DOI: 10.37863/umzh.v74i7.7088

УДК 517.5

О. П. Довгопятий (Житомир. держ. ун-т ім. І. Франка),
Є. О. Севостьянов (Житомир. держ. ун-т ім. І. Франка; Ін-т прикл. математики і механіки НАН України, Слов'янськ Донецької області)

ПРО ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ КВАЗІЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ БЕЛЬТРАМІ З ДВОМА ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

We study Beltrami-type equations with two given complex characteristics. Under certain conditions imposed on the complex coefficients, we prove theorems on the existence of homeomorphic ACL-solutions of this equation. In addition, under some relatively weak conditions, we establish theorems on the existence of the corresponding continuous ACL-solutions of this equation that are logarithmic Hölder continuous in a given domain.

Вивчаються рівняння типу Бельтрамі з двома заданими комплексними характеристиками. За певних умов на комплексні коефіцієнти отримано теореми про існування гомеоморфних ACL-розв'язків цього рівняння. Крім того, за деяких відносно слабких умов доведено теореми про існування відповідних неперервних ACL-розв'язків, які є логарифмічно гельдеровими в заданій області.

1. Вступ. Дану статтю присвячено вивченню теорії відображень та її застосуванню до теорем існування розв'язків рівнянь Бельтрамі (див. [1 – 10]). Зокрема, йдеться про квазілінійні рівняння Бельтрамі з двома комплексними характеристиками. Відносно нещодавно було отримано результати, що сприяли значному просуненню в цьому напрямку (див., наприклад, [3 – 5], [7], розділ 9, а також [2 – 6]). Зазначимо, що вказані результати переважно стосуються випадку, коли максимальна дилатація рівняння має скінченне середнє коливання в кожній точці або задовольняє певну умову розбіжності інтеграла. В даній статті ми розглянемо аналогічні квазілінійні рівняння, тобто коли відповідні коефіцієнти можуть залежати від його розв'язку. Вказаний випадок достатньо повно розглянуто в роботі [11], але лише для одного комплексного коефіцієнта. Окремо будуть розглянуті умови, які забезпечують наявність не гомеоморфних, а просто неперервних розв'язків. Слід зауважити, що ці розв'язки мають вищий степінь гладкості у порівнянні з розв'язками, про які йшлося вище, і є логарифмічно неперервними за Гельдером (див. статті [12, 13] для рівнянь з одним коефіцієнтом).

Перейдемо до означень. Скрізь далі відображення $f: D \to \mathbb{C}$ області $D \subset \mathbb{C}$ вважається таким, що *зберігає орієнтацію*, тобто якщо f — відкрите дискретне відображення і $z \in D$ — будь-яка його точка диференційовності, то *якобіан* цього відображення в точці z невід'ємний (див., наприклад, лему 2.14 [14]). Для комплекснозначної функції $f: D \to \mathbb{C}$, заданої в області $D \subset \mathbb{C}$, що має частинні похідні по x і y при майже всіх $z = x+iy$, покладемо $f_{\overline{z}} = (f_x+if_y)/2$ і $f_z = (f_x - if_y)/2$. Будемо говорити, що функція $\nu = \nu(z, w): D \times \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ задовольняє *умову Каратеодорі,* якщо ν вимірна по $z \in D$ при кожному фіксованому $w \in \mathbb{C}$ і неперервна по $w \in \mathbb{C}$ при майже всіх $z \in D$. Нехай функції $\mu = \mu(z, w)$ і $\nu = \nu(z, w)$ задовольняють умову Каратеодорі і, крім того, $|\mu(z, w)|+|\nu(z, w)| < 1$ при всіх $w \in \mathbb{C}$ і майже всіх $z \in D$. Покладемо

$$K_{\mu,\nu}(z, w) = \frac{1 + |\mu(z, w)| + |\nu(z, w)|}{1 - |\mu(z, w)| - |\nu(z, w)|}. \qquad (1)$$

Зауважимо, що якобіан відображення f в точці $z \in D$ можна підрахувати за допомогою рівності

$$J(z,f)=|f_z|^2-|f_{\overline{z}}|^2.$$

Нехай $\mu=\mu(z,w)\colon D\times\mathbb{C}\to\mathbb{D}$ і $\nu=\nu(z,w)\colon D\times\mathbb{C}\to\mathbb{D}$ — такі функції, що при кожному фіксованому $w\in\mathbb{C}$ виконано умову $|\mu(z,w)|+|\nu(z,w)|<1$ при майже всіх $z\in D$. Розглянемо *квазілінійне рівняння Бельтрамі з двома характеристиками*:

$$f_{\overline{z}}=\mu(z,f(z))\cdot f_z+\nu(z,f(z))\cdot\overline{f_z}. \tag{2}$$

Функція $K_{\mu,\nu}(z,w)$ в (1) називається *дилатацією рівняння* (2). Відображення $f:D\to\mathbb{C}$ будемо називати *регулярним розв'язком рівняння* (2), якщо $f\in W^{1,1}_{\rm loc}$ і $J(z,f)\neq 0$ майже скрізь у D. Нехай D — область в $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$. Будемо говорити, що функція $\varphi\colon D\to\mathbb{R}$, що є локально інтегровною в деякому околі точки $x_0\in D$, має *скінченне середнє коливання* в точці x_0 (пишемо $\varphi\in FMO(x_0)$), якщо

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\Omega_n\varepsilon^n}\int\limits_{B(x_0,\,\varepsilon)}|\varphi(x)-\overline{\varphi}_\varepsilon|\,dm(x)<\infty,$$

де Ω_n — об'єм одиничної кулі в $\mathbb{R}^n$, $\overline{\varphi}_\varepsilon=\dfrac{1}{\Omega_n\varepsilon^n}\displaystyle\int_{B(x_0,\varepsilon)}\varphi(x)dm(x)$ (див., наприклад, [15], розділ 2). Позначимо через $q_{z_0}(r)$ середнє значення функції Q над колом

$$S(z_0,r)=\big\{|z-z_0|=r\big\},$$

$$q_{z_0}(r)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}Q(z_0+re^{\,i\theta})\,d\theta. \tag{3}$$

Правильним є таке твердження (див. також відповідний результат, встановлений для виродженого квазілінійного рівняння Бельтрамі з однією характеристикою у [11] (теореми 1, 2)).

Теорема 1. *Нехай функції $\mu(z,w)\colon\mathbb{D}\times\mathbb{C}\to\mathbb{D}$ і $\nu(z,w)\colon\mathbb{D}\times\mathbb{C}\to\mathbb{D}$ задовольняють умову Каратеодорі і, крім того, $\big|\mu(z,w)\big|+\big|\nu(z,w)\big|<1$ при всіх $w\in\mathbb{C}$ і майже всіх $z\in\mathbb{D}$. Припустимо, що існує функція $Q\colon\mathbb{D}\to[1,\infty]$ така, що $K_{\mu,\nu}(z,w)\leq Q(z)\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{D})$ для майже всіх $z\in\mathbb{D}$ і всіх $w\in\mathbb{C}$, де $K_{\mu,\nu}$ визначено в* (1). *Припустимо, що $Q\in FMO(\mathbb{D})$ або для кожного $z_0\in\mathbb{D}$ виконано умову*

$$\int\limits_0^{\delta(z_0)}\frac{dr}{rq_{z_0}(r)}=\infty, \tag{4}$$

де $\delta(z_0)$ — деяке додатне число, $\delta(z_0)<{\rm dist}(z_0,\partial\mathbb{D})$, а $q_{z_0}(r)$ визначено в (3). *Тоді рівняння* (2) *має регулярний гомеоморфний розв'язок f класу $W_{\rm loc}^{1,1}$ в $\mathbb{D}$ такий, що $f^{-1}\in W_{\rm loc}^{1,2}(f(\mathbb{D}))$.*

Іншого роду результати стосуються випадку, коли рівняння (2) має лише неперервний, але логарифмічно гельдеровий розв'язок (див. роботи [12, 13] щодо аналогічних лінійних рівнянь з одним коефіцієнтом μ). Нехай $J(z,f)\neq 0$ і відображення f має частинні похідні f_z і $f_{\overline{z}}$ у точці z. Тоді *максимальною дилатацією відображення f* у точці z будемо називати функцію

$$K_{\mu_f}(z)=\frac{|f_z|+|f_{\overline{z}}|}{|f_z|-|f_{\overline{z}}|}. \tag{5}$$

Покладемо $K_{\mu_f}(z) = 1$ в точках z, де $|f_z|+|f_{\overline{z}}| = 0$, і $K_{\mu_f}(z) = \infty$ в точках z, де $|f_z|+|f_{\overline{z}}| \neq 0$, але $J(z, f) = 0$. Визначимо також *внутрішню дилатацію порядку* $p \geq 1$ відображення f за допомогою співвідношення

$$K_{I,p}(z, f) = \frac{|f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2}{\big(|f_z| - |f_{\overline{z}}|\big)^p},$$

де $J(z, f) \neq 0$. Як і у (5), покладемо $K_{I,p}(z) = 1$, якщо $|f_z| + |f_{\overline{z}}| = 0$, і $K_{I,p}(z) = \infty$ у точках, де $J(z, f) = 0$, проте $|f_z| + |f_{\overline{z}}| \neq 0$. Зауважимо, що $K_{I,2}(z) = K_\mu(z)$. Покладемо $\big\|f'(z)\big\| = |f_z| + |f_{\overline{z}}|$. Нагадаємо, що гомеоморфізм $f : D \to \mathbb{C}$ називається *квазіконформним*, якщо $f \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$ і, крім того, існує така стала $K \geq 1$, що $\|f'(z)\|^2 \leq K|J(z, f)|$ майже скрізь.

Нехай $\mu = \mu(z, w) \colon \mathbb{D} \times \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ і $\nu = \nu(z, w) \colon \mathbb{D} \times \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ — функції, для яких існує вимірна за Лебегом функція $q \colon \mathbb{D} \to [0, 1)$ така, що при кожному фіксованому $w \in \mathbb{C}$ і майже всіх $z \in \mathbb{D}$ виконано умову $|\mu(z, w)| + |\nu(z, w)| \leq q(z) < 1$. Зафіксуємо $n \geq 1$ і покладемо

$$\mu_n(z, w) = \begin{cases} \mu(z, w), & Q_0(z) \leq n, \\ 0, & Q_0(z) > n, \end{cases}$$

$$\nu_n(z, w) = \begin{cases} \nu(z, w), & Q_0(z) \leq n, \\ 0, & Q_0(z) > n, \end{cases}$$

де Q_0 визначено рівністю

$$Q_0(z) = \frac{1 + q(z)}{1 - q(z)}. \tag{6}$$

Нехай f_n — гомеоморфний ACL-розв'язок рівняння (2), в якому покладемо $\mu \mapsto \mu_n(z, w)$, $\nu \mapsto \nu_n(z, w)$, такий, що $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$ (вказаний розв'язок визначено коректно з огляду на теорему 8.2 [16]). Зауважимо, що відображення $g_n = f_n^{-1}$ є квазіконформним; зокрема, воно є диференційовним майже скрізь. Нехай $K_{\mu_{g_n}}(w)$ — дилатація оберненого відображення g_n, тобто

$$K_{\mu_{g_n}}(w) = \frac{|(g_n)_w|^2 - |(g_n)_{\overline{w}}|^2}{\big(|(g_n)_w| - |(g_n)_{\overline{w}}|\big)^2}. \tag{7}$$

Визначимо також *внутрішню дилатацію порядку p відображення g_n в точці w* за допомогою рівності

$$K_{I,p}(w, g_n) = \frac{|(g_n)_w|^2 - |(g_n)_{\overline{w}}|^2}{\big(|(g_n)_w| - |(g_n)_{\overline{w}}|\big)^p}. \tag{8}$$

Справджується таке твердження.

Теорема 2. *Нехай μ, ν, μ_n, ν_n, f_n і g_n такі, як вказано вище. Нехай $Q \colon \mathbb{D} \to [1, \infty]$ — вимірна за Лебегом функція. Припустимо, що виконуються такі умови*:

1) *для кожних* $0 < r_1 < r_2 < 1$ *і* $y_0 \in \mathbb{D}$ *існує множина* $E \subset [r_1, r_2]$ *додатної лебегової міри така, що функція* Q *є інтегровною по колах* $S(y_0, r)$ *для кожного* $r \in E$;

2) *знайдуться такі число* $1 < p \leq 2$ *і стала* $M > 0$, *що*

$$\int\limits_{\mathbb{D}} K_{I,p}(w, g_n)\, dm(w) \leq M \tag{9}$$

для всіх $n = 1, 2, \ldots$, *де* $K_{I,p}(w, g_n)$ *визначено у* (8);

3) *нерівність*

$$K_{\mu_{g_n}}(w) \leq Q(w) \tag{10}$$

виконується для майже всіх $w \in \mathbb{D}$, *де* $K_{\mu_{g_n}}$ *визначено в* (7). *Тоді рівняння* (2) *має неперервний* $W_{\mathrm{loc}}^{1,p}(\mathbb{D})$*-розв'язок* f *в* $\mathbb{D}$.

***Наслідок* 1.** *Теорема* 2 *залишається справедливою, якщо в ній відмовитись від умови* 1, *вимагати умову* 3, *а умову* 2 *замінити такою*: $Q \in L^1(\mathbb{D})$. *В цьому випадку розв'язок* f *рівняння* (2) *можна вибрати так, щоб рівність*

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{C \cdot (\|Q\|_1)^{1/2}}{\log^{1/2}\left(1 + \dfrac{r_0}{2|x-y|}\right)} \tag{11}$$

виконувалась для довільного компакта $K \subset \mathbb{D}$ *і будь-яких* $x, y \in K$, *де* $\|Q\|_1$ *позначає* L^1*-норму функції* Q *в* $\mathbb{D}$, $C > 0$ — *деяка стала і* $r_0 = d(K, \partial\mathbb{D})$. *Якщо, додатково*, $Q(z) \in FMO(\mathbb{D})$ *або виконано умову* (4), *то відображення* f *можна вибрати гомеоморфізмом.*

2. Існування гомеоморфного розв'язку квазілінійного рівняння в одиничному крузі. Для зручності покладемо $\partial f = f_z$, $\overline{\partial} f = f_{\overline{z}}$. Наступне твердження доведено в [7] (лема 9.1).

Твердження 1. *Нехай* $D \subset \mathbb{C}$ *і* $f_n \colon D \to \mathbb{C}$ — *послідовність гомеоморфних розв'язків рівняння* $\overline{\partial} f_n = \mu_n(z)\partial f_n + \nu_n(z)\overline{\partial f_n}$ *класу* $W_{\mathrm{loc}}^{1,1}$ *таких, що*

$$\frac{1 + |\mu_n(z)| + |\nu_n(z)|}{1 - |\mu_n(z)| - |\nu_n(z)|} \leq Q(z) \in L_{\mathrm{loc}}^1(D)$$

при всіх $n = 1, 2, \ldots$. *Якщо* $f_n \to f$ *локально рівномірно в* D *при* $n \to \infty$ *і* $f \colon D \to \mathbb{C}$ — *гомеоморфізм у* D, *то* $f \in W_{\mathrm{loc}}^{1,1}$ *і, крім того*, ∂f_n *і* $\overline{\partial} f_n$ *збігаються слабко в* L_{loc}^1 *до* ∂f *і* $\overline{\partial} f$ *відповідно. Якщо* $\mu_n \to \mu$ *при* $n \to \infty$ *і* $\nu_n \to \nu$ *при* $n \to \infty$ *майже скрізь, то* $\overline{\partial} f = \mu(z)\partial f + \nu(z)\overline{\partial f}$ *майже скрізь.*

Основним твердженням даного пункту є наступна лема, аналоги якої неодноразово були доведені в інших випадках (див., наприклад, лему 9.1 [7] і лему 1 [11]).

Лема 1. *Нехай функції* $\mu(z, w) \colon \mathbb{D} \times \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ *і* $\nu(z, w) \colon \mathbb{D} \times \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ *задовольняють умову Каратеодорі і, крім того*, $|\mu(z, w)| + |\nu(z, w)| < 1$ *при всіх* $w \in \mathbb{C}$ *і майже всіх* $z \in \mathbb{D}$. *Нехай, крім того, існує функція* $Q \colon \mathbb{D} \to [1, \infty]$ *така, що* $K_{\mu,\nu}(z, w) \leq Q(z) \in L_{\mathrm{loc}}^1(\mathbb{D})$ *для майже всіх* $z \in \mathbb{D}$ *і всіх* $w \in \mathbb{C}$, *де* $K_{\mu,\nu}$ *визначено в* (1). *Припустимо, що для будь-якого* $z_0 \in \mathbb{D}$ *існують* $0 < \varepsilon_0' \leq \varepsilon_0 < \mathrm{dist}\,(z_0, \partial\mathbb{D})$, $c > 0$, $0 < p \leq 2$ *і вимірна за Лебегом функція* $\psi \colon (0, \infty) \to (0, \infty)$ *такі, що*

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt < \infty$$

при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0^{\prime})$, $I(\varepsilon) \to \infty$ *при* $\varepsilon \to 0$, *і при цьому*

$$\int\limits_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} Q(z)\psi^2\big(|z-z_0|\big)dm(z) \le cI^p(\varepsilon, \varepsilon_0).$$

Тоді рівняння (2) *має регулярний гомеоморфний розв'язок* f *класу* $W_{\mathrm{loc}}^{1,1}$ *в* $\mathbb{D}$ *такий, що* $f^{-1} \in \in W_{\mathrm{loc}}^{1,2}(f(\mathbb{D}))$.

Доведення. Переважно будемо користуватися схемою доведення леми 1 в [11] з урахуванням відмінностей між різними типами рівнянь Бельтрамі, зазначених при доведенні леми 9.1 у [7]. Розглянемо послідовності функцій

$$\mu_n(z,w) = \begin{cases} \mu(z,w), & Q(z) \le n, \\ 0, & Q(z) > n, \end{cases}$$

і

$$\nu_n(z,w) = \begin{cases} \nu(z,w), & Q(z) \le n, \\ 0, & Q(z) > n. \end{cases}$$

Зауважимо, що $K_{\mu_n,\nu_n}(z,w) \le n$ при майже всіх $z \in \mathbb{D}$ і всіх $w \in \mathbb{C}$. Отже,

$$|\mu_n(z,w)| + |\nu_n(z,w)| \le \frac{n-1}{n+1} < 1$$

при майже всіх $z \in \mathbb{D}$ і майже всіх $w \in \mathbb{C}$. Отже, за теоремою 8.2 в [16] існує n-квазіконформний розв'язок f_n рівняння

$$\overline{\partial} f_n = \partial f_n \mu_n(z, f_n) + \overline{\partial f_n} \nu_n(z, f_n)$$

такий, що $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$. На підставі означень відображень μ_n і ν_n отримуємо, що $K_{\mu_{f_n}}(z) \le Q(z)$ майже скрізь, де $K_{\mu_{f_n}}(z)$ визначено в (5). У такому випадку за результатами [17] (гл. V, співвідношення (6.6)) кожне f_n задовольняє оцінку

$$M\Big(f_n\big(\Gamma(S(z_0,r_1), S(z_0,r_2), A)\big)\Big) \le \int\limits_{A(z_0,r_1,r_2)} Q(z)\eta^2\big(|z-z_0|\big)dm(z)$$

у будь-якому кільці $A = A(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \colon r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ при довільному $z_0 \in \mathbb{D}$ і довільних $0 < r_1 < r_2 < \mathrm{dist}(z_0, \partial\mathbb{D})$ для кожної вимірної за Лебегом функції $\eta \colon (r_1, r_2) \to \to [0, \infty]$ такої, що

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)dr \ge 1.$$

Тоді за пропозицією 2 і зауваженням 2 в [11] послідовність f_n є одностайно неперервною щодо хордальної (сферичної) метрики h в $\mathbb{R}^n$ (див. означення 12.1 у [18]). За критерієм Арцела–Асколі (див., наприклад, теорему 20.4 [18]) існує підпослідовність f_{n_k} послідовності f_n, $k = = 1, 2, \ldots$, яка збігається при $k \to \infty$ до деякого відображення f локально рівномірно в $\mathbb{D}$. Отже, за лемою 4.2 в [19] відображення f є або гомеоморфізмом у $\mathbb{D}$, або сталою в $\overline{\mathbb{R}^n}$.

Другий випадок виключено, враховуючи умови нормування $f_n(0) = 0,\ f_n(1) = 1$. Зауважимо, що для майже всіх $z \in \mathbb{D}$ знайдеться номер $k_0 = k_0(z)$ такий, що $\mu_{n_k}(z,w) = \mu(z,w)$, $\nu_{n_k}(z,w) = \nu(z,w)$ при $n_k \ge n_{k_0}(z)$ і всіх $w \in \mathbb{C}$. Отже, для майже всіх z

$$\mu_{n_k}(z) = \mu_{n_k}(z, f_{n_k}(z)) \to \mu(z, f(z)),$$

$$\nu_{n_k}(z) = \nu_{n_k}(z, f_{n_k}(z)) \to \nu(z, f(z))$$

при $k \to \infty$, оскільки функції μ і ν неперервні по другому аргументу за умовою. За твердженням 1 $\overline{\partial} f = \mu(z,f)\partial f + \nu(z,f)\partial f$, тобто f — гомеоморфний розв'язок рівняння (2), до того ж $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$.

Зауважимо, що за теоремою збіжності розв'язків рівняння Бельтрамі $f^{-1} \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ (див. [7], наслідок 2.4). Тоді за теоремою Малого–Мартіо f^{-1} має N-властивість Лузіна (див., наприклад, [20], наслідок B). Нарешті, за теоремою Пономарьова $J(z,f) \ne 0$ майже скрізь (див. [21], теорема 1).

Лему доведено.

Доведення теореми **1** випливає з леми 1 і леми 5.1 в [22].

3. Існування неперервного розв'язку. Аналог наступної леми доведено в [7] (теорема 9.1) (див. також лему 5.1 [13]).

Лема 2. *Нехай $1 < p \le 2$, $\mu \colon D \to \mathbb{D}$ — вимірна за Лебегом функція і f_k, $k = 1,2,\ldots,$ — послідовність гомеоморфізмів, що зберігають орієнтацію, області D на себе, які належать класу $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$ і задовольняють рівняння*

$$\overline{\partial} f_n = \partial f_n \mu_n(z) + \overline{\partial f_n}\nu_n(z),$$

де μ_n, ν_n — вимірні за Лебегом функції, які задовольняють нерівність $|\nu_n(z)| + |\mu_n(z)| < 1$ майже скрізь. Припустимо, що f_n збігається локально рівномірно в D до відображення $f\colon D \to \mathbb{C}$, а послідовності $\mu_n(z)$ і $\nu_n(z)$ збігаються до $\mu(z)$ і $\nu(z)$ відповідно при $n \to \infty$ майже скрізь. Нехай також обернені відображення $g_n\colon = f_n^{-1}$ належать класу $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(D)$, при цьому при майже всіх $w \in D$

$$\int\limits_D K_{I,p}(w, g_k)\, dm(w) \le M$$

для деякого $M > 0$ і кожного $n = 1,2,\ldots$.

Тоді $f \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(D)$ і μ, ν — комплексні характеристики відображення f, тобто $\overline{\partial} f = \partial f \mu(z) + \overline{\partial f}\nu(z)$ при майже всіх $z \in D$.

Доведення. Будемо в цілому дотримуватись схеми, викладеної при доведенні теореми 9.1 [7] (див. також лему 5.1 [13]). Позначимо $\partial f = f_z$ і $\overline{\partial} f = f_{\overline{z}}$. Нехай C — довільний компакт в D. Оскільки, за умовою, відображення $g_n = f_n^{-1}$ належать класу $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$, то g_n мають N-властивість Лузіна (див., наприклад, [20], наслідок B). Тоді якобіан $J(z, f_n)$ майже скрізь не дорівнює нулю (див., наприклад, [21], теорема 1), і навіть більше, має місце заміна змінних в інтегралі (див., наприклад, [23], теорема 3.2.5). У такому випадку маємо

$$\int\limits_C \|f_n'(z)\|^p\, dm(z) = \int\limits_C \frac{\|f_n'(z)\|^p}{J(z,f_n)} J(z,f_n)\, dm(z) =$$

$$= \int\limits_{f_n(C)} K_{I,p}(w, g_n)\, dm(w) \le M < \infty. \qquad (12)$$

З (12) випливає, що $f \in W^{1,p}_{\rm loc}$ і, крім того, ∂f_n і $\overline{\partial} f_n$ слабко збігаються в $L^1_{\rm loc}(D)$ до ∂f і $\overline{\partial} f$ відповідно (див. [24], лема III.3.5, а також [25], лема 2.1).

Залишилось показати, що відображення f є розв'язком рівняння Бельтрамі $f_{\overline{z}} = \mu(z)\cdot f_z$. Покладемо $\zeta(z) = \overline{\partial} f(z) - \mu(z)\partial f(z) - \nu\overline{\partial f(z)}$ і покажемо, що $\zeta(z) = 0$ майже скрізь. Нехай B — довільний круг, що лежить разом зі своїм замиканням в D. За нерівністю трикутника

$$\left|\int\limits_B \zeta(z)\,dm(z)\right| \le I_1(n) + I_2(n) + I_3(n),$$

де

$$I_1(n) = \left|\int\limits_B (\overline{\partial} f(z) - \overline{\partial} f_n(z))dm(z)\right|, \tag{13}$$

$$I_2(n) = \left|\int\limits_B (\mu(z)\partial f(z) - \mu_n(z)\partial f_n(z))dm(z)\right| \tag{14}$$

і

$$I_3(n) = \left|\int\limits_B (\nu(z)\overline{\partial f(z)} - \nu_n(z)\overline{\partial f_n(z)})\,dm(z)\right|. \tag{15}$$

На підставі доведеного вище $I_1(n) \to 0$ при $n\to\infty$. Залишилось оцінити вирази для $I_2(n)$ і $I_3(n)$. Для цього зауважимо, що за нерівністю трикутника $I_2(n) \le I_2'(n) + I_2''(n)$, де

$$I_2'(n) = \left|\int\limits_B \mu(z)(\partial f(z) - \partial f_n(z))\,dm(z)\right|$$

і

$$I_2''(n) = \left|\int\limits_B (\mu(z) - \mu_n(z))\partial f_n(z)\,dm(z)\right|.$$

З огляду на слабку збіжність $\partial f_n \to \partial f$ в $L^1_{\rm loc}(D)$ при $n\to\infty$ отримаємо, що $I_2'(n)\to 0$ при $n\to\infty$, оскільки $\mu\in L^\infty(D)$. І навіть більше, оскільки за доведеним вище відображення ∂f інтегровне в степені $p>1$, має місце абсолютна неперервність в інтегралі $\int_E |\partial f(z)|\,dm(z)$. Крім того, оскільки $\partial f_n \to \partial f$ слабко в $L^1_{\rm loc}(D)$, то для заданого $\varepsilon>0$ знайдеться таке $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, що

$$\int\limits_E |\partial f_n(z)|dm(z) \le$$
$$\le \int\limits_E |\partial f_n(z) - \partial f(z)|dm(z) + \int\limits_E |\partial f(z)|dm(z) < \varepsilon, \tag{16}$$

як тільки $m(E)<\delta$, $E\subset B$, і номери n є достатньо великими.

Остаточно, за теоремою Єгорова (див. [26], теорема III.6.12) для кожного $\delta > 0$ знайдеться така множина $S \subset B$, що $m(B \setminus S) < \delta$ і $\mu_n(z) \to \mu(z)$ рівномірно на S. Тоді $|\mu_n(z) - \mu(z)| < \varepsilon$ при всіх $n \geq n_0$, деякому $n_0 = n_0(\varepsilon)$ і всіх $z \in S$. З огляду на (16), (12) і нерівність Гельдера отримуємо

$$I_2''(n) \leq \varepsilon \int\limits_S |\partial f_n(z)| \, dm(z) + 2 \int\limits_{B \setminus S} |\partial f_n(z)| \, dm(z) <$$

$$< \varepsilon \cdot \left\{ \left(\int\limits_D K_{I,p}(w, g_n) \, dm(w) \right)^{1/p} (m(B))^{(p-1)/p} + 2 \right\} \leq$$

$$\leq \varepsilon \left\{ M^{1/p} (m(B))^{(p-1)/p} + 2 \right\} \tag{17}$$

при тих же $n \geq n_0$. Отже, $I_2''(n) \to 0$ при $n \to \infty$, тому $I_2(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Те, що

$$I_3(n) \to 0 \tag{18}$$

при $n \to \infty$, можна довести аналогічно. Отже, з (13)–(15), (17) і (18) випливає, що $\int_B \zeta(z) \, dm(z) = 0$ для всіх кругів B, компактно вкладених у D. За теоремою Лебега про диференціювання невизначеного інтеграла (див. [26], IV(6.3)) $\zeta(z) = 0$ майже скрізь в D.

Лему доведено.

***Доведення теореми* 2.** Розглянемо послідовність комплекснозначних функцій

$$\mu_n(z, w) = \begin{cases} \mu(z, w), & Q_0(z) \leq n, \\ 0, & Q_0(z) > n, \end{cases}$$

і

$$\nu_n(z, w) = \begin{cases} \nu(z, w), & Q_0(z) \leq n, \\ 0, & Q_0(z) > n, \end{cases}$$

де $Q_0(z)$ визначається співвідношенням (6). Нехай f_n — гомеоморфний ACL-розв'язок рівняння (2), в якому покладемо $\mu \mapsto \mu_n(z, w)$, $\nu \mapsto \nu_n(z, w)$, такий що $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$ (вказаний розв'язок визначено коректно з огляду на теорему 8.2 [16]). Зауважимо, що відображення $g_n = f_n^{-1}$ є квазіконформним; зокрема, воно є диференційовним майже скрізь і належить класу $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{D})$. За теоремою 6.10 [27] і з огляду на умову (10) для кожного $n \in \mathbb{N}$ отримуємо

$$M(g_n(\Gamma)) \leq \int\limits_{\mathbb{D}} K_{\mu_{g_n}}(w) \rho_*^2(w) \, dm(w) \leq \int\limits_{\mathbb{D}} Q(w) \rho_*^2(w) dm(w)$$

для довільної сім'ї кривих Γ в $\mathbb{D}$ і кожної функції $\rho_* \in \operatorname{adm} \Gamma$, де M — модуль сім'ї кривих (див., наприклад, [18], розд. 6). За теоремою 1.1 [13] сім'я відображень f_n одностайно неперервна в $\mathbb{D}$. Отже, з огляду на теорему Арцела–Асколі f_n є нормальною сім'єю (див. [18], теорема 20.4). Іншими словами, знайдеться підпослідовність f_{n_l} послідовності f_n, що збігається локально рівномірно в $\mathbb{D}$ до деякого відображення $f : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$. Зауважимо, що кожне відображення f_n

задовольняє рівняння

$$\overline{\partial} f_n = \mu_n(z, f_n(z))\partial f_n + \nu_n(z, f_n(z))\overline{\partial f_n}.$$

Оскільки $Q_0(z)$ скінченна майже скрізь, для майже всіх $z \in \mathbb{D}$ знайдеться такий номер $l_0 = l_0(z)$, що $\mu_{n_l}(z,w) = \mu(z,w)$, $\nu_{n_l}(z,w) = \nu(z,w)$ при $l \geq l_0$ і всіх $w \in \mathbb{C}$. Оскільки, за припущенням, функції μ і ν задовольняють умову Каратеодорі, маємо

$$\mu_{n_l}(z, f_{n_l}(z)) \to \mu(z, f(z)),$$
$$\nu_{n_l}(z, f_{n_l}(z)) \to \nu(z, f(z))$$

при $l \to \infty$. Тоді за лемою 2 відображення f належить класу $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{D})$ і є розв'язком вихідного рівняння Бельтрамі (2).

Теорему доведено.

***Доведення наслідку* 1** проводиться аналогічно доведенню наслідку 5.1 в [13]. Справді, за теоремою Фубіні з умови $Q \in L^1(\mathbb{D})$ випливає вимірність інтегралів $\displaystyle\int_{S(x_0,r)\cap D} Q(x)\, d\mathcal{H}^1(x)$ як функцій від r та їх скінченність майже скрізь при $0 < r < \infty$ (див., наприклад, [26], теорема 8.1.III). В цьому випадку умова (9) виконується при $p = 2$. Отже, існування розв'язку рівняння (2) і його належність класу $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{D})$ безпосередньо випливають з теореми 2.

Крім того, за теоремою 1.2 [13] (див. також [28], теорема 1)

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \frac{C \cdot \left(\|Q\|_1\right)^{1/2}}{\log^{1/2}\left(1 + \dfrac{r_0}{|x-y|}\right)} \quad \forall\, x, y \in K$$

для довільного компакта $K \subset \mathbb{D}$, де $\|Q\|_1$ — норма Q в $L^1(\mathbb{D})$, C — деяка стала і $r_0 = d(K, \partial\mathbb{D})$. Переходячи тут до границі при $n \to \infty$, отримуємо співвідношення (11).

Наслідок доведено.

Припустимо тепер, що $Q \in FMO(\mathbb{D})$ або виконується співвідношення (4). Тоді послідовність g_n утворює одностайно неперервну сім'ю відображень (див. [29], теореми 6.1 і 6.5). Отже, на підставі теореми Арцела – Асколі g_n є нормальною сім'єю (див. [18], теорема 20.4). Іншими словами, знайдеться підпослідовність g_{n_l} послідовності g_n, що збігається локально рівномірно в $\mathbb{D}$ до деякого відображення $g\colon \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$. Внаслідок умови нормування $g_{n_l}(0) = 0$ і $g_{n_l}(1) = 1$ при всіх $l = 1, 2, \ldots$. Тоді за теоремою 4.1 [19] відображення g є гомеоморфізмом в $\mathbb{D}$, крім того, за лемою 3.1 [19] $f_{n_l} \to f = g^{-1}$ при $l \to \infty$ локально рівномірно в $\mathbb{D}$. Далі застосуємо схему міркувань, використану вище у випадку інтегровної функції Q. Оскільки $\mu_n(z) \to \mu(z)$ і $\nu_n(z) \to \nu(z)$ при $n \to \infty$ і при майже всіх $z \in \mathbb{D}$, за лемою 2 відображення f належить класу $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{D})$ і є розв'язком вихідного квазілінійного рівняння Бельтрамі (2).

Наслідок доведено.

4. Приклади.

***Приклад* 1.** Побудуємо приклад неперервного, але не гомеоморфного розв'язку квазілінійного рівняння (2), який задовольняє умови наслідку 1 (зокрема, теореми 2). Будемо розглядати випадок, коли $\nu(z,w) \equiv 0$. При цьому використовуватимемо конструкцію прикладу, наведеного в [12] (розділ 3). Нехай $p \geq 1$ — довільне число і $0 < \alpha < 2/p$. Як звичайно, пишемо $z = re^{i\theta}$, $r \geq 0$ і $\theta \in [0, 2\pi)$. Покладемо

$$\mu(z,w)=\begin{cases} e^{2i\theta}\dfrac{2r-\alpha(2r-1)}{2r+\alpha(2r-1)}, & 1/2<|z|<1, |w|\geq 1,\\ e^{2i\theta}\dfrac{|w|^{\alpha}+1-\alpha(2r-1)}{|w|^{\alpha}+1+\alpha(2r-1)}, & 1/2<|z|<1, |w|<1,\\ 0, & |z|\leq 1/2. \end{cases} \tag{19}$$

Використовуючи співвідношення

$$\frac{\overline{\partial}f}{\partial f}=e^{2i\theta}\frac{rf_r+if_\theta}{rf_r-if_\theta} \tag{20}$$

(див. рівність (11.129) в [30]), отримуємо, що відображення

$$f(z)=\begin{cases} \dfrac{z}{|z|}(2|z|-1)^{1/\alpha}, & 1/2<|z|<1,\\ 0, & |z|\leq 1/2, \end{cases} \tag{21}$$

є розв'язком рівняння $f_{\overline{z}}=\mu(z,f(z))\cdot f_z$, де функція μ задається співвідношенням (19). Зауважимо, що існування розв'язку вказаного рівняння забезпечується теоремою 2 (для цього перевіримо виконання всіх умов цієї теореми). Справді, функція $\varphi(x,c)=\dfrac{x-c}{x+c}$ має додатну похідну при $c:=\alpha(2r-1)>0$, тому при $x\in[0,1]$ ця функція досягає свого максимального значення в точці $x=1$. Отже,

$$\left|e^{2i\theta}\frac{|w|^{\alpha}+1-\alpha(2r-1)}{|w|^{\alpha}+1+\alpha(2r-1)}\right|=\frac{|w|^{\alpha}+1-\alpha(2r-1)}{|w|^{\alpha}+1+\alpha(2r-1)}\leq\frac{2-\alpha(2r-1)}{2+\alpha(2r-1)}. \tag{22}$$

Взявши до уваги дріб у правій частині (22), покладемо

$$q(z):=e^{2i\theta}\frac{2-\alpha(2r-1)}{2+\alpha(2r-1)}. \tag{23}$$

Для заданої співвідношенням (23) функції q відповідною до неї функцією $Q_0(z)$ буде функція

$$Q_0(z)=\begin{cases} \dfrac{2}{\alpha(2|z|-1)}, & 1/2<|z|<1,\\ 1, & |z|\leq 1/2. \end{cases}$$

Нехай $k>1/\alpha$. Зауважимо, що $Q_0(z)\leq k$ при $|z|\geq\dfrac{2+k\alpha}{2k\alpha}$ і $Q_0(z)>k$ в іншому випадку. Нехай, як і раніше,

$$\mu_k(z,w)=\begin{cases} \mu(z,w), & K_\mu(z)\leq k,\\ 0, & K_\mu(z)>k. \end{cases}$$

Зазначимо, що розв'язками рівняння $f_{\overline{z}}=\mu_k(z,f(z))f_z$ є відображення

$$f_k(z)=\begin{cases} \dfrac{z}{|z|}(2|z|-1)^{1/\alpha}, & \dfrac{2+k\alpha}{2k\alpha}<|z|<1,\\ \dfrac{z}{\left(\dfrac{2+k\alpha}{2k\alpha}\right)}\left(\dfrac{2}{k\alpha}\right)^{1/\alpha}, & |z|\leq\dfrac{2+k\alpha}{2k\alpha}, \end{cases}$$

при цьому обернені відображення $g_k(y) = f_k^{-1}(y)$ обчислюються за формулою

$$g_k(y) = \begin{cases} \dfrac{y(|y|^\alpha + 1)}{2|y|}, & \left(\dfrac{2}{k\alpha}\right)^{1/\alpha} < |y| < 1, \\ \dfrac{y\dfrac{2+k\alpha}{2k\alpha}}{\left(\dfrac{2}{k\alpha}\right)^{1/\alpha}}, & |y| \le \left(\dfrac{2}{k\alpha}\right)^{1/\alpha}. \end{cases} \tag{24}$$

Безпосередніми обчисленнями, використовуючи формулу (20), можна показати, що

$$\frac{(f_k)_{\overline{z}}}{(f_k)_z} = e^{2i\theta}\frac{2r - \alpha(2r-1)}{2r + \alpha(2r-1)}.$$

Тоді

$$K_{\mu_{f_k}}(z) = \begin{cases} \dfrac{4|z|}{2\alpha(2|z|-1)}, & \dfrac{2+k\alpha}{2k\alpha} < |z| < 1, \\ 1, & |z| \le \dfrac{2+k\alpha}{2k\alpha}. \end{cases} \tag{25}$$

Нам потрібно перевірити, чи виконується (10) для деякої інтегровної в $\mathbb{D}$ функції Q. Для цього підставимо відображення g_k з (24) у максимальну дилатацію K_{μ_k}, визначену рівністю (25) (див. формулу (4), гл. I, в [1]). Тоді

$$K_{\mu_{g_k}}(y) := K_{\mu_k}(g_k(y)) = \begin{cases} \dfrac{|y|^\alpha + 1}{\alpha|y|^\alpha}, & \left(\dfrac{2}{k\alpha}\right)^{1/\alpha} < |y| < 1, \\ 1, & |y| \le \left(\dfrac{2}{k\alpha}\right)^{1/\alpha}. \end{cases}$$

Зауважимо, що $K_{\mu_{g_k}}(y) \le Q(y) := \dfrac{|y|^\alpha + 1}{\alpha|y|^\alpha}$ при всіх $y \in \mathbb{D}$. При цьому функція Q інтегровна в $\mathbb{D}$ навіть у степені p, а не лише в степені 1 (див. міркування, використані при розгляді пропозиції 6.3 у [30]). За побудовою $f_k(0) = 0$ і $f_k(1) = 1$. Тому всі умови наслідку 1 (зокрема, теореми 2) виконуються, а в якості бажаного розв'язку рівняння $f_{\overline{z}} = \mu(z) f_z$ можна розглянути відображення $f = f(z)$, визначене рівністю (21). І навіть більше, з доведення цієї теореми випливає, що відображення f є вказаним там розв'язком, оскільки f є локально рівномірною границею послідовності f_k. Зауважимо, що відображення f не є гомеоморфним розв'язком, а також воно не є ані відкритим, ані дискретним.

***Приклад* 2.** Нехай f — відображення, визначене співвідношенням (21). Використовуючи формулу $f_z = f_r r_z + f_\theta \theta_z$, отримуємо $f_z = (2r-1)^{(1/\alpha)-1}\left(\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{2r-1}{2r}\right)$. Звідси випливає, що f_z є дійсним числом при всіх $z \in \mathbb{D}$, отже, $f_z = \overline{f_z}$. Таким чином, можемо записати

$$f_{\overline{z}} = \mu(z,f) f_z = \frac{1}{2}\mu(z,f) f_z + \frac{1}{2}\nu(z,f)\overline{f_z},$$

де $\mu(z,w) = \nu(z,w)$ і $\mu(z,w)$ визначено співвідношенням (19). За доведеним вище в прикладі 1 рівняння $f_{\overline{z}} = \mu(z,f) f_{\overline{z}} + \nu(z,f)\overline{f_z}$ має розв'язок f, визначений співвідношенням (21), причому коефіцієнти цього рівняння задовольняють умови наслідку 1 (зокрема, теореми 2).

Література

1. Л. Альфорс, *Лекции по квазиконформным отображениям*, Мир, Москва (1969).
2. K. Astala, T. Iwaniec, G. Martin, *Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane*, Princeton Univ. Press, Princeton, NY (2009).
3. B. Bojarski, V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, *General Beltrami equations with two characteristics*, Ukr. Math. Bull., **5**, № 3, 305 – 326 (2008).
4. B. Bojarski, V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, *On the Beltrami equations with two characteristics*, Complex Var. and Elliptic Equat., **54**, № 10, 935 – 950 (2009).
5. B. Bojarski, V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, *On existence and representation of solutions for general degenerate Beltrami equations*, Complex Var. and Elliptic Equat., **59**, № 1, 67 – 75 (2013).
6. A. Golberg, R. Salimov, *Nonlinear Beltrami equation*, Complex Var. and Elliptic Equat., **65**, № 1, 6 – 21 (2020).
7. V. Ya. Gutlyanskii, V. I. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *The Beltrami equation: a geometric approach*, Springer, New York etc. (2012).
8. T. Lomako, R. Salimov, E. Sevost'yanov, *On equicontinuity of solutions to the Beltrami equations*, Ann. Univ. Bucharest. Math. Ser., **59**, № 2, 263 – 274 (2010).
9. R. Salimov, M. Stefanchuk, *On the local properties of solutions of the nonlinear Beltrami equation*, J. Math. Sci., **248**, 203 – 216 (2020).
10. R. Salimov, M. Stefanchuk, *Logarithmic asymptotics of the nonlinear Cauchy – Riemann – Beltrami equation*, Ukr. Math. J., **73**, № 4, 463 – 478 (2021).
11. Е. А. Севостьянов, *О квазилинейных уравнениях типа Бельтрами с вырождением*, Мат. заметки, **90**, вып. 3, 445 – 453 (2011).
12. Є. О. Севостьянов, *Про існування розв'язків рівнянь Бельтрамі з умовами на обернені дилатації*, Укр. мат. вісн., **18**, № 2, 243 – 254 (2021).
13. E. A. Sevost'yanov, S. A. Skvortsov, *Logarithmic Hölder continuous mappings and Beltrami equation*, Anal. and Math. Phys., Article 138 (2021).
14. O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä, *Definitions for quasiregular mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1, **448**, 1 – 40 (1969).
15. V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Finite mean oscillation and the Beltrami equation*, Israel J. Math., **153**, 247 – 266 (2006).
16. B. Bojarski, *Generalized solutions of a system of differential equations of the first order of the elliptic type with discontinuous coefficients*, Mat. Sb., **43(85)**, 451 – 503 (1957).
17. O. Lehto, K. Virtanen, *Quasiconformal mappings in the plane*, Springer, New York etc. (1973).
18. J. Väisälä, *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings*, Lect. Notes Math., **229**, Springer-Verlag, Berlin etc. (1971).
19. V. I. Ryazanov, R. R. Salimov, E. A. Sevost'yanov, *On convergence analysis of space homeomorphisms,* Siberian Adv. Math., **23**, № 4, 263 – 293 (2013).
20. J. Maly, O. Martio, *Lusin's condition N and mappings of the class $W^{1,n}_{loc}$*, J. reine und angew. Math., **458**, 19 – 36 (1995).
21. С. П. Пономарев, *N^{-1}-свойство отображений и условие (N) Лузина*, Мат. заметки, **58**, 411 – 418 (1995).
22. E. A. Sevost'yanov, *Equicontinuity of homeomorphisms with unbounded characteristic*, Siberian Adv. Math., **23**, № 2, 106 – 122 (2013).
23. Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*, Наука, Москва (1987).
24. Ю. Г. Решетняк, *Пространственные отображения с ограниченным искажением*, Наука, Новосибирск (1982).
25. V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *On convergence theory for Beltrami equations*, Ukr. Mat. Visn., **5**, № 4, 524 – 535 (2008).
26. С. Сакс, *Теория интеграла*, Изд-во иностр. лит., Москва (1949).
27. O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Mappings with finite length distortion*, J. Anal. Math., **93**, 215 – 236 (2004).
28. Є. О. Севостьянов, С. О. Скворцов, О. П. Довгопятий, *Про негомеоморфні відображення з оберненою нерівністю Полецького*, Укр. мат. вісн., **17**, № 3, 414 – 436 (2020).
29. V. Ryazanov, E. Sevost'yanov, *Toward the theory of ring Q-homeomorphisms*, Israel J. Math., **168**, 101 – 118 (2008).
30. O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in modern mapping theory*, Springer Sci. + Business Media, LLC, New York (2009).

Одержано 04.01.22