функций с ограниченной смешанной производной*, Тр. Мат. ин-та АН СССР, **178**, 1 – 112 (1986).

Одержано 27.12.21