DOI: 10.37863/umzh.v74i7.7087

УДК 517.929.2

М. Ф. Городній (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ОБМЕЖЕНІ ТА СУМОВНІ РОЗВ'ЯЗКИ ОДНОГО РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ З КУСКОВО-СТАЛИМИ ОПЕРАТОРНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ *

We prove the necessity of known sufficient conditions for the existence of a unique solution bounded or summable with degree p for a linear difference equation with piecewise constant operator coefficients.

Доведено необхідність відомих достатніх умов існування єдиного обмеженого або сумовного зі степенем p розв'язку лінійного різницевого рівняння з кусково-сталими операторними коефіцієнтами.

1. Вступ. Нехай X — комплексний банахів простір із нормою $\|\cdot\|$ і нульовим елементом $\bar{0}$; $L(X)$ — простір лінійних неперервних операторів, що діють із X в X; I і O — відповідно одиничний і нульовий оператори в X. Через $\sigma(T)$, $\rho(T)$, $r(T)$ позначатимемо відповідно спектр, резольвентну множину і спектральний радіус оператора $T \in L(X)$. Покладемо

$$l_\infty(\mathbb{Z}, X) = \left\{ \bar{x} = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset X \;\Big|\; \|\bar{x}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\| < \infty \right\},$$

$$l_p(\mathbb{Z}, X) = \left\{ \bar{x} = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\} \subset X \;\Big|\; \|\bar{x}\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}, \quad 1 \le p < \infty.$$

Зазначимо, що для кожного $p \in [1; \infty]$ $l_p(\mathbb{Z}, X)$ — банахів простір із покоординатним додаванням і множенням на комплексне число і нормою $\|\cdot\|_p$.

Нехай A, B — фіксовані оператори з $L(X)$. Розглянемо різницеве рівняння

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= Ax_n + y_n, \quad n \ge 1, \\ x_{n+1} &= Bx_n + y_n, \quad n \le 0, \end{aligned} \tag{1}$$

в якому $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — задана, а $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — шукана послідовність елементів простору X. Будемо досліджувати умови на оператори A, B, при виконанні яких справджується така умова.

Умова p-сумовності (обмеженості при $p = \infty$). Для довільної послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\} \in l_p(\mathbb{Z}, X)$ рівняння (1) має єдиний розв'язок $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ у просторі $l_p(\mathbb{Z}, X)$.

Відомо (див., наприклад, [1, с. 32–34]), що коли спектр $\sigma(A)$ оператора A не перетинається з одиничним колом $S = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$, то простір X розкладається в пряму суму інваріантних щодо A підпросторів $X = X_-(A) \dot{+} X_+(A)$ таким чином, що звуження A_-, A_+ оператора A на $X_-(A)$, $X_+(A)$ мають спектри $\sigma_-(A), \sigma_+(A)$, де $\sigma_-(A)$ — частина спектра оператора A, що лежить всередині, а $\sigma_+(A)$ — зовні кола S. На підставі цього факту в [2] доведено таку теорему.

* Виконано за фінансової підтримки Міністерства освіти і науки України (грант Міністерства освіти і науки України для перспективних розробок з наукового напрямку „Математичні науки та природничі науки" в Київському національному університеті імені Т. Шевченка).

Теорема 1. *Нехай оператори* A, B *задовольняють такі умови*:

i_1) $\sigma(A) \cap S = \varnothing$, $\sigma(B) \cap S = \varnothing$;

i_2) $X = X_-(A) \dot{+} X_+(B)$.

Тоді для довільного $p \in [1; \infty]$ *різницеве рівняння* (1) *задовольняє умову* p*-сумовності.*

У роботі [3] показано, що у випадку скінченновимірного простору X умови i_1), i_2) не лише достатні, а й необхідні для того, щоб рівняння (1) задовольняло умову обмеженості. Також зауважимо, що на підставі теореми 6 із [4] справджується таке твердження.

Теорема 2. *Якщо різницеве рівняння* (1) *задовольняє умову* p*-сумовності для деякого* $p \in \in [1; \infty]$, *то воно задовольняє умову* p*-сумовності для всіх* $p \in [1; \infty]$.

Використовуючи зв'язок умови обмеженості й умови експоненціальної дихотомії відповідного однорідного різницевого рівняння, В. Ю. Слюсарчук в роботі [5] отримав критерій виконання умови обмеженості для різницевого рівняння з кусково-сталими операторними коефіцієнтами загального вигляду, частковим випадком якого є таке твердження.

Теорема 3. *Для того щоб різницеве рівняння* (1) *задовольняло умову обмеженості, необхідно і достатньо, щоб банахів простір* X *зображувався у вигляді прямих сум підпросторів* $X = X_0^- \dot{+} X_0^+ = X_1^- \dot{+} X_1^+$ *таким чином, що*:

a_1) $B(X_0^-) \subset X_0^- \cap X_1^-$, $B(X_0^+) = X_0^+ = X_1^+$, *оператор* $P_0^+ B P_0^+ : X_0^+ \to X_0^+$ *неперервно оборотний, а також* $r((P_0^+ B P_0^+)^{-1}) < 1, r(P_0^- B P_0^-) < 1$;

a_2) $A(X_1^-) \subset X_1^-$, $A(X_1^+) = X_1^+$, *оператор* $P_1^+ A P_1^+$ *неперервно оборотний, а також* $r((P_1^+ A P_1^+)^{-1}) < 1$, $r(P_1^- A P_1^-) < 1$.

Тут P_0^-, P_0^+ *— проєктори, що відповідають зображенню* $X = X_0^- \dot{+} X_0^+$, *а* P_1^-, P_1^+ *— зображенню* $X = X_1^- \dot{+} X_1^+$.

Зазначимо, що перевірка умов теореми 3, як і умов експоненціальної дихотомії, є нетривіальною задачею, оскільки доведення теореми 3 не містить ефективного способу побудови зображень $X = X_0^- \dot{+} X_0^+ = X_1^- \dot{+} X_1^+$.

Мета цієї статті — довести таку теорему.

Теорема 4. *Умови* i_1), i_2) *теореми* 1 *є необхідними для того, щоб різницеве рівняння* (1) *задовольняло умову обмеженості.*

У випадку, коли оператори A, B додатково неперервно оборотні, теорему 4 доведено в [6]. Аналогічний результат отримано також в [7] у випадку, коли оператор B неперервно оборотний і оператори A, B^{-1} задовольняють деякі додаткові умови.

Для різницевого рівняння еквівалентність умови обмеженості й умови експоненціальної дихотомії доведено в [8, 9] для обмеженого і в [4] для необмеженого змінного операторного коефіцієнта. Про дослідження задач щодо існування, зображення й властивостей обмежених розв'язків лінійних різницевих рівнянь див., наприклад, [4, 5, 10 – 13], а сумовних зі степенем p — [4, 12] та наведену там бібліографію.

2. Допоміжні твердження. Покладемо

$$Q_-(A) = \left\{ u \in X \;\Big|\; \sup_{n \geq 1} \|A^n u\| < \infty \right\},$$

$$Q_+(B) = \Big\{ u \in X \;\Big|\; \text{існує така послідовність} \{a(k,u),\ k \leq 0\}, \text{що}$$

$$a(0,u)=u;\ Ba(k,u)=a(k+1,u) \text{ для кожного } k\le -1;\ \sup_{k\le 0}\|a(k,u)\|<\infty\Big\}.$$

Зазначимо, що $Q_-(A)$ і $Q_+(B)$ — лінійні многовиди, інваріантні щодо операторів A і B відповідно.

При доведенні теореми 4 будемо використовувати такі леми.

Лема 1. *Якщо різницеве рівняння* (1) *задовольняє умову обмеженості, то для кожного* $u\in Q_+(B)$ *існує єдина послідовність* $\{a(k,u), k\le 0\}$ *з означення* $Q_+(B)$, *а* $Q_+(B)$ *є підпростором в* X.

Доведення. При фіксованому $y\in Q_+(B)$ послідовність

$$\Big\{\dots,\ a(-2,y),\ \underbrace{a(-1,y)}_{0},\ \bar 0,\ \bar 0,\dots\Big\} \tag{2}$$

є відповідним до послідовності $y_0=-y,\ y_n=\bar 0,\ n\ne 0$, обмеженим розв'язком рівняння (1). Внаслідок умови обмеженості цей обмежений розв'язок єдиний, а отже, послідовність $\{a(k,y), k\le 0\}$ визначається єдиним чином.

Покажемо, що лінійний многовид $Q_+(B)$ є замкненим. Зафіксуємо таку послідовність $\{v_m, m\ge 1\}\subset Q_+(B)$, що $v_m\to v,\ m\to\infty$ в X, і доведемо, що $v\in Q_+(B)$. Покладемо для кожного $m\ge 1$

$$\bar v_m=\Big\{\dots,\ \bar 0,\ \underbrace{-v_m}_{0},\ \bar 0,\dots\Big\}.$$

Тоді у просторі $l_\infty(\mathbb Z,X)$

$$\bar v_m\to\bar v=\Big\{\dots,\ \bar 0,\ \underbrace{-v}_{0},\ \bar 0,\dots\Big\},\quad m\to\infty.$$

Розглянемо оператор $\mathbb T\in l_\infty(\mathbb Z,X)$, який визначається за правилом

$$\mathcal T\bar x=\{x_{n+1}-T_nx_n, n\in\mathbb Z\},\quad \bar x=\{x_n, n\in\mathbb Z\}\in l_\infty(\mathbb Z,X),$$

де $T_n=A,\ n\ge 1;\ T_n=B,\ n\le 0$. З умови обмеженості і теореми Банаха про обернений оператор випливає, що оператор $\mathcal T$ неперервно оборотний. Тому

$$\mathcal T^{-1}\bar v_m\to\mathcal T^{-1}\bar v,\quad m\to\infty, \tag{3}$$

у просторі $l_\infty(\mathbb Z,X)$. Аналогічно (2) для кожного $m\ge 1$

$$\mathcal T^{-1}\bar v_m=\Big\{\dots,\ a(-2,v_m),\ \underbrace{a(-1,v_m)}_{0},\ \bar 0,\ \bar 0,\dots\Big\}.$$

Отже, якщо $\mathcal T^{-1}\bar v=\{u_n,\ n\in\mathbb Z\}$, то внаслідок (3) $u_n=\bar 0,\ n\ge 1$, а також для кожного $n\le 0$

$$a(n,v_m)=Ba(n-1,v_m),\quad a(n-1,v_m)\to u_n,\quad m\to\infty.$$

Тому $u_n=Bu_{n-1},\ n\le -1$, а також $v_m=Ba(-1,v_m)\to v=Bu_0,\ m\to\infty$. Отже, $v\in Q_+(B)$ і $a(n-1,v)=u_n,\ n\le 0$.

Лему 1 доведено.

Лема 2. *Якщо різницеве рівняння* (1) *задовольняє умову обмеженості, то $Q_-(A)$ є підпростором в X.*

Доведення проводиться тим же способом, що й леми 1, якщо врахувати, що при фіксованому $y \in Q_-(A)$ єдиним обмеженим розв'язком (1), відповідним до обмеженої послідовності $y_0 = y$, $y_n = \bar{0}$, $n \neq 0$, є послідовність

$$\left\{ \ldots,\ \bar{0},\ \bar{0},\ \underbrace{y}_{1},\ Ay,\ A^2y, \ldots \right\}.$$

Лема 3. *Якщо різницеве рівняння* (1) *задовольняє умову обмеженості, то $X = Q_-(A) \dot{+}$ $\dot{+} Q_+(B)$.*

Доведення. Зафіксуємо $y \in X$. Нехай $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — єдиний обмежений розв'язок рівняння (1), відповідний до послідовності $y_0 = y$, $y_n = \bar{0}$, $n \neq 0$. Оскільки $x_{n+1} = A^n x_1$, $n \geq 1$, і $\sup_{n \geq 1} \|x_n\| < \infty$, то $x_1 \in Q_-(A)$. Також $x_{k+1} = Bx_k$, $n \leq -1$ і $\sup_{n \leq 0} \|x_n\| < \infty$. Тому x_0, а отже, і Bx_0 належать множині $Q_+(B)$. Таким чином, $y = x_1 + (-Bx_0)$, де $x_1 \in Q_-(A)$, $(-Bx_0) \in Q_+(B)$.

Якщо, від супротивного, існує ненульовий елемент $u \in Q_-(A) \cap Q_+(B)$, то відповідне до (1) однорідне різницеве рівняння має ненульовий обмежений розв'язок

$$\left\{ \ldots,\ a(-2,u),\ \ a(-1,u),\ \underbrace{u}_{1},\ Au,\ A^2u, \ldots \right\}.$$

Це суперечить умові обмеженості.

Лему 3 доведено.

У подальшому в цьому пункті вважаємо, що підпростори $Q_-(A)$, $Q_+(B)$ не збігаються з X.

Лема 4. *Якщо різницеве рівняння* (1) *задовольняє умову обмеженості, то звуження B_Q оператора B на $Q_+(B)$ є неперервно оборотним оператором на $Q_+(B)$.*

Доведення. Зафіксуємо $v \in Q_+(B)$. Оскільки $v = a(0,v) = B_Q a(-1,v)$, то рівняння $B_Q u = v$ має розв'язок $u = a(-1,v)$ у просторі $Q_+(B)$. Якщо, від супротивного, цей розв'язок не єдиний, то знайдеться таке $w \in Q_+(B)$, $w \neq \bar{0}$, що $B_Q w = \bar{0}$. Але тоді відповідне до (1) однорідне різницеве рівняння має ненульовий обмежений розв'язок

$$\left\{ \ldots,\ a(-1,w),\ \underbrace{a(0,w)}_{0},\ \bar{0},\ \bar{0}, \ldots \right\}.$$

Прийшли до суперечності.

Отже, оператор B_Q^{-1} існує за теоремою Банаха про обернений оператор.

Лему 4 доведено.

Позначимо через A_Q звуження оператора A на підпростір $Q_-(A)$.

Лема 5. *Якщо різницеве рівняння* (1) *задовольняє умову обмеженості, то*

$$\sigma(B_Q) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}, \qquad \sigma(A_Q) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

Доведення. Зафіксуємо $v \in Q_-(A)$. Оскільки обмеженій послідовності

$$\bar{v} = \left\{ \ldots,\ \bar{0},\ \bar{0},\ \underbrace{v}_{o},\ \bar{0},\ \bar{0}, \ldots \right\}$$

відповідає єдиний обмежений розв'язок

$$\mathcal{T}^{-1}\bar{v} = \left\{ \ldots,\ \bar{0},\ \bar{0},\ \underbrace{v}_{1},\ A_Q v,\ A_Q^2 v, \ldots \right\}$$

рівняння (1), то для кожного $n \geq 0$

$$\|A_Q^n v\| \leq \|\mathcal{T}^{-1}\bar{v}\|_\infty \leq \|\mathcal{T}^{-1}\|\|v\|.$$

Тому, з огляду на означення норми оператора, робимо висновок, що послідовність $\{\|A_Q^n\|, n \geq 0\}$ обмежена сталою $\|\mathcal{T}^{-1}\|$.

При фіксованих $m \in \mathbb{N},\ w \in Q_-(A)$ обмеженій послідовності

$$\bar{w}_m = \left\{ \ldots,\ \bar{0},\ \bar{0},\ \underbrace{w}_{0},\ A_Q w,\ A_Q^2 w, \ldots,\ A_Q^m w,\ \bar{0},\ \bar{0}, \ldots \right\}$$

відповідає єдиний обмежений розв'язок

$$\mathcal{T}^{-1}\bar{w} = \left\{ \ldots,\ \bar{0},\ \bar{0},\ \underbrace{w}_{1},\ 2A_Q w,\ 3A_Q^2 w, \ldots \right.$$

$$\left. \ldots, (m+1)A_Q^m w,\ (m+1)A_Q^{m+1} w,\ (m+1)A_Q^{m+2} w, \ldots \right\}.$$

Тому

$$\big\|(m+1)A_Q^m w\big\| \leq \|\mathcal{T}^{-1}\bar{w}_m\|_\infty \leq \|\mathcal{T}^{-1}\| \sup_{n \geq 0} \|A_Q^n\| \|w\|,$$

а отже, послідовність $\{\|(m+1)A_Q^m\|,\ m \geq 0\}$ також обмежена. Тоді знайдеться така стала $C > 0$, що для кожного $m \geq 1$

$$(r(A_Q))^m = r(A_Q^m) \leq \|A_Q^m\| \leq \frac{C}{m+1}.$$

Звідси випливає, що $r(A_Q) < 1$, а отже, $\sigma(A_Q) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Зафіксуємо тепер $y \in Q_+(B)$ і розглянемо єдиний обмежений розв'язок $\bar{x} = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ різницевого рівняння (1), що відповідає послідовності

$$\bar{y} = \left\{ \ldots,\ \bar{0},\ \bar{0},\ \underbrace{-y}_{0},\ \bar{0},\ \bar{0}, \ldots \right\}.$$

Оскільки $x_{n+1} = Bx_n,\ n \leq -1$, то з урахуванням леми 4

$$\bar{x} = \mathcal{T}^{-1}\bar{y} = \left\{ \ldots,\ B_Q^{-2} y,\ \underbrace{B_Q^{-1} y}_{0},\ \bar{0},\ \ \bar{0}, \ldots \right\}.$$

Тому за допомогою таких же міркувань, як і для оператора A_Q, отримаємо оцінку $r(B_Q^{-1}) < 1$, з якої випливає, що $\sigma(B_Q) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$.

Лему 5 доведено.

Нехай X — пряма сума своїх підпросторів X_1, X_2, кожен з яких не збігається з X; P_1, P_2 — проєктори в X, що відповідають зображенню $X = X_1 \dot{+} X_2$.

Лема 6. *Якщо $V \in L(X)$ і підпростір X_1 інваріантний щодо оператора V, то оператор $P_2VP_2 : X_2 \to X_2$ має такі властивості*:

j$_1$) $(P_2VP_2)^n = P_2V^nP_2$ *для кожного* $n \geq 1$;

j$_2$) *якщо V_1 — звуження оператора V на підпростір X_1, то $\sigma(P_2VP_2) \supset (\sigma(V) \backslash \sigma(V_1))$.*

Оскільки твердження j$_1$) збігається з твердженням 1 леми 3 із [6], а для доведення твердження j$_2$) достатньо скористатися тими ж міркуваннями, що й при доведенні твердження 4 тієї ж леми, то доведення леми 6 ми не наводимо.

Нехай P_-, P_+ — проєктори, що відповідають зображенню $X = Q_-(A) \dot{+} Q_+(B)$.

Лема 7. *Якщо різницеве рівняння* (1) *задовольняє умову обмеженості, то для оператора $P_-BP_- : Q_-(A) \to Q_-(A)$ справджується включення $\sigma(P_-BP_-) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.*

Доведення. Зафіксуємо $k \in \mathbb{N}$, $y \in Q_-(A)$. Нехай $\bar{x} = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — єдиний обмежений розв’язок рівняння (1), що відповідає послідовності

$$\bar{y}_k = \left\{ \ldots,\ \bar{0},\ \bar{0},\ \underbrace{y}_{-k},\ \bar{0},\ \bar{0}, \ldots \right\}.$$

Тоді

$$x_1 = B^{k+1}x_{-k} + B^k y = B^{k+1}x_{-k} + P_+B^k y + P_-B^k y$$

і x_{-k}, а отже, і $B^{k+1}x_{-k}$ належать $Q_+(B)$. Тому координати $\bar{x}$ зображуються у вигляді

$$\begin{gathered} x_n = A^{n-1}P_-B^k y, \quad n \geq 1, \\ x_n = -B_Q^{n-1}P_+B^k y + B^{n+k-1}y, \quad -k+1 \leq n \leq 0, \\ x_n = -B_Q^{n-1}P_+B^k y, \quad n \leq -k. \end{gathered} \tag{4}$$

Зокрема, внаслідок рівності $y = P_-y$ і твердження j$_1$) леми 6 $x_1 = P_-B^kP_-y = (P_-BP_-)^k y$. Тому, з огляду на неперервну оборотність оператора $\mathcal{T}$, робимо висновок, що

$$\left\|(P_-BP_-)^k y\right\| \leq \|\mathcal{T}^{-1}\bar{y}_m\|_\infty \leq \|\mathcal{T}^{-1}\|\|y\|.$$

Таким чином, послідовність $\{\|(P_-BP_-)^k\|,\ k \geq 1\}$ є обмеженою.

Із (4) і лінійності рівняння (1) випливає, що при фіксованих $m \in \mathbb{N}$, $w \in Q_-(A)$ обмеженій послідовності

$$\bar{w}_m = \left\{ \ldots,\ \bar{0},\ \bar{0},\ \underbrace{w}_{-m},\ P_-BP_-w,\ (P_-BP_-)^2 w, \ldots,\ (P_-BP_-)^{m-1}w,\ \bar{0},\ \bar{0}, \ldots \right\}$$

відповідає єдиний обмежений розв’язок $\mathcal{T}^{-1}\bar{w}_m$ рівняння (1), координата $(\mathcal{T}^{-1}\bar{w}_m)_1$ якого зображується у вигляді

$$(\mathcal{T}^{-1}\bar{w}_m)_1 = P_-B^mP_-w + P_-B^{m-1}P_-(P_-BP_-w) + \ldots$$

$$\ldots + P_-BP_-((P_-BP_-)^{m-1}w) = m(P_-BP_-)^m w.$$

Звідси, як і для оператора A_Q при доведенні леми 5, отримуємо, що $\sigma(P_-BP_-) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Лему 7 доведено.

Лема 8. *Якщо різницеве рівняння* (1) *задовольняє умову обмеженості, то оператор* $P_+AP_+ : Q_+(B) \to Q_+(B)$ *неперервно оборотний, а також* $\sigma(P_+AP_+) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$.

Доведення. Зафіксуємо $y \in Q_+(B)$. Нехай $\bar{x} = \{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — єдиний обмежений розв'язок рівняння (1), що відповідає послідовності $y_1 = -y$; $y_n = \bar{0}$, $n \neq 1$. Тоді $x_1 \in Q_+(B)$, $x_2 \in Q_-(A)$, а також

$$x_2 = Ax_1 - y = P_-Ax_1 + P_+AP_+x_1 - y.$$

Отже, $P_+AP_+x_1 - P_+y = \bar{0}$, тобто рівняння $P_+AP_+x = y$ має розв'язок $x = x_1$.

Якщо, від супротивного, цей розв'язок не єдиний, то існує таке $u \in Q_+(B)$, $u \neq \bar{0}$, що $P_+AP_+u = \bar{0}$. Але тоді відповідне до (1) однорідне різницеве рівняння має крім нульового обмежений розв'язок

$$\left\{\ldots,\ B_Q^{-2}u,\ B_Q^{-1}u,\ \underbrace{u}_{1},\ P_-Au,\ AP_-Au,\ A^2P_-Au, \ldots\right\},$$

що суперечить умові обмеженості.

Таким чином, оператор P_+AP_+ неперервно оборотний за теоремою Банаха про обернений оператор.

Зафіксуємо тепер $m \in \mathbb{N}$, $y \in Q_+(B)$ і розглянемо єдиний обмежений розв'язок рівняння (1), що відповідає послідовності $y_m = -y$, $y_n = \bar{0}$, $n \neq m$. Зазначимо, що $x_1 \in Q_+(B)$, $x_{m+1} \in Q_-(A)$, $x_m = A^{m-1}x_1$, а також

$$x_{m+1} = Ax_m - y = P_-A^m x_1 + P_+A^m P_+x_1 - P_+y.$$

Тому $P_+A^mP_+x_1 - P_+y = \bar{0}$, а отже, з урахуванням твердження $\mathrm{j}_1)$ леми 6 і неперервної оборотності оператора P_+AP_+, $x_1 = (P_+AP_+)^{-m}y$. Звідси, як і для оператора A_Q при доведенні леми 5, отримуємо, що $r((P_+AP_+)^{-1}) < 1$, тобто $\sigma(P_+AP_+) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$.

Лему 8 доведено.

3. Доведення теореми 4. 1. Розглянемо випадок, коли підпростори $Q_-(A)$, $Q_+(B)$ не збігаються з X. Внаслідок твердження $\mathrm{j}_2)$ леми 6 і лем 5, 8 справджуються включення

$$\sigma(A_Q) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\},$$

$$(\sigma(A) \backslash \sigma(A_Q)) \subset \sigma(P_+AP_+) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\},$$

а отже, $\sigma(A) \cap S = \varnothing$.

Аналогічно, використовуючи лему 7 замість леми 8, одержуємо, що $\sigma(B) \cap S = \varnothing$, а отже, виконується умова $\mathrm{i}_1)$ теореми 4.

Доведемо, що $Q_+(B) = X_+(B)$. Оскільки $\sigma(B_+) = \sigma_+(B)$, то оператор B_+ неперервно оборотний і $r(B_+^{-1}) < 1$. Тому послідовність $\{\|B_+^{-n}\|,\ n \geq 1\}$ обмежена, а отже, кожному $u \in X_+(B)$ відповідає послідовність

$$a(0, u) = u, \quad a(k, u) = B_+^k u, \quad k \leq -1,$$

з означення $Q_+(B)$. Таким чином, $X_+(B) \subset Q_+(B)$.

Якщо, від супротивного, існує $u \in X_-(B) \cap Q_+(B)$, $u \neq \bar{0}$, то різницеве рівняння $x_{n+1} = Bx_n + y_n$, $n \in \mathbb{Z}$, має два різних обмежених розв'язки, відповідні до послідовності $y_0 = u$, $y_n = \bar{0}$, $n \neq 0$, а саме,

$$\left\{ \ldots,\ -B_Q^{-3}u,\ -B_Q^{-2}u,\ \underbrace{-B_Q^{-1}u}_{0},\ \bar{0},\ \bar{0}, \ldots \right\}$$

і

$$\left\{ \ldots,\ \bar{0},\ \bar{0},\ \underbrace{u}_{1},\ B_-u,\ B_-^2u, \ldots \right\}.$$

Оскільки $\sigma(B) \cap S = \varnothing$, то це суперечить твердженню теореми 1 із [10, с. 9].

Таким чином, $Q_+(B) = X_+(B)$.

Оскільки $\sigma(A_-) = \sigma_-(A)$, а отже, $r(A_-) < 1$, то аналогічно перевіряється, що $Q_-(A) = X_-(A)$. Тому з урахуванням леми 3 $X = X_-(A) \dot{+} X_+(B)$, тобто виконується умова i_2) теореми 4.

2. Нехай $Q_-(A) = X$. Тоді, як і для оператора A_Q з леми 5, маємо $r(A) < 1$, а отже, $X_-(A) = X$, $\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Доведемо, що також $r(B) < 1$. Згідно з умовою обмеженості при фіксованих $k \in \mathbb{N}$, $y \in X$ різницеве рівняння (1) має єдиний обмежений розв'язок, що відповідає послідовності $y_{-k} = y$, $y_n = \bar{0}$, $n \neq -k$. Безпосередньо перевіряється, що цей розв'язок зображується у вигляді

$$\left\{ \ldots,\ \bar{0},\ \bar{0},\ \underbrace{y}_{-k+1},\ By,\ \ldots,\ \underbrace{B^ky}_{1},\ AB^ky,\ A^2B^ky, \ldots \right\}.$$

Оскільки $x_1 = B^ky$, то, як і для оператора P_-BP_- при доведенні леми 7, перевіряється, що $r(B) < 1$. Внаслідок цієї нерівності $\sigma(B) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, а також $X_+(B) = \{\bar{0}\}$. Отже, виконуються умови i_1), i_2) теореми 4.

3. Якщо $Q_+(B) = X$, то за допомогою міркувань, подібних до використаних при доведенні леми 4, встановлюється, що оператори B і A неперервно оборотні, $r(B^{-1}) < 1$, $r(A^{-1}) < 1$, а також $X_-(A) = \{\bar{0}\}$. Таким чином, умови i_1), i_2) теореми 4 виконуються і в цьому випадку.

Теорему 4 доведено.

Зазначимо, що внаслідок теореми 4 умови теореми 2 з [14] і теореми 1 з [15] є не лише достатніми, а й необхідними.

Література

1. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, Москва (1970).
2. І. В. Гончар, *Про обмежені і сумовні розв'язки різницевого рівняння зі стрибком операторного коефіцієнта*, Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки, № 2, 25 – 28 (2016).
3. М. Ф. Городній, І. В. Гончар, *Про обмежені розв'язки різницевого рівняння зі змінним операторним коефіцієнтом*, Доп. НАН України, № 12, 12 – 16 (2016).
4. А. Г. Баскаков, А. И. Пастухов, *Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами*, Сиб. мат. журн., **42**, № 6, 1231 – 1243 (2001).
5. В. Ю. Слюсарчук, *Експоненціально дихотомічні різницеві рівняння з кусково-сталими операторними коефіцієнтами*, Укр. мат. журн., **72**, № 6, 822 – 841 (2020).

6. М. Ф. Городній, О. А. Печериця, *Обмежені розв'язки диференціального рівняння з кусково-сталими операторними коефіцієнтами*, Нелінійні коливання, **24**, № 2, 147 – 157 (2021).
7. А. В. Чайковський, О. А. Лагода, *Обмежені розв'язки різницевих рівнянь у банаховому просторі із вхідними даними, що лежать у підпросторах*, Укр. мат. журн., **73**, № 11, 1564 – 1575 (2021).
8. В. Ю. Слюсарчук, *Об экспоненциальной дихотомии решений дискретных систем*, Укр. мат. журн., **35**, № 1, 109 – 115 (1983).
9. Д. Хенри, *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений*, Мир, Москва (1985).
10. А. Я. Дороговцев, *Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем*, Вища шк., Киев (1992).
11. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems*, VSP, Utrecht, Boston (2004).
12. А. Г. Баскаков, *Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений*, Успехи мат. наук, **68**, вып. 1(409), 77 – 128 (2013).
13. М. Ф. Городній, *Ограниченные и периодические решения одного разностного уравнения и его стохастического аналога в банаховом пространстве*, Укр. мат. журн., **43**, № 1, 41 – 46 (1991).
14. М. Ф. Городній, І. В. Гончар, *Обмежені у середньому порядку p розв'язки різницевого рівняння зі стрибком операторного коефіцієнта*, Теорія ймовірностей та мат. статистика, вип. 2(101), 93 – 97 (2019).
15. M. Horodnii, V. Kravets, *Bounded in the mean solutions of a second-order difference equation*, Modern Stochastics: Theory and Appl., **8**, № 4, 465 – 474 (2021).

Одержано 04.01.22