УДК 517.956

А. Т. Асанова (Ин-т математики и мат. моделирования, Алматы, Казахстан),
А. Б. Тлеулесова (Ин-т математики и мат. моделирования, Алматы; Евраз. нац. ун-т им. Л. Н. Гумилева, Астана, Казахстан)

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

We consider a nonlocal problem for a system of partial differential equations of higher order with pulsed actions. By introducing new unknown functions, the analyzed problem is reduced to an equivalent problem formed by a nonlocal problem for impulsive system of hyperbolic equations of the second order and integral relations. We propose an algorithm for finding the solutions of the equivalent problem based on the solution of a nonlocal problem for a system of hyperbolic equations of the second order with pulsed action for fixed values of the introduced additional functions, which are then determined from the integral relations in terms of the obtained solution. Sufficient conditions for the existence of a unique solution to the nonlocal problem for an impulsive system of hyperbolic equations of the second order are obtained by method of introduction functional parameters. The algorithms for finding its solutions are constructed. Conditions for the unique solvability of a nonlocal problem for the system of partial differential equations of higher order with pulsed actions are established in terms of the coefficients of the system and boundary matrices.

Розглядається нелокальна задача для системи диференціальних рівнянь високого порядку з імпульсним впливом. Шляхом уведення нових невідомих функцій розглядувана задача зводиться до еквівалентної задачі, що складається з нелокальної задачі з імпульсним впливом для системи гіперболічних рівнянь другого порядку й інтегральних співвідношень. Запропоновано алгоритм знаходження розв'язків еквівалентної задачі, який ґрунтується на розв'язанні нелокальної задачі з імпульсним впливом для системи гіперболічних рівнянь другого порядку при фіксованих значеннях уведених додаткових функцій, які потім визначаються з інтегральних співвідношень через цей знайдений розв'язок. На основі методу введення функціональних параметрів отримано достатні умови існування єдиного розв'язку нелокальної задачі з імпульсним впливом для системи гіперболічних рівнянь другого порядку та побудовано алгоритми знаходження його розв'язків. Встановлено умови однозначної розв'язності нелокальної задачі для системи диференціальних рівнянь високого порядку з імпульсним впливом у термінах коефіцієнтів системи і граничних матриць.

1. Постановка задачи. В прямоугольной области $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$ рассматривается нелокальная задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка с импульсными воздействиями в фиксированные моменты времени

$$\frac{\partial^{m+1}u}{\partial x^m \partial t} = A_1(t,x)\frac{\partial^m u}{\partial x^m} + B_1(t,x)\frac{\partial^m u}{\partial x^{m-1}\partial t} + C_1(t,x)\frac{\partial^{m-1}u}{\partial x^{m-1}} +$$

$$+\sum_{s=2}^{m-1}\left\{A_s(t,x)\frac{\partial^{m-s}u}{\partial x^{m-s}} + B_s(t,x)\frac{\partial^{m-s}u}{\partial x^{m-s-1}\partial t}\right\} + C_2(t,x)u + f(t,x), \qquad (1.1)$$

$$\sum_{\substack{i+j=0 \\ i=\overline{0,m}; j=\overline{0,1}}}^{m} \left\{ P_{i,j}(x) \frac{\partial^{i+j} u(t,x)}{\partial x^i \partial t^j} \bigg|_{t=0} + S_{i,j}(x) \frac{\partial^{i+j} u(t,x)}{\partial x^i \partial t^j} \bigg|_{t=T} \right\} = \varphi_0(x), \quad x \in [0,\omega], \tag{1.2}$$

$$\lim_{t \to t_r + 0} \frac{\partial^m u(t,x)}{\partial x^{m-1} \partial t} - \lim_{t \to t_r - 0} \frac{\partial^m u(t,x)}{\partial x^{m-1} \partial t} = \varphi_r(x), \qquad x \in [0,\omega], \quad r = \overline{1,k}, \tag{1.3}$$

$$u(t,0) = \psi_1(t), \qquad \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \psi_2(t), \ldots, \quad \frac{\partial^{m-1} u(t,x)}{\partial x^{m-1}}\bigg|_{x=0} = \psi_m(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.4}$$

где $u = \mathrm{col}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $m = 2, 3, \ldots$, $(n \times n)$-матрицы $A_s(t,x)$, $B_s(t,x)$, $s = \overline{1, m-1}$, $C_1(t,x)$, $C_2(t,x)$, n-вектор-функция $f(t,x)$ кусочно-непрерывны на Ω с возможными разрывами на линиях $t = t_i$, $i = \overline{1,k}$, $(n \times n)$-матрицы $P_{i,j}(x)$, $S_{i,j}(x)$, n-вектор-функция $\varphi_0(x)$ непрерывны на $[0,\omega]$, $0 \le i + j \le m$, $i = \overline{0,m}$, $j = \overline{0,1}$, $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < T$, n-вектор-функции $\varphi_r(x)$, $r = \overline{1,k}$, непрерывно дифференцируемы на $[0,\omega]$, n-вектор-функции $\psi_l(t)$, $l = \overline{1,m}$, непрерывно дифференцируемы на $[0,T]$,

$$\|u(t,x)\| = \max_{i=\overline{1,n}} |u_i(t,x)|, \qquad \|A(t,x)\| = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(t,x)|.$$

Введем обозначения $t_0 = 0$, $t_{k+1} = T$, $\Omega_r = [t_{r-1}, t_r) \times [0,\omega]$, $r = \overline{1, k+1}$, т. е. $\Omega = \bigcup_{r=1}^{k+1} \Omega_r$.

Пусть $PC\big(\Omega, \{t_r\}_{r=1}^{k}, R^n\big)$ — пространство кусочно-непрерывных на Ω вектор-функций $u(t,x)$ с возможными разрывами на линиях $t = t_r$, $r = \overline{1,k}$, и нормой

$$\|u\|_1 = \max_{r=\overline{1,k+1}} \sup_{(t,x) \in \Omega_r} \|u(t,x)\|.$$

Функция $u(t,x) \in PC\big(\Omega, \{t_r\}_{r=1}^{k}, R^n\big)$, имеющая частные производные $\dfrac{\partial^{i+j} u(t,x)}{\partial x^i \partial t^j} \in PC\big(\Omega, \{t_r\}_{r=1}^{k}, R^n\big)$, $i = \overline{1,m}$, $j = 0, 1$, называется *решением* задачи (1.1)–(1.4), если она удовлетворяет системе дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка (1.1) для всех $(t,x) \in \Omega$, кроме линий $t = t_r$, $r = \overline{1,k}$, нелокальному условию (1.2), условию импульсного воздействия (1.3) и краевым условиям (1.4). При этом решение и его производные являются непрерывными справа на линиях $t = t_r$, $r = \overline{1,k}$.

Теория краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка активно развивается и находит многочисленные применения в различных областях прикладной математики. Исследованию этих задач и разработке методов нахождения их решений посвящено много работ (см. [1–9] и приведенную там библиографию).

Многие задачи динамики и кинетики сорбции газов, процессов сушки воздушным потоком, движения адсорбируемых смесей веществ и др. приводят к изучению краевых задач для систем дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями [10–26]. Для решения указанных задач применяются методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, математической физики, численно-аналитический метод и разрабатываются новые подходы и методы. Получены условия разрешимости и предложены способы нахождения приближенных решений. Несмотря на это вопрос об эффективных условиях однозначной разрешимости нелокальных задач для дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка с импульсными воздействиями остается открытым.

В настоящей статье методы работ [24 – 26] развиваются на нелокальные задачи для системы дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка с импульсными воздействиями (1.1) – (1.4). На основе введения новых неизвестных функций рассматриваемая задача сводится к эквивалентной задаче, состоящей из нелокальной задачи с импульсными воздействиями для системы гиперболических уравнений второго порядка и интегральных соотношений. Полученную эквивалентную задачу также можно трактовать как нелокальную задачу для системы гиперболических уравнений второго порядка с импульсными воздействиями и распределенными параметрами [27 – 32]. Предложены алгоритмы нахождения решения эквивалентной задачи и показана их сходимость. Установлены условия существования единственного решения нелокальной задачи для системы дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка с импульсными воздействиями в терминах исходных данных.

2. Сведение к нелокальной задаче для системы гиперболических уравнений второго порядка с импульсными воздействиями и распределенными параметрами. Алгоритм. Пусть $v_s(t,x) = \dfrac{\partial^{m-s} u(t,x)}{\partial x^{m-s}}$, $s = \overline{1,m}$. Задачу (1.1) – (1.4) запишем в виде

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} = A_1(t,x)\frac{\partial v_1}{\partial x} + B_1(t,x)\frac{\partial v_1}{\partial t} + C_1(t,x)v_1 + f(t,x) +$$

$$+ \sum_{s=2}^{m-1}\left\{A_s(t,x)v_s(t,x) + B_s(t,x)\frac{\partial v_s}{\partial t}\right\} + C_2(t,x)v_m, \tag{2.1}$$

$$P_{m,0}(x)\frac{\partial v_1(0,x)}{\partial x} + P_{m-1,1}(x)\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=0} + P_{m-1,0}(x)v_1(0,x) +$$

$$+ S_{m,0}(x)\frac{\partial v_1(T,x)}{\partial x} + S_{m-1,1}(x)\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=T} + S_{m-1,0}(x)v_1(T,x) =$$

$$= \varphi_0(x) - \sum_{i=2}^{m}\Bigg\{P_{m-i,0}(x)v_i(0,x) + S_{m-i,0}(x)v_i(T,x) +$$

$$+ P_{m-i,1}(x)\frac{\partial v_i(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=0} + S_{m-i,1}(x)\frac{\partial v_i(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=T}\Bigg\}, \quad x \in [0,\omega], \tag{2.2}$$

$$\lim_{t \to t_r + 0}\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial t} - \lim_{t \to t_r - 0}\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial t} = \varphi_r(x), \qquad x \in [0,\omega], \quad r = \overline{1,k}, \tag{2.3}$$

$$v_1(t,0) = \psi_m(t), \quad t \in [0,T], \tag{2.4}$$

$$v_{s+1}(t,x) = \psi_{m-s}(t) + \int\limits_0^x v_s(t,\xi)\,d\xi, \qquad \frac{\partial v_{s+1}(t,x)}{\partial t} = \dot{\psi}_{m-s}(t) + \int\limits_0^x \frac{\partial v_s(t,\xi)}{\partial t}\,d\xi, \tag{2.5}$$

$$s = \overline{1, m-1}.$$

В задаче (2.1) – (2.5) условия

$$u(t,0) = \psi_1(t), \qquad \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = \psi_2(t),$$

$$\left.\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \psi_3(t), \ldots, \left.\frac{\partial^{m-2} u(t,x)}{\partial x^{m-2}}\right|_{x=0} = \psi_{m-1}(t)$$

учтены в соотношениях (2.5).

Система m-вектор-функций $\big(v_1(t,x), v_2(t,x), \ldots, v_m(t,x)\big)$ кусочно-непрерывных на Ω функций $v_s(t,x),\ s = \overline{1,m}$, называется *решением* задачи (2.1) – (2.5), если функция $v_1(t,x)$ имеет кусочно-непрерывные производные первого и смешанного второго порядков на Ω и удовлетворяет нелокальной задаче для системы гиперболических уравнений второго порядка с импульсными воздействиями (2.1) – (2.4), где функции $v_s(t,x)$ и их производные $\dfrac{\partial v_s(t,x)}{\partial t}$, $s = \overline{2,m}$, связаны с $v_1(t,x)$ и ее производной $\dfrac{\partial v_1(t,x)}{\partial t}$ интегральными соотношениями (2.5).

Задача (2.1) – (2.4) при фиксированных $v_s(t,x)$ и $\dfrac{\partial v_s(t,x)}{\partial t}$, $s = \overline{2,m}$, представляет нелокальную задачу с импульсными воздействиями для системы гиперболических уравнений второго порядка. Соотношения (2.5) позволяют определить неизвестные функции $v_s(t,x)$ и их производные $\dfrac{\partial v_s(t,x)}{\partial t}$ с помощью $v_1(t,x),\ s = \overline{2,m}$.

Задачу (2.1) – (2.5) можно трактовать также как нелокальную задачу для системы гиперболических уравнений второго порядка с импульсными воздействиями и распределенными параметрами [27 – 32]. В качестве параметров используются введенные дополнительные функции $v_s(t,x),\ s = \overline{2,m}$, которые связаны с искомой функцией интегральными соотношениями (2.5). С другой стороны, задачу (2.1) – (2.5) можно интерпретировать как обратную задачу [28] с неизвестными функциями $v_s(t,x),\ s = \overline{2,m}$, для определения которых заданы дополнительные условия (2.5).

Для нахождения решения задачи (2.1) – (2.5) — системы m-вектор-функций $\big(v_1(t,x), v_2(t,x), \ldots, v_m(t,x)\big)$ — применяется итерационный процесс на основе следующего алгоритма $\mathcal{X}_p$.

Шаг 0. Полагая $v_s(t,x) = \psi_{s-1}(t),\ \dfrac{\partial v_s(t,x)}{\partial t} = \dot{\psi}_{s-1}(t),\ s = \overline{2,m}$, в правой части системы (2.1) и в нелокальном условии (2.2), из задачи (2.1) – (2.4) находим $v_1^{(0)}(t,x) \in PC(\Omega, \{t_r\}_{r=1}^k, R^n)$ и ее производные $\dfrac{\partial v_1^{(0)}(t,x)}{\partial x} \in PC(\Omega, \{t_r\}_{r=1}^k, R^n),\ \dfrac{\partial v_1^{(0)}(t,x)}{\partial t} \in PC(\Omega, \{t_r\}_{r=1}^k, R^n)$. Из интегральных соотношений (2.5) при $v_1(t,x) = v_1^{(0)}(t,x),\ \dfrac{\partial v_1(t,x)}{\partial t} = \dfrac{\partial v_2^{(0)}(t,x)}{\partial t}$ определяем $v_2^{(0)}(t,x) \in PC\big(\Omega, \{t_r\}_{r=1}^k, R^n\big)$, $\dfrac{\partial v_2^{(0)}(t,x)}{\partial t} \in PC\big(\Omega, \{t_r\}_{r=1}^k, R^n\big)$ для $s=1$, затем $v_3^{(0)}(t,x) \in PC\big(\Omega, \{t_r\}_{r=1}^k, R^n\big)$, $\dfrac{\partial v_3^{(0)}(t,x)}{\partial t} \in PC\big(\Omega, \{t_r\}_{r=1}^k, R^n\big)$ для $s=2,\ldots, v_m^{(0)}(t,x) \in$ $\in PC\big(\Omega, \{t_r\}_{r=1}^k, R^n\big)$, $\dfrac{\partial v_m^{(0)}(t,x)}{\partial t} \in PC\big(\Omega, \{t_r\}_{r=1}^k, R^n\big)$ для $s=m-1$.

Шаг 1. Полагая $v_s(t,x) = v_s^{(0)}(t,x)$, $\dfrac{\partial v_s(t,x)}{\partial t} = \dfrac{\partial v_s^{(0)}(t,x)}{\partial t}$, $s=\overline{2,m}$, в правой части системы (2.1) и в нелокальном условии (2.2), из задачи (2.1)–(2.4) находим $v_1^{(1)}(t,x) \in$ $\in PC\big(\Omega, \{t_r\}_{r=1}^k, R^n\big)$ и ее производные $\dfrac{\partial v_1^{(1)}(t,x)}{\partial x} \in PC\big(\Omega, \{t_r\}_{r=1}^k, R^n\big)$, $\dfrac{\partial v_1^{(1)}(t,x)}{\partial t} \in$ $\in PC\big(\Omega, \{t_r\}_{r=1}^k, R^n\big)$. Из интегральных соотношений (2.5) при $v_1(t,x) = v_1^{(1)}(t,x)$, $\dfrac{\partial v_1(t,x)}{\partial t} =$ $= \dfrac{\partial v_1^{(1)}(t,x)}{\partial t}$ определяем $v_2^{(1)}(t,x) \in PC\big(\Omega, \{t_r\}_{r=1}^k, R^n\big)$, $\dfrac{\partial v_2^{(1)}(t,x)}{\partial t} \in PC\big(\Omega, \{t_r\}_{r=1}^k, R^n\big)$ для $s=1$, затем $v_3^{(1)}(t,x) \in PC\big(\Omega, \{t_r\}_{r=1}^k, R^n\big)$, $\dfrac{\partial v_3^{(1)}(t,x)}{\partial t} \in PC\big(\Omega, \{t_r\}_{r=1}^k, R^n\big)$ для $s=2,\ldots, v_m^{(1)}(t,x) \in PC\big(\Omega, \{t_r\}_{r=1}^k, R^n\big)$, $\dfrac{\partial v_m^{(1)}(t,x)}{\partial t} \in PC\big(\Omega, \{t_r\}_{r=1}^k, R^n\big)$ для $s=m-1$.

И так далее.

Шаг p. Полагая $v_s(t,x) = v_s^{(p-1)}(t,x)$, $\dfrac{\partial v_s(t,x)}{\partial t} = \dfrac{\partial v_s^{(p-1)}(t,x)}{\partial t}$, $s=\overline{2,m}$, в правой части системы (2.1) и в нелокальном условии (2.2), из задачи (2.1)–(2.4) находим $v^{(p)}(t,x) \in$ $\in PC\big(\Omega, \{t_r\}_{r=1}^k, R^n\big)$ и ее производные $\dfrac{\partial v^{(p)}(t,x)}{\partial x} \in PC\big(\Omega, \{t_r\}_{r=1}^k, R^n\big)$, $\dfrac{\partial v^{(p)}(t,x)}{\partial t} \in$ $\in PC\big(\Omega, \{t_r\}_{r=1}^k, R^n\big)$. Из интегральных соотношений (2.5) при $v_1(t,x) = v_1^{(p)}(t,x)$, $\dfrac{\partial v_1(t,x)}{\partial t} =$ $= \dfrac{\partial v_1^{(p)}(t,x)}{\partial t}$ определяем $v_2^{(p)}(t,x) \in PC\big(\Omega, \{t_r\}_{r=1}^k, R^n\big)$, $\dfrac{\partial v_2^{(p)}(t,x)}{\partial t} \in PC\big(\Omega, \{t_r\}_{r=1}^k, R^n\big)$ для $s=1$, затем $v_3^{(p)}(t,x) \in PC\big(\Omega, \{t_r\}_{r=1}^k, R^n\big)$, $\dfrac{\partial v_3^{(p)}(t,x)}{\partial t} \in PC\big(\Omega, \{t_r\}_{r=1}^k, R^n\big)$ для $s=2,\ldots, v_m^{(p)}(t,x) \in PC\big(\Omega, \{t_r\}_{r=1}^k, R^n\big)$, $\dfrac{\partial v_m^{(p)}(t,x)}{\partial t} \in PC\big(\Omega, \{t_r\}_{r=1}^k, R^n\big)$ для $s=m-1$, $p=1,2,\ldots$.

Основным моментом осуществимости предлагаемого алгоритма является разрешимость нелокальной задачи с импульсными воздействиями для системы гиперболических уравнений второго порядка (2.1)–(2.4) при фиксированных $v_s(t,x)$, $\dfrac{\partial v_s(t,x)}{\partial t}$, $s=\overline{2,m}$.

Этому вопросу будет посвящен следующий пункт. Условия сходимости алгоритма будут приведены в пункте 4.

3. Нелокальная задача с импульсными воздействиями для системы гиперболических уравнений второго порядка. Рассмотрим нелокальную задачу с импульсными воздействиями для системы гиперболических уравнений второго порядка

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} = A_1(t,x)\frac{\partial v_1}{\partial x} + B_1(t,x)\frac{\partial v_1}{\partial t} + C_1(t,x)v_1 + F(t,x), \tag{3.1}$$

$$P_{m,0}(x)\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial x}\Big|_{t=0}+P_{m-1,1}(x)\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=0}+$$

$$+P_{m-1,0}(x)v_1(t,x)\Big|_{t=0}+S_{m,0}(x)\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial x}\Big|_{t=T}+$$

$$+S_{m-1,1}(x)\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=T}+S_{m-1,0}(x)v_1(t,x)\Big|_{t=T}=\Phi(x), \quad x\in[0,\omega], \tag{3.2}$$

$$\lim_{t\to t_r+0}\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial t}-\lim_{t\to t_r-0}\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial t}=\varphi_i(x), \qquad x\in[0,\omega], \quad i=\overline{1,k}, \tag{3.3}$$

$$v_1(t,0)=\psi_m(t), \quad t\in[0,T], \tag{3.4}$$

где $v_1=\mathrm{col}(v_{11},v_{12},\ldots,v_{1n})$, функция $F(t,x)\in PC(\Omega,\{t_r\}_{r=1}^k,R^n)$, $\Phi(x)\in C([0,\omega],R^n)$, $0=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_k<t_{k+1}=T$.

Функция $v_1(t,x)\in PC\big(\Omega,\{t_r\}_{r=1}^k,R^n\big)$, имеющая частные производные

$$\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial t}\in PC\big(\Omega,\{t_r\}_{r=1}^k,R^n\big), \qquad \frac{\partial v_1(t,x)}{\partial x}\in PC\big(\Omega,\{t_r\}_{r=1}^k,R^n\big),$$

$$\frac{\partial^2 v_1(t,x)}{\partial x\partial t}\in PC\big(\Omega,\{t_r\}_{r=1}^k,R^n\big),$$

называется *решением* нелокальной задачи с импульсными воздействиями для системы гиперболических уравнений (3.1) – (3.4), если она удовлетворяет системе (3.1) для всех $(t,x)\in\Omega$, кроме линий $t=t_r$, $r=\overline{1,k}$, нелокальному условию (3.2), условиям импульсного воздействия (3.3) для всех $x\in[0,\omega]$ и краевому условию (3.4).

При отсутствии импульсных воздействий нелокальная задача (3.1), (3.2), (3.4) исследовалась в работах [33 – 36]. Задача (3.1), (3.2), (3.4) с условиями импульсного воздействия вида

$$\lim_{t\to t_r+0}\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial x}-\lim_{t\to t_r-0}\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial x}=U_r(x)\frac{\partial u(t_r+0,x)}{\partial x}+\varphi_r(x), \qquad x\in[0,\omega], \quad r=\overline{1,k},$$

и их комбинациями с учетом импульсных воздействий в предыдущих линиях изучалась в работах [24 – 26]. Нелокальная задача с условиями импульсного воздействия, заданными через производную по t неизвестной функции, рассматривается впервые.

Для решения нелокальной задачи (3.1) – (3.4) используем методы и результаты работ [24 – 26].

Вводятся дополнительные функциональные параметры как значения искомой функции на линии $t=0$ и линиях импульсного воздействия $t=t_r$, $r=\overline{1,k}$, области Ω. Исходная задача путем замены переходит в эквивалентную задачу с функциональными параметрами. Свойства решений переходят в свойства параметров.

Через $v_{1,r}(t,x)$ обозначим сужение функции $v_1(t,x)$ на Ω_r, $r=\overline{1,k+1}$. Вводятся параметры $\mu_r(x)=v_{1,r}(t_{r-1},x)$, $r=\overline{1,k+1}$, и задача (3.1) – (3.4) путем замены неизвестной функции $v_1(t,x)=\widetilde{v}_r(t,x)+\mu_r(x)$, $(t,x)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,k+1}$, сводится к следующей эквивалентной задаче с параметрами:

$$\frac{\partial^2\widetilde{v}_r}{\partial x\partial t} = A_1(t,x)\frac{\partial\widetilde{v}_r}{\partial x} + B_1(t,x)\frac{\partial\widetilde{v}_r}{\partial t} + C_1(t,x)\widetilde{v}_r + F(t,x)+$$

$$+A_1(t,x)\dot{\mu}_r(x) + C_1(t,x)\mu_r(x), \quad (t,x)\in\Omega_r, \tag{3.5}$$

$$\widetilde{v}_r(t_{r-1},x) = 0, \qquad r=\overline{1,k+1}, \quad x\in[0,\omega], \tag{3.6}$$

$$\widetilde{v}_r(t,0) + \mu_r(0) = \psi_m(t), \qquad t\in[t_{r-1},t_r), \quad r=\overline{1,k+1}, \tag{3.7}$$

$$P_{m,0}(x)\dot{\mu}_1(x) + S_{m,0}(x)\dot{\mu}_{k+1}(x) + P_{m-1,0}(x)\mu_1(x) + S_{m-1,0}(x)\mu_{k+1}(x)+$$

$$+P_{m-1,1}(x)\frac{\partial\widetilde{v}_1(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=0} + S_{m,0}(x)\lim_{t\to T-0}\frac{\partial\widetilde{v}_{k+1}(t,x)}{\partial x} + S_{m-1,1}(x)\lim_{t\to T-0}\frac{\partial\widetilde{v}_{k+1}(t,x)}{\partial t}+$$

$$+S_{m-1,0}(x)\lim_{t\to T-0}\widetilde{v}_{k+1}(t,x) = \Phi(x), \quad x\in[0,\omega], \tag{3.8}$$

$$\lim_{t\to t_r+0}\frac{\partial\widetilde{v}_{r+1}(t,x)}{\partial t} - \lim_{t\to t_r-0}\frac{\partial\widetilde{v}_r(t,x)}{\partial t} = \varphi_i(x), \qquad x\in[0,\omega], \quad r=\overline{1,k}. \tag{3.9}$$

Из условий (3.6), (3.7) и согласования данных в точках $(t_{r-1},0)$, $r=\overline{1,k+1}$, получаем

$$\mu_r(0) = \psi_m(t_{r-1}), \quad r=\overline{1,k+1}. \tag{3.10}$$

Решением задачи (3.5) – (3.9) является система пар $\big(\mu(x),\widetilde{v}([t],x)\big)$ с элементами $\mu(x) = \big(\mu_1(x), \mu_2(x),\ldots,\mu_{k+1}(x)\big)'$, $\widetilde{v}([t],x) = \big(\widetilde{v}_1(t,x),\widetilde{v}_2(t,x),\ldots,\ \widetilde{v}_{k+1}(t,x)\big)'$, где функции $\widetilde{v}_r(t,x)$ непрерывны на Ω_r, имеют непрерывные частные производные $\dfrac{\partial\widetilde{v}_r(t,x)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\widetilde{v}_r(t,x)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^2\widetilde{v}_r(t,x)}{\partial x\partial t}$ на Ω_r, $r=\overline{1,k+1}$, конечный левосторонний предел $\lim_{t\to t_r-0}\dfrac{\partial\widetilde{v}_r(t,x)}{\partial x}$, $r=\overline{1,k+1}$, и при $\mu_r(x) = \mu_r^*(x)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (3.5) и условиям (3.6) – (3.9). Отметим, что из существования предела $\lim_{t\to t_r-0}\dfrac{\partial\widetilde{v}_r(t,x)}{\partial x}$, $r=\overline{1,k+1}$, следует существование конечных левосторонних пределов $\lim_{t\to t_r-0}\widetilde{v}_r(t,x)$, $\lim_{t\to t_r-0}\dfrac{\partial\widetilde{v}_r(t,x)}{\partial t}$, $\lim_{t\to t_r-0}\dfrac{\partial^2\widetilde{v}_r(t,x)}{\partial x\partial t}$, $r=\overline{1,k+1}$.

Задачи (3.1) – (3.4) и (3.5) – (3.9) эквивалентны в том смысле, что если функция $v_1(t,x)$ является решением задачи (3.1) – (3.4), то система пар $\big(\mu(x),\widetilde{v}([t],x)\big)$, где

$$\mu(x) = \big(\mu_1(x),\mu_2(x),\ldots,\mu_{k+1}(x)\big)', \qquad \widetilde{v}([t],x) = \big(\widetilde{v}_1(t,x),\widetilde{v}_2(t,x),\ldots,\widetilde{v}_{k+1}(t,x)\big)',$$

$$v_r(t,x) = v_1(t,x), \quad (t,x)\in\Omega_r, \quad r=\overline{1,k+1}, \qquad \lim_{t\to T-0} v_{k+1}(t,x) = v_1(T,x),$$

$$\mu_r(x) = v_r(t_{r-1},x), \qquad \widetilde{v}_r(t,x) = v_r(t,x) - v_r(t_{r-1},x), \quad r=\overline{1,k+1},$$

будет решением задачи (3.5) – (3.9), и наоборот, если $\big(\mu_r(x), \widetilde{v}_r(t,x)\big),\ r = \overline{1, k+1},$ — решение задачи (3.5) – (3.9), то функция $v(t,x)$, определяемая равенствами

$$v_1(t,x) = \mu_r(x) + \widetilde{v}_r(t,x), \qquad (t,x) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1, k+1},$$

$$v_1(T,x) = \mu_{k+1}(x) + \lim_{t\to T-0} \widetilde{v}_{k+1}(t,x), \quad x \in [0,\omega],$$

будет решением задачи (3.1) – (3.4).

В отличие от задачи (3.1) – (3.4) здесь появились начальные условия (3.6) как значения неизвестной функции на линиях $t = t_{r-1},\ r = \overline{1, k+1}$. При фиксированных $\mu_r(x),\ r = \overline{1, k+1},$ функции $\widetilde{v}_r(t,x),\ r = \overline{1, k+1},$ являются решениями задачи Гурса (3.5) – (3.7) на Ω_r.

Пусть $V_r(t,x) = \dfrac{\partial \widetilde{v}_r(t,x)}{\partial x},\ W_r(t,x) = \dfrac{\partial \widetilde{v}_r(t,x)}{\partial t}$. Из условий (3.6), (3.7) следует, что $V_r(t_{r-1},x) = 0,\ W_r(t,0) = \dot{\psi}_1(t),\ r = \overline{1, k+1}$.

Задача Гурса (3.5) – (3.7) эквивалентна системе трех интегральных уравнений

$$V_r(t,x) = \int\limits_{t_{r-1}}^{t} \Big[A_1(\tau,x)V_r(\tau,x) + B_1(\tau,x)W_r(\tau,x) + C_1(\tau,x)\widetilde{v}_r(\tau,x) + F(\tau,x)\Big]d\tau +$$

$$+ \int\limits_{t_{r-1}}^{t} \Big[A_1(\tau,x)\dot{\mu}_r(x) + C_1(\tau,x)\mu_r(x)\Big]d\tau, \tag{3.11}$$

$$W_r(t,x) = \dot{\psi}_m(t) + \int\limits_0^x \Big[A_1(t,\xi)V_r(t,\xi) + B_1(t,\xi)W_r(t,\xi) + C_1(t,\xi)\widetilde{v}_r(t,\xi) + F(t,\xi)\Big]\,d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^x \Big[A_1(t,\xi)\dot{\mu}_r(\xi) + C_1(t,\xi)\mu_r(\xi)\Big]\,d\xi, \tag{3.12}$$

$$\widetilde{v}_r(t,x) = \psi_m(t) - \psi_m(0) + \int\limits_{t_{r-1}}^{t} W_r(\tau,x)\,d\tau. \tag{3.13}$$

Переходя в правых частях (3.11), (3.12) к пределу при $t \to t_r - 0$, находим $\lim_{t\to t_r-0} V_r(t,x)$, $\lim_{t\to t_r-0} W_r(t,x),\ r = \overline{1, k+1},\ x \in [0,\omega]$. Подставляя их в (3.8), (3.9) соответственно, а затем дифференцируя (3.9) по x, для неизвестных вектор-функций $\mu_r(x),\ r = \overline{1, k+1},$ получаем систему $k+1$ дифференциального уравнения

$$P_{m,0}(x)\dot{\mu}_1(x) + S_{m,0}(x)\left[I + \int\limits_{t_k}^{T} A_1(\tau,x)d\tau\right]\dot{\mu}_{k+1}(x) =$$

$$= -P_{m-1,0}(x)\mu_1(x) - \left[S_{m-1,0}(x) + S_{m,0}(x)\int\limits_{t_k}^{T} C_1(\tau,x)d\tau\right]\mu_{k+1}(x) -$$

$$-P_{m-1,1}(x)W_1(0,x) - S_{m-1,1}(x)\lim_{t\to T-0} W_{k+1}(t,x) -$$

$$-S_{m,0}(x)\int\limits_{t_k}^{T}\Big[A_1(\tau,x)V_{k+1}(\tau,x) + B_1(\tau,x)W_{k+1}(\tau,x) + C_1(\tau,x)\widetilde{v}_{k+1}(\tau,x)\Big]d\tau -$$

$$-S_{m-1,0}(x)\lim_{t\to T-0}\widetilde{v}_{k+1}(t,x) + \Phi(x) - S_{m,0}(x)\int\limits_{t_k}^{T} F(\tau,x)d\tau, \quad x\in[0,\omega], \tag{3.14}$$

$$-\lim_{t\to t_r-0} A_1(t,x)\dot{\mu}_r(x) + A(t_r+0,x)\dot{\mu}_{r+1}(x) =$$

$$= -C_1(t_r+0,x)\mu_{r+1}(x) + \lim_{t\to t_r-0} C_1(t,x)\mu_r(x) - B_1(t_r+0,x)W_{r+1}(t_r+0,x) +$$

$$+\lim_{t\to t_r-0}\Big[A_1(t,x)V_r(t,x) + B_1(t,x)W_r(t,x) + C_1(t,x)\widetilde{v}_r(t,x)\Big] +$$

$$+\dot{\varphi}_r(x) - F(t_r+0,x) + \lim_{t\to t_r-0} F(t,x), \qquad x\in[0,\omega], \quad r=\overline{1,k}, \tag{3.15}$$

где I — единичная матрица размерности $n\times n$.

Запишем систему уравнений (3.14), (3.15) в векторно-матричной форме

$$Q(x,k)\dot{\mu}(x) = -E(x,k)\mu(x) - G(x,k,W,V,\widetilde{v}) - H(x,k), \tag{3.16}$$

где $\big(n(k+1)\times n(k+1)\big)$-матрицы

$$Q(x,k) =$$

$$= \left|\begin{array}{cccccc} P_{m,0}(x) & 0 & 0 & \dots & 0 & S_{m,0}(x)\Big[I + \int\limits_{t_k}^{T} A_1(\tau,x)d\tau\Big] \\ -\lim\limits_{t\to t_1-0} A_1(t,x) & A_1(t_1+0,x) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lim\limits_{t\to t_2-0} A_1(t,x) & A_1(t_2+0,x) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lim\limits_{t\to t_k-0} A_1(t,x) & A_1(t_2+0,x) \end{array}\right|,$$

$$E(x,k) =$$

$$= \begin{vmatrix} P_{m-1,0}(x) & 0 & 0 & \ldots & 0 & \begin{matrix} S_{m-1,0}(x)+S_{m,0}(x)\times \\ \times \int\limits_{t_k}^{T} C_1(\tau,x)d\tau \end{matrix} \\ -\lim\limits_{t\to t_1-0} C_1(t,x) & C_1(t_1+0,x) & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\lim\limits_{t\to t_2-0} C_1(t,x) & C_1(t_2+0,x) & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\lim\limits_{t\to t_k-0} C_1(t,x) & C_1(t_2+0,x) \end{vmatrix},$$

$n(k+1)$-векторы

$$G(x,k,W,V,\widetilde{v}) = \Bigg(P_{m-1,1}(x)W_1(0,x) + S_{m-1,1}(x)\lim_{t\to T-0} W_{k+1}(t,x) +$$

$$+S_{m-1,0}(x)\lim_{t\to T-0}\widetilde{v}_{k+1}(t,x)+$$

$$+S_{m,0}(x)\int\limits_{t_k}^{T}\Big[A_1(\tau,x)V_{k+1}(\tau,x) + B_1(\tau,x)W_{k+1}(\tau,x) + C_1(\tau,x)\widetilde{v}_{k+1}(\tau,x)\Big]d\tau,$$

$$B_1(t_1+0,x)W_2(t_1+0,x) - \lim_{t\to t_1-0}\Big[A_1(t,x)V_1(t,x) - B_1(t,x)W_1(t,x) + C_1(t,x)\widetilde{v}_1(t,x)\Big],$$

$$B_1(t_2+0,x)W_3(t_2+0,x) + \lim_{t\to t_2-0}\Big[A_1(t,x)V_2(t,x) + B_1(t,x)W_2(t,x) + C_1(t,x)\widetilde{v}_2(t,x)\Big],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$B_1(t_k+0,x)W_{k+1}(t_i+0,x) + \lim_{t\to t_k-0}\Big[A_1(t,x)V_k(t,x) + B_1(t,x)W_k(t,x) + C_1(t,x)\widetilde{v}_k(t,x)\Big]\Bigg)',$$

$$H(x,k) = \Bigg(-\Phi(x) + S_{m,0}(x)\int\limits_{t_k}^{T} F(\tau,x)d\tau, -\varphi_1(x) + F(t_1+0,x) - \lim_{t\to t_1-0} F(t,x),$$

$$-\varphi_2(x) + F(t_2+0,x) - \lim_{t\to t_2-0} F(t,x), \ldots, -\varphi_k(x) + F(t_k+0,x) - \lim_{t\to t_k-0} F(t,x)\Bigg)'.$$

Система (3.16) вместе с условием (3.10) является задачей Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, неразрешенной относительно старшей производной.

Если известны функции $\mu_r(x)$ и ее производные $\dot{\mu}_r(x)$, $r=\overline{1,k+1}$, то решая систему интегральных уравнений (3.11) – (3.13), находим функции $\widetilde{v}_r(t,x)$, $V_r(t,x)$, $W_r(t,x)$ и, составляя систему функций $(\mu_r(x)+\widetilde{v}_r(t,x))$, получаем решение задачи (3.1) – (3.4). Если известны функции $\widetilde{v}_r(t,x)$, $V_r(t,x)$, $W_r(t,x)$, то, решая задачу Коши (3.16), (3.10), находим $\mu_r(x)$ и ее производные $\dot{\mu}_r(x)$ и, снова составляя систему функций $(\mu_r(x)+\widetilde{v}_r(t,x))$, получаем решение задачи (3.1) – (3.4).

Здесь неизвестными являются как функции $\mu_r(x)$, так и функции $\widetilde{v}_r(t,x)$. Поэтому применяется итерационный метод и решение задачи (3.5) – (3.9) находится как пределы последовательностей $\left\{\mu_r^{(l)}(x)\right\}$, $\left\{\widetilde{v}_r^{(l)}(t,x)\right\}$, определяемых по следующему алгоритму Y_l.

Шаг 0. Предполагая в правой части (3.16) $V_r(t,x)=0$, $W_r(t,x)=\dot{\psi}_m(t)$, $\widetilde{v}_r(t,x)=$ $=\psi_m(t)-\psi_m(0)$ и считая, что матрица $Q(x,k)$ обратима при всех $x\in[0,\omega]$, из задачи Коши (3.16), (3.10) находим функции $\dot{\mu}_r^{(0)}(x)$ и $\mu_r^{(0)}(x)$, $x\in[0,\omega]$, $r=\overline{1,k+1}$. Из интегральных уравнений (3.11) – (3.13), где $\mu_r(x)=\mu_r^{(0)}(x)$, $\dot{\mu}_r(x)=\dot{\mu}_r^{(0)}(x)$, определяем функции $V_r^{(0)}(t,x)$, $W_r^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{v}_r^{(0)}(t,x)$, $(t,x)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,k+1}$.

Шаг 1. Из задачи Коши (3.16), (3.10), где в правой части системы (3.16) $V_r(t,x)=V_r^{(0)}(t,x)$, $W_r(t,x)=W_r^{(0)}(t,x)$, $\widetilde{v}_r(t,x)=\widetilde{v}_r^{(0)}(t,x)$, в силу обратимости $Q(x,k)$ при $x\in[0,\omega]$ находим функции $\dot{\mu}_r^{(1)}(x)$ и $\mu_r^{(1)}(x)$, $x\in[0,\omega]$, $r=\overline{1,k+1}$. Из интегральных уравнений (3.11) – (3.13), где $\mu_r(x)=\mu_r^{(0)}(x)$, $\dot{\mu}_r(x)=\dot{\mu}_r^{(0)}(x)$, определяем функции $V_r^{(1)}(t,x)$, $W_r^{(1)}(t,x)$, $\widetilde{v}_r^{(1)}(t,x)$, $(t,x)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,k+1}$.

И так далее.

Шаг l. Из задачи Коши (3.16), (3.10), где в правой части системы (3.16) $V_r(t,x)=$ $=V_r^{(l-1)}(t,x)$, $W_r(t,x)=W_r^{(l-1)}(t,x)$, $\widetilde{v}_r(t,x)=\widetilde{v}_r^{(l-1)}(t,x)$, $r=\overline{1,k+1}$, в силу обратимости $Q(x,k)$ при $x\in[0,\omega]$, находим функции $\dot{\mu}_r^{(l)}(x)$ и $\mu_r^{(l)}(x)$, $x\in[0,\omega]$, $r=\overline{1,k+1}$. Из интегральных уравнений (3.11) – (3.13), где $\mu_r(x)=\mu_r^{(l)}(x)$, $\dot{\mu}_r(x)=\dot{\mu}_r^{(l)}(x)$, определяем функции $V_r^{(l)}(t,x)$, $W_r^{(l)}(t,x)$, $\widetilde{v}_r^{(l)}(t,x)$, $(t,x)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,k+1}$, $l=1,2,\ldots$.

Применяемый метод делит на две части процесс нахождения неизвестных функций:

1) нахождение введенных функциональных параметров $\mu_r(x)$ из задачи Коши (3.16), (3.10);

2) нахождение неизвестной функции $\widetilde{v}_r(t,x)$ из задачи Гурса (3.5) – (3.7).

Пусть

$$\alpha_1(x) = \max_{r=\overline{1,k+1}} \sup_{t\in[t_{r-1},t_r)} \|A_1(t,x)\|, \qquad h = \max_{r=\overline{1,k+1}} (t_r - t_{r-1}),$$

$$\Phi_r(x) = \max\Big(\|\varphi_r(x)\|, \|\dot{\varphi}_r(x)\|\Big), \quad r=\overline{1,k},$$

$$\|v_1(\cdot,x)\|_1 = \max_{r=\overline{1,k+1}} \sup_{t\in[t_{r-1},t_r)} \|v_1(t,x)\|,$$

$$\Psi_l = \max\Big(\max_{t\in[0,T]}\|\psi_l(t)\|, \max_{t\in[0,T]}\|\dot\psi_l(t)\|\Big), \quad l=\overline{1,m}.$$

Условия реализуемости и сходимости предложенного алгоритма, а также существования и единственности решения задачи (3.5)–(3.9) устанавливает следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть* $\big(n(k+1)\times n(k+1)\big)$*-матрица* $Q(x,k)$ *обратима для всех* $x\in[0,\omega]$ *и имеют место неравенства*:

a) $\big\|[Q(x,k)]^{-1}\big\|\le\gamma(x,k)$, $\gamma(x,k)$ — *положительная непрерывная по* $x\in[0,\omega]$ *функция*;

b) $q(x,k)=\gamma(x,k)\max\Big((T-t_k)\|S_{m,0}(x)\|,1\Big)\alpha_1(x)\Big(e^{\alpha_1(x)h}-1-\alpha_1(x)h\Big)\le\chi<1$, *где* χ — *постоянная.*

Тогда задача с параметрами и импульсными воздействиями (3.5)–(3.9) *имеет единственное решение — пару* $\big(\mu^*(x),\widetilde v^*([t],x)\big)$, *элементы которой являются пределами последовательных приближений* $\Big\{\mu_r^{(l)}(x)\Big\}$, $\Big\{\widetilde v_r^{(l)}(t,x)\Big\}$, $r=\overline{1,k+1}$, *определяемых по алгоритму* Y_l.

Доказательство теоремы 3.1 проводится аналогично доказательству теоремы 1 из [24] по схеме вышеприведенного алгоритма.

Таким образом, теорема 3.1 дает достаточные условия существования единственного решения задачи (3.5)–(3.9) в терминах исходных данных: коэффициентной матрицы $A_1(t,x)$, граничных матриц $P_{m,0}(x)$, $S_{m,0}(x)$ и точек импульсного воздействия t_r, $r=\overline{1,k}$.

Из эквивалентности задач (3.1)–(3.4) и (3.5)–(3.9) следует такая теорема.

Теорема 3.2. *Пусть* $\big(n(k+1)\times n(k+1)\big)$*-матрица* $Q(x,k)$ *обратима для всех* $x\in[0,\omega]$ *и имеют место неравенства* a), b) *из теоремы* 3.1.

Тогда нелокальная задача для системы гиперболических уравнений второго порядка с импульсными воздействиями (3.1)–(3.4) *имеет единственное решение* $v_1^*(t,x)$, *для которого справедлива оценка*

$$\max\left(\|v_1^*(\cdot,x)\|_1, \left\|\frac{\partial v_1^*(\cdot,x)}{\partial x}\right\|_1, \left\|\frac{\partial v_1^*(\cdot,x)}{\partial t}\right\|_1\right)\le$$

$$\le K\max\Big(\|F(\cdot,x)\|_1, \|\Phi(x)\|, \max_{r=\overline{1,k}}\Phi_r(x), \Psi_m\Big), \tag{3.17}$$

где K — *положительная постоянная, не зависящая от* $F(t,x)$, $\Phi(x)$, $\varphi_r(x)$, $r=\overline{1,k}$, $\psi_m(t)$ *и вычисляемая через коэффициенты системы и граничные матрицы.*

Доказательство теоремы 3.2 проводится аналогично доказательству теоремы 2 из [25].

4. Условия сходимости алгоритма $\mathcal{X}_p$ и основные утверждения. Условия сходимости алгоритма $\mathcal{X}_p$, которые одновременно обеспечивают существование единственного решения задачи (2.1)–(2.5), дает следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть* $\big(n(k+1)\times n(k+1)\big)$*-матрица* $Q(x,k)$ *обратима для всех* $x\in[0,\omega]$ *и справедливы неравенства* a), b) *из теоремы* 3.1.

Тогда нелокальная задача с импульсными воздействиями и распределенными параметрами (2.1)–(2.5) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда по теореме 3.2 нелокальная задача с импульсными воздействиями (3.1)–(3.4) имеет единственное решение. Следуя алгоритму $\mathcal{X}_p$, будем находить решение задачи (2.1)–(2.4). Из нулевого шага алгоритма находим решение задачи

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} = A_1(t,x)\frac{\partial v_1}{\partial x} + B_1(t,x)\frac{\partial v_1}{\partial t} + C_1(t,x)v_1 + f(t,x) +$$

$$+\sum_{s=2}^{m-1}\Big\{A_s(t,x)\psi_{s-1}(t) + B_s(t,x)\dot{\psi}_{s-1}(t)\Big\} + C_2(t,x)\psi_{m-1}(t), \tag{4.1}$$

$$P_{m,0}(x)\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial x}\Big|_{t=0} + P_{m-1,1}(x)\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=0} + P_{m-1,0}(x)v_1(t,x)\Big|_{t=0} +$$

$$+S_{m,0}(x)\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial x}\Big|_{t=T} + S_{m-1,1}(x)\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial t}\Big|_{t=T} + S_{m-1,0}(x)v_1(t,x)\Big|_{t=T} =$$

$$= \varphi_0(x) - \sum_{i=2}^{m}\Big\{P_{m-i,0}(x)\psi_{i-1}(0) + S_{m-i,0}(x)\psi_{i-1}(T) +$$

$$+P_{m-i,1}(x)\dot{\psi}_{i-1}(0) + S_{m-i,1}(x)\dot{\psi}_{i-1}(T)\Big\}, \quad x \in [0,\omega], \tag{4.2}$$

$$\lim_{t\to t_r+0}\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial t} - \lim_{t\to t_r-0}\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial t} = \varphi_i(x), \qquad x\in[0,\omega], \quad i=\overline{1,k}, \tag{4.3}$$

$$v_1(t,0) = \psi_m(t), \quad t\in[0,T]. \tag{4.4}$$

По предположению задача (4.1) – (4.4) имеет единственное решение $v_1^{(0)}(t,x)$ и

$$\max\left(\|v_1^{(0)}(\cdot,x)\|_1, \left\|\frac{\partial v_1^{(0)}(\cdot,x)}{\partial x}\right\|_1, \left\|\frac{\partial v_1^{(0)}(\cdot,x)}{\partial t}\right\|_1\right) \le$$

$$\le K(1+K_1)\max\left(\|f(\cdot,x)\|_1, \|\varphi_0(x)\|, \max_{r=\overline{1,k}}\Phi_r(x), \max_{l=\overline{1,m}}\Psi_l\right), \tag{4.5}$$

где

$$K_1 = \max\left[\sum_{s=2}^{m-1}\Big\{\|A_s\|_1 + \|B_s\|_1\Big\} + \|C_2\|_1,\right.$$

$$\left.\max_{x\in[0,\omega]}\sum_{i=2}^{m}\Big\{\|P_{m-i,0}(x)\| + \|S_{m-i,0}(x)\| + \|P_{m-i,1}(x)\| + \|S_{m-i,1}(x)\|\Big\}\right].$$

Тогда из интегральных соотношений (2.5) получаем

$$v_2^{(0)}(t,x) = \psi_{m-1}(t) + \int_0^x v_1^{(0)}(t,\xi_1)\,d\xi_1, \qquad \frac{\partial v_2^{(0)}(t,x)}{\partial t} = \dot{\psi}_{m-1}(t) + \int_0^x \frac{\partial v_1^{(0)}(t,\xi_1)}{\partial t}\,d\xi_1$$

при $s=1$,

$$v_3^{(0)}(t,x) = \psi_{m-2}(t) + \int\limits_0^x v_2^{(0)}(t,\xi_1)\,d\xi_1 =$$

$$= \psi_{m-2}(t) + \psi_{m-1}(t)x + \int\limits_0^x \int\limits_0^{\xi_1} v_1^{(0)}(t,\xi_2)\,d\xi_2\,d\xi_1 =$$

$$= \psi_{m-2}(t) + \psi_{m-1}(t)x + \int\limits_0^x (x-\xi)v_1^{(0)}(t,\xi)\,d\xi,$$

$$\frac{\partial v_3^{(0)}(t,x)}{\partial t} = \dot\psi_{m-2}(t) + \int\limits_0^x \frac{\partial v_2^{(0)}(t,\xi_1)}{\partial t}\,d\xi_1 =$$

$$= \dot\psi_{m-2}(t) + \dot\psi_{m-1}(t)x + \int\limits_0^x \int\limits_0^{\xi_1} \frac{\partial v_1^{(0)}(t,\xi_2)}{\partial t}\,d\xi_2\,d\xi_1 =$$

$$= \dot\psi_{m-2}(t) + \dot\psi_{m-1}(t)x + \int\limits_0^x (x-\xi)\frac{\partial v_1^{(0)}(t,\xi)}{\partial t}\,d\xi$$

при $s = 2$, далее

$$v_{s+1}^{(0)}(t,x) = \psi_{m-s}(t) + \int\limits_0^x v_s^{(0)}(t,\xi_1)\,d\xi_1 =$$

$$= \psi_{m-s}(t) + \sum_{i=1}^{s-1} \psi_{m-s+i}(t)\frac{x^i}{i!} + \int\limits_0^x \int\limits_0^{\xi_1} \int\limits_0^{\xi_2} \ldots \int\limits_0^{\xi_{s-1}} v_1^{(0)}(t,\xi_s)\,d\xi_s\,d\xi_{s-1}\ldots\,d\xi_2\,d\xi_1 =$$

$$= \psi_{m-s}(t) + \sum_{i=1}^{s-1} \psi_{m-s+i}(t)\frac{x^i}{i!} + \int\limits_0^x \frac{(x-\xi)^{s-1}}{(s-1)!} v_1^{(0)}(t,\xi)\,d\xi,$$

$$\frac{\partial v_{s+1}^{(0)}(t,x)}{\partial t} = \dot\psi_{m-s}(t) + \int\limits_0^x \frac{\partial v_s^{(0)}(t,\xi_1)}{\partial t}\,d\xi_1 =$$

$$= \dot{\psi}_{m-s}(t) + \sum_{i=1}^{s-1} \dot{\psi}_{m-s+i}(t)\frac{x^i}{i!} + \int\limits_0^x \int\limits_0^{\xi_1} \int\limits_0^{\xi_2} \ldots \int\limits_0^{\xi_{s-1}} \frac{\partial v_1^{(0)}(t,\xi_s)}{\partial t}\, d\xi_s\, d\xi_{s-1} \ldots d\xi_2\, d\xi_1 =$$

$$= \dot{\psi}_{m-s}(t) + \sum_{i=1}^{s-1} \dot{\psi}_{m-s+i}(t)\frac{x^i}{i!} + \int\limits_0^x \frac{(x-\xi)^{s-1}}{(s-1)!}\frac{\partial v_1^{(0)}(t,\xi)}{\partial t}\, d\xi$$

при $s = \overline{3, m-1}$ и отсюда

$$v_m^{(0)}(t,x) = \psi_1(t) + \sum_{i=1}^{m-2} \psi_{1+i}(t)\frac{x^i}{i!} + \int\limits_0^x \frac{(x-\xi)^{m-2}}{(m-2)!} v_1^{(0)}(t,\xi)\, d\xi,$$

$$\frac{\partial v_m^{(0)}(t,x)}{\partial t} = \dot{\psi}_1(t) + \sum_{i=1}^{m-2} \dot{\psi}_{1+i}(t)\frac{x^i}{i!} + \int\limits_0^x \frac{(x-\xi)^{m-2}}{(m-2)!}\frac{\partial v_1^{(0)}(t,\xi)}{\partial t}\, d\xi$$

при $s = m-1$.

Пусть известны $v_{s+1}^{(p-1)}(t,x),\ s = \overline{1, m-1}$. Тогда функцию $v_1^{(p)}(t,x)$ находим, решая задачу (2.1) – (2.4), где $v_{s+1}(t,x) = v_{s+1}^{(p-1)}(t,x),\ s = \overline{1, m-1},\ p = 1, 2, \ldots .$

При найденном $v_1^{(p}(t,x)$ следующие приближения по $v_{s+1}(t,x),\ s = \overline{1, m-1}$, определим из соотношений (2.5):

$$v_2^{(p)}(t,x) = \psi_{m-1}(t) + \int\limits_0^x v_1^{(p)}(t,\xi_1)\, d\xi_1, \qquad \frac{\partial v_2^{(p)}(t,x)}{\partial t} = \dot{\psi}_{m-1}(t) + \int\limits_0^x \frac{\partial v_1^{(p)}(t,\xi_1)}{\partial t}\, d\xi_1$$

при $s = 1$ и

$$v_{s+1}^{(p)}(t,x) = \psi_{m-s}(t) + \sum_{i=1}^{s-1} \psi_{m-s+i}(t)\frac{x^i}{i!} + \int\limits_0^x \frac{(x-\xi)^{s-1}}{(s-1)!} v_1^{(p)}(t,\xi)\, d\xi,$$

$$\frac{\partial v_{s+1}^{(p)}(t,x)}{\partial t} = \dot{\psi}_{m-s}(t) + \sum_{i=1}^{s-1} \dot{\psi}_{m-s+i}(t)\frac{x^i}{i!} + \int\limits_0^x \frac{(x-\xi)^{s-1}}{(s-1)!}\frac{\partial v_1^{(p)}(t,\xi)}{\partial t}\, d\xi$$

при $s = \overline{2, m-1}$. Составим разности

$$\Delta v_1^{(p)}(t,x) = v_1^{(p)}(t,x) - v_1^{(p-1)}(t,x),$$

$$\Delta v_2^{(p)}(t,x) = v_2^{(p)}(t,x) - v_2^{(p-1)}(t,x), \ldots, \Delta v_m^{(p)}(t,x) = v_m^{(p)}(t,x) - v_m^{(p-1)}(t,x)$$

и для них, использовав однозначную разрешимость задачи (3.1) – (3.4), установим оценки

$$\max\left(\left\|\Delta v_1^{(p+1)}(\cdot,x)\right\|_1, \left\|\frac{\partial \Delta v_1^{(p+1)}(\cdot,x)}{\partial x}\right\|_1, \left\|\frac{\partial \Delta v_1^{(p+1)}(\cdot,x)}{\partial t}\right\|_1 \right) \le$$

$$\leq K(1+K_1)\max\left(\max_{s=\overline{2,m}}\left\|\Delta v_s^{(p)}(\cdot,x)\right\|_1,\ \max_{s=\overline{2,m}}\left\|\frac{\partial\Delta v_s^{(p)}(\cdot,x)}{\partial t}\right\|_1\right), \tag{4.6}$$

$$\max\left(\left\|\Delta v_2^{(p)}(\cdot,x)\right\|_1,\ \left\|\frac{\partial\Delta v_2^{(p)}(\cdot,x)}{\partial t}\right\|_1\right)\leq$$

$$\leq\int\limits_0^x\max\left(\left\|\Delta v_1^{(p)}(\cdot,\xi)\right\|_1,\ \left\|\frac{\partial\Delta v_1^{(p)}(\cdot,\xi)}{\partial x}\right\|_1,\ \left\|\frac{\partial\Delta v_1^{(p)}(\cdot,\xi)}{\partial t}\right\|_1\right)d\xi, \tag{4.7}$$

$$\max\left(\left\|\Delta v_s^{(p)}(\cdot,x)\right\|_1,\ \left\|\frac{\partial\Delta v_s^{(p)}(\cdot,x)}{\partial t}\right\|_1\right)\leq$$

$$\leq\int\limits_0^x\frac{(x-\xi)^{s-2}}{(s-2)!}\max\left(\left\|\Delta v_1^{(p)}(\cdot,\xi)\right\|_1,\ \left\|\frac{\partial\Delta v_1^{(p)}(\cdot,\xi)}{\partial x}\right\|_1,\ \left\|\frac{\partial\Delta v_1^{(p)}(\cdot,\xi)}{\partial t}\right\|_1\right)d\xi, \tag{4.8}$$

$$s=\overline{3,m},\quad p=1,2,\ldots.$$

Отсюда следует основное неравенство

$$\max\left(\left\|\Delta v_1^{(p+1)}(\cdot,x)\right\|_1,\ \left\|\frac{\partial\Delta v_1^{(p+1)}(\cdot,x)}{\partial x}\right\|_1,\ \left\|\frac{\partial\Delta v_1^{(p+1)}(\cdot,x)}{\partial t}\right\|_1\right)\leq$$

$$\leq K(1+K_1)\int\limits_0^x\max\left(1,\ \max_{s=\overline{3,m}}\frac{(x-\xi)^{s-2}}{(s-2)!}\right)\times$$

$$\times\max\left(\left\|\Delta v_1^{(p)}(\cdot,\xi)\right\|_1,\ \left\|\frac{\partial\Delta v_1^{(p)}(\cdot,\xi)}{\partial x}\right\|_1,\ \left\|\frac{\partial\Delta v_1^{(p)}(\cdot,\xi)}{\partial t}\right\|_1\right)d\xi, \tag{4.9}$$

где $x\in[0,\omega]$.

Из (4.9) вытекает равномерная сходимость последовательностей $\{v_1^{(p)}(t,x)\}$, $\left\{\dfrac{\partial v_1^{(p)}(t,x)}{\partial t}\right\}$ в пространстве $PC(\Omega,\{t_r\}_{r=1}^k,R^n)$ при $p\to\infty$. Тогда равномерная сходимость на Ω последовательностей $\{v_s^{(p)}(t,x)\}$, $\left\{\dfrac{\partial v_s^{(p)}(t,x)}{\partial t}\right\}$, $s=\overline{2,m}$, следует из (4.7) и (4.8). При этом предельные функции $v_1^*(t,x)\in PC(\Omega,\{t_r\}_{r=1}^k,R^n)$, $\dfrac{\partial v_1^*(t,x)}{\partial t}\in PC(\Omega,\{t_r\}_{r=1}^k,R^n)$, $v_s^*(t,x)\in$ $\in PC(\Omega,\{t_r\}_{r=1}^k,R^n)$, $\dfrac{\partial v_s^*(t,x)}{\partial t}\in PC(\Omega,\{t_r\}_{r=1}^k,R^n)$, $s=\overline{2,m}$, и система функций $\{v_1^*(t,x),$ $v_2^*(t,x),\ldots,v_m^*(t,x)\}$ является решением задачи (2.1)–(2.5).

Теорема 4.1 доказана.

Из теоремы 4.1 и эквивалентности задач (1.1)–(1.4) и (2.1)–(2.5) следуют такие утверждения.

Теорема 4.2. *Пусть* $\big(n(k+1)\times n(k+1)\big)$*-матрица* $Q(x,k)$ *обратима для всех* $x\in[0,\omega]$ *и справедливы неравенства* a), b) *из теоремы* 3.1.

Тогда нелокальная задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка с импульсными воздействиями (1.1)–(1.4) *имеет единственное решение.*

Основным условием однозначной разрешимости исследуемой задачи является обратимость матрицы $Q(x,k)$ для всех $x\in[0,\omega]$. Поскольку $\big(n(k+1)\times n(k+1)\big)$-матрица $Q(x,k)$ имеет специальную блочно-ленточную структуру, то справедливы следующие леммы.

Лемма 4.1. *Пусть матрицы* $A_1(t_r+0,x)$ (*или* $\lim_{t\to t_r-0}A_1(t,x)$), $r=\overline{1,k}$, *обратимы для всех* $x\in[0,\omega]$. $\big(n(k+1)\times n(k+1)\big)$*-Матрица* $Q(x,k)$ *при* $x\in[0,\omega]$ *обратима тогда и только тогда, когда обратима* $(n\times n)$*-матрица*

$$M(x,k)=P_{m,0}(x)+S_{m,0}(x)\left[I+\int\limits_{t_k}^{T}A_1(\tau,x)]d\tau\right]\prod_{s=k}^{1}\big[A_1(t_s+0,x)\big]^{-1}\lim_{t\to t_s-0}A_1(t,x)$$

$$\left(\text{\textit{или}}\quad L(x,k)=P_{m,0}(x)\prod_{s=1}^{k}\Big[\lim_{t\to t_s-0}A_1(t,x)\Big]^{-1}A_1(t_s+0,x)+\right.$$

$$\left.+\,S_{m,0}(x)\left[I+\int\limits_{t_k}^{T}A_1(\tau,x)]d\tau\right]\right).$$

Лемма 4.2. *Если матрица* $M(x,k)$ (*или* $L(x,k)$) *обратима для всех* $x\in[0,\omega]$, *то* $[Q(x,k)]^{-1}=\{g_{i,j}(x)\}$, $i,j=\overline{1,k+1}$, *где*

$$g_{1,1}(x)=M^{-1}(x,k),$$

$$g_{1,l}(x)=-M^{-1}(x,k)S_{m,0}(x)\left[I+\int\limits_{t_k}^{T}A_1(\tau,x)d\tau\right]\times$$

$$\times\prod_{s=k}^{l}\big[A_1(t_s+0,x)\big]^{-1}\lim_{t\to t_s-0}A_1(t,x)[A_1(t_{l-1}+0,x)]^{-1},\quad 1<l\le k,$$

$$g_{1,k+1}(x)=-M^{-1}(x,k)S_{m,0}(x)\left[I+\int\limits_{t_k}^{T}A_1(\tau,x)]d\tau\right][A_1(t_k+0,x)]^{-1},$$

$$g_{r,l}(x)=\big[A_1(t_{r-1}+0,x)\big]^{-1}\lim_{t\to t_{r-1}-0}A_1(t,x)g_{r-1,l}(x),\quad l\ne r,$$

$$g_{r,r}(x) = \big[A_1(t_{r-1}+0,x)\big]^{-1}\times$$

$$\times\lim_{t\to t_{r-1}-0} A_1(t,x)g_{r-1,r}(x) + \big[A_1(t_{r-1}+0,x)\big]^{-1}, \quad r = 2,3,\ldots,k+1,$$

$$\Bigg(\textit{или} \quad g_{k+1,1}(x) = L^{-1}(x,k),$$

$$g_{k+1,2}(x) = L^{-1}(x,k)P_{m,0}(x)\Big[\lim_{t\to t_1-0} A_1(t,x)\Big]^{-1},$$

$$g_{k+1,l}(x) = L^{-1}(x,k)P_{m,0}(x)\prod_{s=1}^{l-2}\Big[\lim_{t\to t_s-0} A_1(t,x)\Big]^{-1}\times$$

$$\times A_1(t_s+0,x)\Big[\lim_{t\to t_{l-1}-0} A_1(t,x)\Big]^{-1}, \quad 2 < l \le k+1,$$

$$g_{r,l}(x) = \Big[\lim_{t\to t_r-0} A_1(t,x)\Big]^{-1} A_1(t_r+0,x)g_{r+1,l}(x), \quad l \ne r+1,$$

$$g_{r,r+1}(x) = \Big[\lim_{t\to t_r-0} A_1(t,x)\Big]^{-1}\times$$

$$\times A_1(t_r+0,x)g_{r+1,r+1}(x) - \Big[\lim_{t\to t_r-0} A_1(t,x)\Big]^{-1}, \quad r = 1,2,\ldots,k\Bigg).$$

Из леммы 4.1 следует, что достаточно проверить обратимость матриц $A_1(t_r+0,x)$ $\big($или $\lim_{t\to t_r-0} A_1(t,x)\big)$, $r=\overline{1,k}$, размерности которых совпадают с размерностью исходной системы. Если матрицы $A_1(t_r+0,x)$ $\big($или $\lim_{t\to t_r-0} A_1(t,x)\big)$, $r=\overline{1,k}$, обратимы, то можно найти их обратные и получить оценку. Как видно из рекуррентных формул леммы 4.2, величина $\gamma(x,k)$ вычисляется через обратные матриц $A_1(t_r+0,x)$, $r=\overline{1,k}$, нормы матриц $\lim_{t\to t_r-0} A_1(t,x)$, $r=\overline{1,k}$, $P_{m,0}(x)$, $S_{m,0}(x)$, $\left[I+\int_{t_k}^{T} A_1(\tau,x)d\tau\right]$ $\Bigg($или через обратные матриц $\lim_{t\to t_r-0} A_1(t,x)$, $r=\overline{1,k}$, и нормы матриц $A_1(t_r+0,x)$, $r=\overline{1,k}$, $P_{m,0}(x)$, $S_{m,0}(x)$, $\left[I+\int_{t_k}^{T} A_1(\tau,x)d\tau\right]\Bigg)$.

Если матрица $A_1(t,x)$ является непрерывной на Ω, достаточно предположить обратимость матрицы $A_1(t,x)$ на линиях $t=t_r$, $r=\overline{1,k}$, для всех $x\in[0,\omega]$. В этом случае матрицы $M(x,k)$ и $L(x,k)$ будут иметь один и тот же вид

$$M(x,k) = L(x,k) = P_{m,0}(x) + S_{m,0}(x)\left[I + \int\limits_{t_k}^{T} A_1(\tau,x)]d\tau\right].$$

Тогда рекуррентные формулы в лемме 4.2 позволят нам определить блочные элементы матрицы $\big[Q(x,k)\big]^{-1}$ сверху вниз или снизу вверх по строкам.

Таким образом, теорема 4.2 дает достаточные условия существования единственного решения задачи (1.1)–(1.4) в терминах исходных данных: коэффициентной матрицы $A_1(t,x)$, граничных матриц $S_{m,0}(x)$, $P_{m,0}(x)$ и количества линий возможных разрывов $t=t_r$, $r=\overline{1,k}$.

Литература

1. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
2. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 415 с.
3. *Kiguradze T., Lakshmikantham V.* On Dirichlet problem in a characteristic restangle for higher order linear hyperbolic equations // Nonlinear Anal. – 2002. – **50**, № 8. – P. 1153 – 1178.
4. *Kiguradze T. I., Kusano T.* Well-posedness of initial-boundary value problems for higher-order linear hyperbolic equations with two independent variables // Different. Equat. – 2003. – **39**, № 4. – P. 553 – 563.
5. *Kiguradze T., Kusano T.* On ill-posed initial-boundary value problems for higher order linear hyperbolic equations with two independent variables // Different. Equat. – 2003. – **39**, № 10. – P. 1379 – 1394.
6. *Kiguradze I., Kiguradze T.* On solvability of boundary value problems for higher order nonlinear hyperbolic equations // Nonlinear Anal. – 2008. – **69**. – P. 1914 – 1933.
7. *Kiguradze T.* The Valle-Poussin problem for higher order nonlinear hyperbolic equations // Comput. and Math. Appl. – 2010. – **59**. – P. 994 – 1002.
8. *Kiguradze I. T., Kiguradze T. I.* Analog of the first Fredholm theorem for higher-order nonlinear differential equations // Different. Equat. – 2017. – **53**, № 8. – P. 996 – 1004.
9. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 200 с.
10. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями. – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с.
11. *Rogovchenko S. P.* Periodic solutions for hyperbolic impulsive systems (in Russian). – Kiev, 1988. – 20 p. – (Preprint / Ukr. Acad. Sci. Inst. Math.; № 88.3).
12. *Akhmetov M. U., Perestyuk N. A.* Stability of periodic solutions of differential equations with impulse effect on surfaces // Ukr. Math. J. – 1989. – **41**, № 12. – P. 1596 – 1601.
13. *Bainov D. D., Simeonov P. S.* Systems with impulse effect: stability, theory and applications. – New York etc.: Halsted Press, 1989. – 345 p.
14. *Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of impulsive differential equations. – Singapore: World Sci., 1989. – 434 p.
15. *Bainov D. D., Kamont Z., Minchev E.* Monotone iterative methods for impulsive hyperbolic differential functional equations // J. Comput. and Appl. Math. – 1996. – **70**. – P. 329 – 347.
16. *Perestyuk N. A., Tkach A. B.* Periodic solutions for weakly nonlinear partial system with pulse influense // Ukr. Math. J. – 1997. – **49**, № 4. – P. 601 – 605.
17. *Bainov D. D., Minchev E., Myshkis A.* Periodic boundary value problems for impulsive hyperbolic systems // Commun. Appl. Anal. – 1997. – **1**, № 4. – P. 1 – 14.
18. *Liu X., Zhang S. H.* A cell population model described by impulsive PDE-s, existence and numerical approximation // Comput. and Math. Appl. – 1998. – **36**, № 8. – P. 1 – 11.
19. *Tkach A. B.* Numerical-analytic method of finding periodic solutions for systems of partial differential equations with pulse influence // Nonlinear Oscillations. – 2001. – **4**, № 2. – P. 278 – 288.
20. *Tkach A. B.* Numerical-analytic method of finding periodic solutions for systems of partial integro-differential equations with pulse influence // Nonlinear Oscillations. – 2005. – **8**, № 1. – P. 123 – 131.
21. *Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S.* Impulsive differential equations and inclusions. – New York; Cairo: Hindawi Publ. Corp., 2006. – 366 p.
22. *Akhmet M. U.* Principles of discontinuous dynamical systems. – New York: Springer, 2010.

23. *Akhmet M., Fen M. O.* Replication of chaos in neural networks, economics and physics // Nonlinear Phys. Sci. – Beijing: Higher Education Press, 2016.
24. *Асанова А. Т.* О нелокальной краевой задаче для систем гиперболических уравнений с импульсными воздействиями // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 3. – С. 315 – 328.
25. *Асанова А. Т.* О корректной разрешимости нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений с импульсными воздействиями // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 3. – С. 291 – 303.
26. *Assanova A. T.* On the solvability of non-local boundary value problem for the systems of impulsive hyperbolic equations with mixed derivatives // Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity. – 2016. – **5**, № 2. – P. 153 – 165.
27. *Ахмедов К. Т., Ахиев С. С.* Необходимое условие оптимальности для некоторых задач теории оптимального управления // Докл. АН АзССР. – 1972. – **28**, № 5. – С. 12 – 15.
28. *Новоженов М. М., Сумин В. И., Сумин М. И.* Методы оптимального управления системами математической физики. – Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1986.
29. *Денисов А. М., Лукшин А. В.* Математические модели однокомпонентной динамики сорбции. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.
30. *Бокмельдер Е. П., Дыхта В. А., Москаленко А. И., Овсянникова Н. А.* Условия экстремума и конструктивные методы решения в задачах оптимизации гиперболических уравнений. – Новосибирск: Наука, 1993.
31. *Васильев О. В.* Лекции по методам оптимизации. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1994.
32. *Васильев Ф. П.* Методы оптимизации. – М.: Изд-во Факториал Пресс, 2002. – 824 с.
33. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* Однозначная разрешимость краевой задачи с данными на характеристиках для систем гиперболических уравнений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2002. – **42**, № 11. – С. 1673 – 1685.
34. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* Однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 2003. – **39**, № 10. – С. 1343 – 1354.
35. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* Корректная разрешимость нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 2005. – **41**, № 3. – С. 337 – 346.
36. *Джумабаев Д. С., Асанова А. Т.* Признаки корректной разрешимости линейной нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Доп. НАН України. – 2010. – № 4. – С. 7 – 11.
37. *Asanova A. T., Dzhumabaev D. S.* Well-posedness of nonlocal boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // J. Math. Anal. and Appl. – 2013. – **402**, № 1. – P. 167 – 178.

Получено 13.02.19