DOI: 10.37863/umzh.v74i5.7137

УДК 517.555

А. О. Куриляк, О. Б. Скасків (Львів. нац. ун-т ім. І. Франка)

НЕРІВНІСТЬ ТИПУ ВІМАНА В КРАТНО-КРУГОВИХ ОБЛАСТЯХ: ЕФЕКТ ЛЕВІ І ВИНЯТКОВІ МНОЖИНИ

For the classical Wiman inequality $M_f(r) \le \mu_f(r)(\ln\mu_f(r))^{1/2+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, with entire functions $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, which holds outside a set of finite logarithmic measure, P. Lévy established (1929) that under some additional regularity conditions on $\ln M_f(r)$ the constant $1/2$ can be replaced by $1/4$ almost surely in some sense; here $M_f(r) = \max\{|f(z)|: |z| = r\}$, $\mu_f(r) = \max\{|a_n|r^n : n \ge 04\}$, $r > 0$. In this paper, we prove that the result established by P. Lévy holds also in the case of Wiman-type inequality for analytic functions in any multiple-circular domain, which gives an affirmative answer to the question posed by A. A. Goldberg and M. M. Sheremeta (1996). Earlier, the answer to their question was obtained for Fenton's inequality in the case of entire functions of two variables (Mat. Stud., **23**, № 2 (2005)), entire functions of several variables (Ufa Math. J., **6**, № 2 (2014)), and analytic functions of several variables in a polydisc (Eur. J. Math., **6**, № 1 (2020)).

Для цілих функцій вигляду $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, П. Леві (1929 р.) встановив, що у класичній нерівності Вімана $M_f(r) \le \mu_f(r)(\ln\mu_f(r))^{1/2+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, що виконується зовні множини скінченної логарифмічної міри, за деяких додаткових припущень регулярності поводження $\ln M_f(r)$ показник $1/2$ майже напевно у деякому ймовірнісному сенсі можна замінити на $1/4$. Тут $M_f(r) = \max\{|f(z)|: |z| = r\}$, $\mu_f(r) = \max\{|a_n|r^n : n \ge 0\}$, $r > 0$. У даній статті доведено, що ефект, відкритий П. Леві, справджується також у випадку нерівності типу Вімана для аналітичних функцій у довільній кратно-круговій області. Це дає позитивну відповідь на питання проф. А. А. Гольдберга і проф. М. М. Шеремети (1996 р.) щодо можливості такого ефекту у цьому випадку. Раніше позитивну відповідь на це питання було отримано у випадку нерівності Фентона для цілих функцій двох змінних (Mat. Stud., **23**, № 2 (2005)), для цілих функцій багатьох змінних (Ufa Math. J., **6**, № 2 (2014)), для аналітичних функцій багатьох змінних у полікрузі (Eur. J. Math., **6**, № 1 (2020)).

1. Вступ. Для цілої функції вигляду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \tag{1}$$

позначимо $M_f(r) = \max\{|f(z)|: |z| = r\}$, $\mu_f(r) = \max\{|a_n|r^n : n \ge 0\}$, $r > 0$. Відомо (див., наприклад, [1–6]), що за класичною теоремою А. Вімана і Ж. Валірона для кожної відмінної від тотожно сталої функції вигляду (1) і для кожного $\varepsilon > 0$ існує множина $E = E_f(\varepsilon) \subset [1; +\infty)$ скінченної логарифмічної міри $\Big($тобто $\int_E d\ln r < +\infty\Big)$ така, що *нерівність Вімана*

$$M_f(r) \le \mu_f(r) \ln^{1/2+\delta} \mu_f(r)$$

виконується для $r \in (1, +\infty) \setminus E_f(\varepsilon)$. Зауважимо, що у [7] П. Леві довів, що для кожної цілої функції f за деяких додаткових умов на регулярність поводження $\ln M_f(r)$ у нерівності Вімана сталу $1/2$ можна замінити на $1/4$ у деякому ймовірнісному сенсі майже напевно (*ефект Леві*).

Щодо твердження про нерівність Вімана проф. Й. В. Островський у 1995 р. сформулював таке питання: *який найкращий опис величини виняткової множини* E? Це ж питання було розглянуто в ряді статей (див., наприклад, [4, 5, 8–15]) по відношенню до багатьох інших співвідношень, що розглядаються в теорії Вімана–Валірона. У статтях [4–6] доведено деякі аналоги нерівності Вімана зовні виняткової множини E скінченної h-логарифмічної міри.

Зокрема, у статті [6] доведено, що для кожної відмінної від тотожно сталої аналітичної функції у крузі $\mathbb{D}_R = \{z\colon |z| < R\}$, $0 < R \le +\infty$, вигляду (1) і для кожної додатної неспадної на $(0,R)$ функції $h(r)$ такої, що $h(r) \ge 2$, $r \in (0,R)$, нерівність

$$M_f(r) \le h(r)\mu_f(r)\big(\ln h(r)\ln(h(r)\mu_f(r))\big)^{1/2+\delta} \tag{2}$$

виконується для $r \in (r_0, R)$ зовні виняткової множини $E = E_f(\varepsilon, h)$ скінченної h-логарифмічної міри, тобто $\int_{E\cap(r_0,R)} h(r)d\ln r < +\infty$. І навіть більше, у статті [5] було встановлено, що оцінка

$$\int\limits_E \frac{\ln^{1/2}\mu_f(r)}{r}dr < +\infty$$

виняткової множини E у нерівності Вімана для цілих функцій виконується майже напевно у деякому ймовірнісному сенсі; тут $h(r) = \ln^{1/2}\mu_f(r)$. З іншого боку, з прикладу цілої функції, побудованої у [4, 5], випливає, що опис виняткової множини у цьому твердженні для конкретної цілої функції f не можна істотно покращити. Власне, для кожного $\varepsilon > 0$ існують ціла функція f і множина $E \subset [1, +\infty)$ такі, що для всіх $r \in E$

$$M_f(r) \ge \mu_f(r)\big(\ln\mu_f(r)\big)^{1/2+\varepsilon} \quad \text{і} \quad \int\limits_E \frac{\big(\ln\mu_f(r)\big)^{1/2+\varepsilon}}{r}dr = +\infty.$$

У випадку аналітичних функцій у крузі $\mathbb{D}_1$ і $h(r) = 1/(1-r)$ з нерівності (2) випливає аналог Кеварі нерівності Вімана (див. [16, 17]). У статтях [18 – 24] встановлено наявність ефекту Леві у випадку нерівності Вімана і аналогів Кеварі нерівності Вімана для різних класів випадкових цілих і аналітичних в одиничному крузі функцій однієї змінної відповідно.

У 1996 р., під час доповіді П. В. Філевича на Львівському семінарі з теорії аналітичних функцій, професори А. А. Гольдберг і М. М. Шеремета поставили таке питання (див. [25, 27]): *чи виконується ефект Леві для аналогів нерівності Вімана для функцій багатьох комплексних змінних?* У статті [25] отримано позитивну відповідь на це питання у випадку нерівності Фентона [26] для цілих функцій двох комплексних змінних, а у статті [27] — для нерівності типу Вімана для цілих функцій багатьох комплексних змінних [28] і для аналітичних функцій багатьох комплексних змінних у полікрузі [36]. Метою цієї статті є доведення наявності ефекту Леві у випадку нерівності типу Вімана для аналітичних функцій у довільній повній кратно-круговій області (повній області Рейнгардта), яку вперше отримано в [15]. Твердження, отримане у цій статті, є новим навіть у випадку нерівності (2) для аналітичних функцій однієї змінної в $\mathbb{D}_R$.

2. Позначення, означення, деякі попередні інформація і результати. Щоб точніше вказати місце результатів цієї статті серед інших досліджень, у цьому пункті ми наведемо короткий огляд аналогів нерівності Вімана, отриманих у різних класах аналітичних функцій кількох змінних. Спочатку дамо позначення, необхідні для подальшого, а також деякі загальні пояснення. Через $\mathcal{A}_0^p(\mathbb{G})$, $p \in \mathbb{N}$, позначимо клас аналітичних функцій f у повній області Рейнгардта $\mathbb{G} \subset \mathbb{C}^p$, які можна записати у вигляді степеневого ряду

$$f(z) = f(z_1, \ldots, z_p) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n z^n \tag{3}$$

з областю збіжності $\mathbb{G}$, де $z^n = z_1^{n_1} \dots z_p^{n_p}$, $z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{G}$, $n = (n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $\|n\| = \sum_{j=1}^{p} n_j$. Через $\mathcal{A}^p(\mathbb{G})$ позначимо підклас, в який входять функції $f \in \mathcal{A}_0^p(\mathbb{G})$ такі, що існує таке $n \in \mathbb{N}^p$, що $a_n \neq 0$.

Для функції $f \in \mathcal{A}_0^p(\mathbb{G})$ вигляду (3) з областю збіжності $\mathbb{G}$ і $r = (r_1, \dots, r_p) \in |G| := \big\{r = (r_1, \dots, r_p) \colon r_j = |z_j|, z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{G}\big\}$ позначимо

$$\Delta_{r_0} = \big\{t \in |G| \colon t_j \geq r_j^0,\ j \in \{1, \dots, p\}\big\}, \qquad \mu_f(r) = \max\big\{|a_n| r_1^{n_1} \dots r_p^{n_p} \colon n \in \mathbb{Z}_+^p\big\},$$

$$M_f(r) = \max\big\{|f(z)| \colon |z_1| = r_1, \dots, |z_p| = r_p\big\}, \qquad \mathfrak{M}_f(r) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} |a_n| r^n.$$

З одного боку, відомо, що кожну аналітичну функцію f у повній області Рейнгардта $\mathbb{G}$ з центром $z = 0$ можна зобразити в $\mathbb{G}$ у вигляді ряду (3). З іншого боку, область збіжності кожного ряду вигляду (3) є логарифмічно-опуклою повною областю Рейнгардта з центром у точці $z = 0$.

Область $\mathbb{G} \subset \mathbb{C}^p$ називається повною областю Рейнгардта, якщо:

a) $z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{G} \Longrightarrow (\forall R = (R_1, \dots, R_p) \in [0,1]^p) \colon Rz = (R_1 z_1, \dots, R_p z_p) \in \mathbb{G}$ (*повна область*);

b) $(z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{G} \Longrightarrow (\forall (\theta_1, \dots, \theta_p) \in \mathbb{R}^p) \colon (z_1 e^{i\theta_1}, \dots, z_p e^{i\theta_p}) \in \mathbb{G}$ (*кратно-кругова область*).

Область Рейнгардта $\mathbb{G}$ є логарифмічно-опуклою множиною, якщо $G^* = \big\{z \in \mathbb{G} \colon z_1 \dots z_p \neq 0\big\}$ при відображенні $\mathrm{Ln} : z \to \mathrm{Ln}(z) = (\ln|z_1|, \dots, \ln|z_p|)$ є опуклою множиною у просторі $\mathbb{R}^p$. Для однієї комплексної змінної ($p = 1$) логарифмічно-опуклою областю Рейнгардта є круг. Області $(p \geq 2)$

$$C_p(R) := \big\{z \in \mathbb{C}^p \colon |z_1| < R_1, \dots, |z_p| < R_p\big\}, \quad R = (R_1, \dots, R_p) \in (0, +\infty)^p \quad \text{(полікруг)},$$

$$\mathbb{B}_p(r) := \big\{z \in \mathbb{C}^p \colon |z| := \sqrt{|z_1|^2 + \ldots + |z_p|^2} < r\big\}, \quad r \in (0, +\infty) \quad \text{(куля)},$$

$$\mathbb{G} = \mathbb{D}^\ell \times \mathbb{C}^{p-\ell}, \qquad \ell \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq \ell < p \quad \text{(необмежений циліндр)}$$

є логарифмічно-опуклими повними областями Рейнгардта. Але, наприклад, повна область Рейнгардта

$$G_{1,2} = \big\{z = (z_1, z_2) \colon |z_1| < 1, |z_2| < 2\big\} \cup \big\{z = (z_1, z_2) \colon |z_1| < 2, |z_2| < 1\big\}$$

не є логарифмічно-опуклою областю.

Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — ймовірнісний простір Штейнгуаза, тобто $\Omega = [0,1]$, P — міра Лебега, визначена на σ-алгебрі $\mathcal{A}$ вимірних за Лебегом підмножин $[0,1]$. Нехай $X = (X_n(t))$ — послідовність випадкових величин на цьому просторі. Для цілої функції вигляду (3) через $\mathcal{K}(f, X)$ позначимо клас випадкових функцій вигляду

$$f(z,t) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n X_n(t) z^n. \tag{4}$$

Під „майже напевно” будемо розуміти, що деяка властивість виконується майже скрізь за мірою Лебега P. Говоритимемо, що деяке співвідношення виконується майже напевно у класі

$\mathcal{K}(f, X)$, якщо воно виконується для кожної цілої функції $f(z,t)$ вигляду (4) майже напевно по t. Для функцій вигляду (4) і $t \in [0,1]$ також позначимо

$$M_f(r,t) = \max\big\{|f(z,t)| \colon |z_1| = r_1, \ldots, |z_p| = r_p\big\}.$$

Послідовність $X = (X_n(t)), n \in \mathbb{Z}_+^p$, випадкових величин $X_n(t)$ є мультиплікативною системою, якщо

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\forall (n_j), n_j \in \mathbb{Z}_+^p, n_j \neq n_s (s \neq j) \colon\ \mathbf{M}(X_{n_1} X_{n_2} \ldots X_{n_k}) = 0,$$

де $\mathbf{M}\xi$ — математичне сподівання випадкової величини ξ.

У випадку, коли $X = \mathcal{R} = (R_n(t))$ є послідовністю Радемахера, тобто $R_n(t) = \operatorname{sign}\sin(2^n \pi t)$, $n \geq 0$, П. Леві довів, що для кожної цілої функції $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ вигляду (1), за деяких додаткових припущень щодо регулярності зростання $\ln M_f(r)$, для кожної функції $f(z,t) \in \mathcal{K}(f, \mathcal{R})$ нерівність $\ln M_f(r,t) \leq \mu_f(r) \ln^{1/4+\varepsilon} \mu_f(r)$ виконується майже напевно при $r \to +\infty$ зовні деякої виняткової множини скінченної логарифмічної міри. Зокрема, $\mathcal{R} = (R_n(t))$ — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин таких, що $P\big\{t \colon R_n(t) = \pm 1\big\} = 1/2$. Пізніше П. Ердеш і А. Реньї [18] довели цей результат без додаткових умов на регулярність зростання і зауважили, що їхній результат також правильний у класі $\mathcal{K}(f, H)$, де $H = (e^{2\pi i \omega_n(t)})$ — послідовність Штейнгауза, тобто $(\omega_n(t))$ — послідовність незалежних рівномірно розподілених на $[0,1]$ випадкових величин $\omega_n(t) \colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Це твердженння також є правильним для класу $\mathcal{K}(f, X)$, де $X = (X_n(t))$ — мультиплікативна система, рівномірно обмежена числом 1 [20, 21], тобто $|X_n(t)| \leq 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ майже напевно по $t \in [0,1]$.

Нехай $\mathcal{H}^p$ — клас функцій $h \colon |G| \to \mathbb{R}_+$ таких, що h є неспадною за кожною змінною функцією, $h(r) > 10$ для всіх $r \in |G|$ і

$$\int\limits_{\Delta_\varepsilon} \frac{h(r) dr_1 \ldots dr_p}{r_1 \ldots r_p} = +\infty$$

для кожного $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^p$ такого, що множина Δ_ε є непорожньою в $\mathbb{R}_+^p$. Для $h \in \mathcal{H}^p$ позначимо через $\mathcal{S}_h$ клас множин $E \subset |G|$ *скінченної логарифмічної h-міри на $|G|$*, тобто таких, що існує таке $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^p$, що множина Δ_ε є непорожньою в області $|G| \subset \mathbb{R}_+^p$ і

$$\nu_h(E \cap \Delta_\varepsilon) := \int\limits_{E \cap \Delta_\varepsilon} \frac{h(r) dr_1 \ldots dr_p}{r_1 \ldots r_p} < +\infty.$$

У статті [15] уперше було доведено аналоги нерівності Вімана для аналітичних функцій у довільній повній кратно-круговій області. А саме, було доведено таке твердження.

Теорема 1 [15]. *Нехай $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{G})$, $h \in \mathcal{H}^p$. Тоді для кожних $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^p, \delta > 0$ існує множина $E \in \mathcal{S}_h$ така, що для всіх $r \in \Delta_\varepsilon \setminus E$ виконується нерівність*

$$M_f(r) \leq \mu_f(r) (h(r))^{\frac{p+1}{2}} \ln^{\frac{p}{2}+\delta} h(r) \ln^{\frac{p}{2}+\delta} \big(\mu_f(r) h(r)\big) \prod_{j=1}^{p} \left(\prod_{k=1, k\neq j}^{p} \ln \frac{e r_k}{\varepsilon_k} \right)^{\frac{1}{2}+\delta}. \qquad (5)$$

Якщо область $\mathbb{G}$ обмежена, то для кожних $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^p, \delta > 0$ існує множина $E \in \mathcal{S}_h$ така, що для всіх $r \in \Delta_\varepsilon \setminus E$

$$M_f(r) \le \mu_f(r)(h(r))^{\frac{p+1}{2}} \ln^{\frac{p}{2}+\delta} h(r) \ln^{\frac{p}{2}+\delta} \big(\mu_f(r)h(r)\big). \tag{6}$$

Деякі аналоги нерівності Вімана для цілих функцій кількох змінних можна знайти у статтях [25 – 34], а для аналітичних функцій у полікрузі $\mathbb{D}^p$, $p \ge 2$, — у [35, 36]. У статті [37] доведено деякі аналоги нерівності Вімана для аналітичних функцій $f(z)$ і випадкових аналітичних функцій $f(z,t)$ у $\mathbb{G} = \mathbb{D}^\ell \times \mathbb{C}^{p-\ell}$, $\ell \in \mathbb{N}$, $1 \le \ell < p$, вигляду (3) і (4) відповідно, де $X = (X_n)$ — мультиплікативна система комплекснозначних випадкових величин на ймовірнісному просторі Штейнгауза, майже напевно рівномірно обмежена числом 1. Також було доведено точність отриманих нерівностей. При відповідному виборі функції $h(r)$ ми отримаємо твердження про аналоги нерівності Вімана у відповідних випадках зі статей [28, 35 – 37].

У загальному випадку для довільної функції $h(r)$ і нерівностей (2), (5), а також окремих випадків, отриманих з нерівності (5), питання про наявність ефекту Леві є повністю відкритим.

Основна мета цієї статті — довести аналог ефекту Леві для нерівностей з теореми 1, отриманих у класі аналітичних функцій $f \in \mathcal{A}_0^p(\mathbb{G})$, для довільної повної області Рейнгардта $\mathbb{G}$.

3. Основний результат: ефект Леві. Нехай $Z = (Z_n(t))$ — комплекснозначна послідовність випадкових величин $Z_n(t) = X_n(t) + iY_n(t)$ така, що обидві $X = (X_n(t))$ і $Y = (Y_n(t))$ є дійсними мультиплікативними системами.

Сформулюємо таку теорему.

Теорема 2. *Нехай $Z = (Z_n(t))$ — мультиплікативна система, рівномірно обмежена числом 1 майже напевно, $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{G})$, $h \in \mathcal{H}^p$.*

1. *Для кожних $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^p, \delta > 0$ існує множина $E \in \mathcal{S}_h$ така, що для всіх $r \in \Delta_\varepsilon \setminus E$ нерівність*

$$M_f(r,t) \le \mu_f(r)(h(r))^{\frac{p+1}{4}} \ln^{\frac{p}{4}+1+\delta} h(r) \ln^{\frac{p}{4}+\delta} \big(\mu_f(r)h(r)\big) \prod_{j=1}^{p} \left(\prod_{k=1, k\neq j}^{p} \ln \frac{er_k}{\varepsilon_k} \right)^{\frac{1}{4}+\delta} \tag{7}$$

виконується майже напевно в $\mathcal{K}(f, Z)$.

2. *Якщо область $\mathbb{G}$ обмежена, то для кожних $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^p$, $\delta > 0$ існує множина $E \in \mathcal{S}_h$ така, що для всіх $r \in \Delta_\varepsilon \setminus E$ нерівність*

$$M_f(r,t) \le \mu_f(r)(h(r))^{\frac{p+1}{4}} \ln^{\frac{p}{4}+1+\delta} h(r) \ln^{\frac{p}{4}+\delta} \big(\mu_f(r)h(r)\big) \tag{8}$$

виконується майже напевно в $\mathcal{K}(f, Z)$.

Зауважимо, що нерівність (7) можна записати у вигляді

$$M_f(r,t) \le \mu_f(r)(h(r))^{\frac{p+1}{4}} \ln^{\frac{p}{4}+1+\delta} h(r) \ln^{\frac{p}{4}+\delta} \big(\mu_f(r)h(r)\big) \left(\prod_{k=1}^{p} \ln \frac{er_k}{\varepsilon_k} \right)^{\frac{p-1}{4}+\delta}.$$

Лема 1 [31]. *Нехай $X = (X_n(t))$ — мультиплікативна система, рівномірно обмежена числом 1 майже напевно. Тоді для кожного $\beta > 0$ існує стала $A_{\beta p} > 0$, яка залежить тільки від p і β, така, що для всіх $N \ge N_1(p) = \max\{p, 4\pi\}$ і $\{c_n : \|n\| \le N\} \subset \mathbb{C}$*

$$P\left\{ t\colon \max\left\{ \left| \sum_{\|n\|=0}^{N} c_n X_n(t) e^{in_1\psi_1} \dots e^{in_p\psi_p} \right| : \psi \in [0, 2\pi]^p \right\} \ge A_{\beta p} S_N \ln^{\frac{1}{2}} N \right\} \le \frac{1}{N^\beta}, \tag{9}$$

де $S_N^2 = \sum_{\|n\|=0}^{N} |c_n|^2$.

Лема 2 [15]**.** *Нехай* $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{G})$, $h \in \mathcal{H}^p$. *Тоді для* $\varepsilon \in \mathbb{R}^p_+, \delta > 0$ *існує множина* $E \in \mathcal{S}_h$ *така, що для всіх* $r \in \Delta_\varepsilon \setminus E$ *маємо*

$$r_j \frac{\partial}{\partial r_j} \ln \mathfrak{M}_f(r) \le h(r) \ln^{1+\delta} \mathfrak{M}_f(r) \prod_{k=1, k\neq j}^{p} \ln^{1+\delta}\left(\frac{er_k}{\varepsilon_k}\right), \quad j \in \{1, \ldots, p\}. \tag{10}$$

***Доведення теореми* 2.** Схема доведення теореми 2 в загальних рисах повторює схему міркувань зі статей [27, 36]. Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $Z = X = (X_n(t))$ — дійсна мультиплікативна система (див. [27]). Для $k \in \mathbb{N}, k \ge 11$ і $l \in \mathbb{Z}$ таких, що $k > l$, позначимо

$$G_{kl} = \Big\{r = (r_1, \ldots, r_p) \in |G| \colon k \le \ln h(r) \le k+1,\ l \le \ln \mu_f(r) \le l+1\Big\},$$

$$G^+_{kl} = \bigcup_{i=k}^{+\infty} \bigcup_{j=l}^{+\infty} G_{ij}.$$

Нескладно перевірити, що множина

$$E_0 = \Big\{r \in |G| \colon\ \ln h(r) + \ln \mu_f(r) < 1\Big\} = \Big\{r \in |G| \colon \mu_f(r) h(r) < e\Big\} \in \mathcal{S}_h.$$

За лемою 2 існує множина $E_1 \supset E_0, E_1 \in \mathcal{S}_h$, така, що для всіх $r \in |G| \backslash E_1$ отримуємо

$$\sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \|n\| \cdot |a_n| r^n \le h(r) \mathfrak{M}_f(r) \ln^{1+\delta} \mathfrak{M}_f(r) \sum_{j=1}^{p} \left(\prod_{\substack{k=1\\ k\neq s}}^{p} \ln^{1+\delta} \frac{er_k}{\varepsilon_k}\right) \le$$

$$\le p h(r) \mu_f(r) (h(r))^{\frac{p+1}{2}} \ln^{\frac{p}{2}+\delta} h(r) \ln^{\frac{p}{2}+\delta} \big\{\mu_f(r) h(r)\big\} \left(\prod_{j=1}^{p} \ln \frac{er_j}{\varepsilon_j}\right)^{\frac{p-1}{2}+\delta} \times$$

$$\times \Bigg[\ln \mu_f(r) + \frac{p+1}{2} \ln h(r) + \left(\frac{p}{2} + \delta\right) \ln\ln h(r) + \left(\frac{p}{2} + \delta\right) \ln\ln \big\{\mu_f(r) h(r)\big\} +$$

$$+ \left(\frac{p-1}{2} + \delta\right) \sum_{j=1}^{p} \ln\ln \frac{er_j}{\varepsilon_j}\Bigg]^{1+\delta} \left(\prod_{j=1}^{p} \ln \frac{er_j}{\varepsilon_j}\right)^{1+\delta} \le$$

$$\le \mu_f(r) (h(r))^{\frac{p+3}{2}+2\delta} \ln^{\frac{p}{2}+1+\delta} \big\{\mu_f(r) h(r)\big\} \left(\prod_{k=1}^{p} \ln \frac{er_k}{\varepsilon_k}\right)^{\frac{p+1}{2}+2\delta}.$$

Тому

$$\sum_{\|n\| \ge d} |a_n| r^n \le \sum_{\|n\| \ge d} \frac{\|n\|}{d} |a_n| r^n \le \frac{1}{d} \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} \|n\| |a_n| r^n \le$$

$$\leq \frac{1}{d}\mu_f(r)(h(r))^{\frac{p+3}{2}+2\delta}\ln^{\frac{p}{2}+1+\delta}\left\{\mu_f(r)h(r)\right\}\left(\prod_{k=1}^{p}\ln\frac{er_k}{\varepsilon_k}\right)^{\frac{p+1}{2}+2\delta} \leq \mu_f(r),$$

де

$$d = d(r) = (h(r))^{\frac{p+3}{2}+2\delta}\ln^{\frac{p}{2}+1+\delta}\left\{\mu_f(r)h(r)\right\}\left(\prod_{k=1}^{p}\ln\frac{er_k}{\varepsilon_k}\right)^{\frac{p+1}{2}+2\delta}.$$

Нехай $G_{kl}^* = G_{kl}\setminus E_2,\ I = \{(i;j) : G_{ij}^* \neq \varnothing\},\ E_2 = E_1 \cup \Big(\bigcup_{(i,j)\notin I} G_{ij}\Big)$. Тоді $\#I = +\infty$.

Для $(k,l)\in I$ виберемо послідовність $r^{(k,l)} \in G_{kl}^*$ так, що $\mu_f\big(r^{(k,l)}\big) = \min_{r\in G_{kl}^*}\mu_f(r)$. Для всіх $r\in G_{kl}^*$ одержимо

$$\frac{1}{e}\mu_f\big(r^{(k,l)}\big) \leq \mu_f(r) \leq e\mu_f\big(r^{(k,l)}\big), \tag{11}$$

$$\frac{1}{e}h\big(r^{(k,l)}\big) \leq h(r) \leq eh\big(r^{(k,l)}\big), \tag{12}$$

$$\frac{1}{e^2}\mu_f\big(r^{(k,l)}\big)h\big(r^{(k,l)}\big) \leq \mu_f(r)h\big(r^{(k,l)}\big) \leq e^2\mu_f\big(r^{(k,l)} =\big)h\big(r^{(k,l)}\big), \tag{13}$$

а також

$$\bigcup_{(k,l)\in I} G_{kl}^* = \bigcup_{(k,l)\in I} G_{kl}\setminus E_1 = \bigcup_{k,l=1}^{+\infty} G_{kl}\setminus E_1 = |G|\setminus E_1.$$

Нехай $N_{kl} = \big[2d_1\big(r^{(k,l)}\big)\big]$, де $[x]$ — ціла частина числа x і

$$d_1(r) = (eh(r))^{\frac{p+3}{2}+2\delta}\ln^{\frac{p}{2}+1+\delta}\{e^2\mu_f(r)h(r)\}\left(\prod_{k=1}^{p}\ln\frac{e^2r_k}{\varepsilon_k}\right)^{\frac{p+1}{2}+2\delta}.$$

Для $r\in G_{kl}^*$ позначимо

$$W_{N_{kl}}(r,t) = \max\left\{\left|\sum_{\|n\|\leq N_{kl}} a_n r_1^{n_1}\dots r_p^{n_p} e^{in_1\psi_1+\ldots+in_p\psi_p}X_n(t)\right| : \psi\in[0,2\pi]^p\right\},$$

а для вимірних за Лебегом множин $G\subset G_{kl}^*$ і для $(k,l)\in I$ —

$$\nu_{kl}(G) = \frac{\mathrm{meas}_p(G)}{\mathrm{meas}_p(G_{kl}^*)},$$

де meas_p означає міру Лебега на $\mathbb{R}^p$.

Зауважимо, що ν_{kl} — ймовірнісна міра, визначена на сім'ї вимірних за Лебегом підмножин G_k^* [27]. Нехай $\Omega = \bigcup_{(k,l)\in I} G_{kl}^*$ і

$$k_i, l_{i,j} : (k_i, l_{i,j})\in I, \qquad k_i < k_{i+1}, \quad l_{i,j} < l_{i,j+1} \quad \forall i,j\in\mathbb{Z}_+.$$

Для вимірних за Лебегом підмножин G з Ω позначимо

$$\nu(G) = 2^{k_0} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{k_i}} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k_{i+1}-k_i} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{j=0}^{N_i} \frac{2^{l_{i,0}}}{2^{l_{i,j}}} \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{l_{i,j+1}-l_{i,j}} \right)}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{l_{i,N_{i+1}}+l_{i,0}}} \nu_{k_{i+1}l_{i+1,j+1}} (G \cap G^*_{k_{j+1}l_{i+1,j+1}}) \right), \qquad (14)$$

де $N_i = \max\{j : (k_i, l_{ij}) \in I\}$. Зауважимо, що $\nu_{k_{j+1}l_{j+1}}(G^*_{k_{j+1}l_{j+1}}) = \nu(\Omega) = 1$.

Тому ν є ймовірнісною мірою, яка визначена на вимірних підмножинах Ω. На $\Omega_0 :=$ $:= [0,1] \times \Omega$ визначимо ймовірнісну міру $P_0 = P \otimes \nu$, яка є прямим добутком імовірнісних мір P і ν. Тепер для $(k; l) \in I$ позначимо

$$F_{kl} = \left\{ (t,r) \in [0,1] \times \Omega : W_{N_{kl}}(r,t) > A_p S_{N_{kl}}(r) \ln^{1/2} N_{kl} \right\},$$

$$F_{kl}(r) = \left\{ t \in [0,1] : W_{N_{kl}}(r,t) > A_p S_{N_{kl}}(r) \ln^{1/2} N_{kl} \right\},$$

де $S^2_{N_{kl}}(r) = \sum_{\|n\|=0}^{N_{kl}} |a_n|^2 r^{2n}$ і A_p — стала з леми 1 з $\beta = 1$. За теоремою Фубіні і за лемою 1 з $c_n = a_n r^n$ і $\beta = 1$ для $(k,l) \in I$ одержимо

$$P_0(F_{kl}) = \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{F_{kl}(r)} dP \right) d\nu = \int\limits_{\Omega} P(F_{kl}(r)) d\nu \le \frac{1}{N_{kl}} \nu(\Omega) = \frac{1}{N_{kl}}.$$

Зауважимо, що

$$N_{kl} > (h(r))^{\frac{p+3}{2}} \ln^{\frac{p}{2}+1+\delta} \left\{ \mu_f(r) h(r) \right\} \prod_{k=1}^{p} \ln^{\frac{p+1}{2}} \frac{e r_k}{\varepsilon_k} > e^{2k} (l+k)^{2+2\delta}.$$

Тому

$$\sum_{(k,l)\in I} P_0(F_{kl}) \le \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=-k+1}^{+\infty} \frac{1}{e^{2k}(l+k)^{2+2\delta}} < +\infty.$$

Звідси за лемою Бореля – Кантеллі з імовірністю, що дорівнює одиниці, серед подій $\{F_{kl} : (k,l) \in I\}$ відбувається щонайбільше скінченна кількість подій. Тому

$$P_0(F) = 1, \quad F = \bigcup_{s=1}^{+\infty} \bigcup_{m=1}^{+\infty} \bigcap_{\substack{k \ge s,\ l \ge m \\ (k,l) \in I}} \overline{F_{kl}} \subset [0,1] \times \Omega.$$

Тоді для кожної точки $(t,r) \in F$ існують $k_0 = k_0(t,r)$ і $l_0 = l_0(t,r)$ такі, що для всіх $k \ge k_0$, $l \ge l_0$, $(k,l) \in I$

$$W_{N_{kl}}(r,t) \le A_p S_{N_{kl}}(r) \ln^{1/2} N_{kl}.$$

Нехай $F_\Omega = \big\{r \in \Omega\colon (\exists t)[(t,r) \in F]\big\}$. Тоді $\nu(F_\Omega) = 1$. Подібно для проєкції F на $[0,1]$, $F_{[0,1]} = \big\{t \in [0,1]\colon (\exists r)[(t,r) \in F]\big\}$, маємо $P(F_{[0,1]}) = 1$.

Нехай далі $F^\wedge(t) = \big\{r \in \Omega\colon (t,r) \in F\big\}$. Як і в [27, 36], за теоремою Фубіні отримуємо

$$0 = \int\limits_{\Omega_0} (1-\chi_F)\,dP_0 = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_\Omega (1-\chi_{F^\wedge(t)})\,d\nu \right) dP.$$

Тому P-майже скрізь $0 = \displaystyle\int_\Omega (1-\chi_{F^\wedge(t)})\,d\nu = 1-\nu(F^\wedge(t))$, звідки випливає, що існує $F_1 \subset \subset F_{[0,1]}$, $P(F_1) = 1$, така, що $\nu(F^\wedge(t)) = 1$ для кожного $t \in F_1$.

Для кожних $t \in F_1$ [27, 36] і $(k,l) \in I$ виберемо точку $r_0^{(k,l)}(t) \in G_{kl}^*$ так, що

$$W_{N_{kl}}\big(r_0^{(k,l)}(t),t\big) \ge \frac{3}{4} M_{kl}(t), \qquad M_{kl}(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \sup\big\{W_{N_{kl}}(r,t)\colon r \in G_{kl}^*\big\}.$$

Тоді з $\nu_{kl}\big(F^\wedge(t) \cap G_{kl}^*\big) = 1$ для всіх $(k,l) \in I$ випливає, що існує точка $r^{(k,l)}(t) \in G_{kl}^* \cap F^\wedge(t)$ така, що

$$\big|W_{N_{kl}}\big(r_0^{(k,l)}(t),t\big) - W_{N_{kl}}(r^{(k,l)}(t),t)\big| < \frac{1}{4} M_{kl}(t),$$

звідки

$$\frac{3}{4} M_{kl}(t) \le W_{N_{kl}}\big(r_0^{(k,l)}(t),t\big) \le W_{N_{kl}}(r^{(k,l)}(t),t) + \frac{1}{4} M_{kl}(t).$$

Оскільки $(t, r^{(k,l)}(t)) \in F$, то з нерівності (14) маємо

$$\frac{1}{2} M_{kl}(t) \le W_{N_{kl}}(r^{(k,l)}(t),t) \le A_p S_{N_{kl}}(r^{(k,l)}(t)) \ln^{1/2} N_{kl}.$$

Тепер для $r^{(k,l)} = r^{(k,l)}(t)$ одержуємо

$$S^2_{N_{kl}}\big(r^{(k,l)}\big) \le \mu_f\big(r^{(k,l)}\big)\mathfrak{M}_f\big(r^{(k,l)}\big) \le \mu_f^2\big(r^{(k,l)}\big)\big(h\big(r^{(k,l)}\big)\big)^{\frac{p+1}{2}} \ln^{\frac{p}{2}+\delta} h\big(r^{(k,l)}\big) \times$$
$$\times \ln^{\frac{p}{2}+\delta}\big\{\mu_f\big(r^{(k,l)}\big)h\big(r^{(k,l)}\big)\big\} \left(\prod_{j=1}^p \ln \frac{e r_j^{(k,l)}}{\varepsilon_j} \right)^{\frac{p-1}{2}+\delta}.$$

Звідси для $t \in F_1$ і всіх $k \ge k_0(t),\ l \ge l_0(t)$ отримуємо

$$S_N\big(r^{(k,l)}\big) \le \mu_f\big(r^{(k,l)}\big)\Big(h\big(r^{(k,l)}\big)\Big)^{\frac{p+1}{4}} \ln^{\frac{p}{4}+\frac{\delta}{2}} h\big(r^{(k,l)}\big) \times$$
$$\times \ln^{\frac{p}{4}+\frac{\delta}{2}}\big\{\mu_f\big(r^{(k,l)}\big)h\big(r^{(k,l)}\big)\big\} \left(\prod_{j=1}^p \ln \frac{e r_j^{(k,l)}}{\varepsilon_j} \right)^{\frac{p-1}{4}+\frac{\delta}{2}}.$$

З (11)–(13) випливає, що $d_1\big(r^{(k,l)}\big) \ge d(r)$ для $r \in G_{kl}^*$. Тоді для $t \in F_1,\ r \in F^\wedge(t) \cap G_{kl}^*$, $(k,l) \in I,\ k \ge k_0(t), l \ge l_0(t)$ виконується нерівність

$$M_f(r,t) \le \sum_{\|n\| \ge 2d_1\left(r^{(k,l)}\right)} |a_n| r^n + W_{N_{kl}}(r,t) \le \sum_{\|n\| \ge 2d(r)} |a_n| r^n + M_{kl}(t).$$

Отже, для $t \in F_1,\ r \in F^\wedge(t) \cap G^*_{kl},\ l \ge l_0(t)$ і $k \ge k_0(t)$ маємо

$$M_f(r^{(k,l)}, t) \le \mu_f\big(r^{(k,l)}\big) + 2A_p S_{N_{kl}}\big(r^{(k,l)}\big) \ln^{1/2} N_{kl} \le \mu_f\big(r^{(k,l)}\big) +$$

$$+2A_p \mu_f\big(r^{(k,l)}\big)\big(h\big(r^{(k,l)}\big)\big)^{\frac{p+1}{4}} \ln^{\frac{p}{4}+\frac{\delta}{2}} h\big(r^{(k,l)}\big) \times$$

$$\times \ln^{\frac{p}{4}+\frac{\delta}{2}} \left\{\mu_f\big(r^{(k,l)}\big) h\big(r^{(k,l)}\big)\right\} \left(\prod_{j=1}^{p} \ln \frac{e r_j^{(k,l)}}{\varepsilon_j}\right)^{\frac{p-1}{4}+\frac{\delta}{2}} \times$$

$$\times \Bigg[\Big(\frac{p+3}{2} + 2\delta\Big) \ln(e h\big(r^{(k,l)}\big)) + \Big(\frac{p}{2} + 1 + 2\delta\Big) \ln\ln\{e^2 \mu_f\big(r^{(k,l)}\big) h\big(r^{(k,l)}\big)\} +$$

$$+\Big(\frac{p+1}{2} + 2\delta\Big) \sum_{j=1}^{n} \ln\ln \frac{e r_j^{(k,l)}}{\varepsilon_j}\Bigg].$$

Для $t \in F_1,\ r \in F^\wedge(t) \cap G^*_{kl},\ k \ge k_0(t)$ і $l \ge l_0(t)$

$$M_f(r,t) \le \mu_f(r)(h(r))^{\frac{p+1}{4}} \ln^{\frac{p}{4}+1+\delta} h(r) \ln^{\frac{p}{4}+\delta} \left\{\mu_f(r) h(r)\right\} \left(\prod_{k=1}^{p} \ln \frac{e r_k}{\varepsilon_k}\right)^{\frac{p-1}{4}+\delta}.$$

Тому попередня нерівність виконується майже напевно $(t \in F_1,\ P(F_1) = 1)$ для всіх

$$r \in \left(\bigcup_{(k,l)\in I} (G^*_{kl} \cap F^\wedge(t)) \cap G^+_{kl}\right) \setminus E^* = ([0;1)^p \cap G^+_{kl}) \setminus (E^* \cup G^* \cup E_1) = [0;1)^p \setminus E_2,$$

де

$$G^+_{kl} = \bigcup_{i=k}^{+\infty} \bigcup_{j=l}^{+\infty} G_{kl}, \qquad E_2 = E_1 \cup G^* \cup E^*, \qquad G^* = \bigcup_{(k,l)\in I} \big(G^*_{kl} \setminus F^\wedge(t)\big).$$

Залишилося зауважити, що для $\nu(G^*)$ маємо $\nu(G^*) = \sum_{(k,l)\in I} (\nu_{kl}(G^*_{kl}) - \nu_{kl}(F^\wedge(t))) = 0.$ Тоді для всіх $(k,l) \in I$ одержуємо

$$\nu_{kl}(G^*_{kl} \setminus F^\wedge(t)) = \frac{\mathrm{meas}_p(G^*_{kl} \setminus F^\wedge(t))}{\mathrm{meas}_p(G^*_{kl})} = 0,$$

$$\mathrm{meas}_p(G^*_{kl} \setminus F^\wedge(t)) = \underset{G^*_{kl}\setminus F^\wedge(t)}{\int \cdots \int} \frac{dr_1 \dots dr_p}{(1-r_1)\dots(1-r_p)} = 0.$$

Теорему 2 доведено.

4. Наслідки і заключні зауваження.

***Зауваження* 1.** Точність нерівності (7) доведено:

1) у випадку $\mathbb{C}^p$ з $h(r_1, \dots, r_p) \equiv 10,\ p \in \mathbb{N}, p > 1$, у [27];

2) у випадку $\mathbb{D}^p$ з $h(r_1, \dots, r_p) = r_1 \dots r_p\big((1-r_1)\dots(1-r_p)\big)^{-1}$ $p \in \mathbb{N}, p > 1$, у [36];

3) у випадку $\mathbb{D}^\ell \times \mathbb{C}^{p-\ell}$ з $h(r_1, \dots, r_p) = r_1 \dots r_\ell\big((1-r_1)\dots(1-r_\ell)\big)^{-1}$, $\ell \in \mathbb{N}, 1 \le \ell < p$, $p \in \mathbb{N}$, у [37].

***Проблема* 1.** Питання щодо точності нерівностей (2) і (7) у довільній фіксованій повній області Рейнхарда є відкритим; те ж саме стосується довільної функції $h \in \mathcal{H}^p$.

У випадку $\mathbb{G} = \mathbb{C}^p$ з нерівності (5) при $h(r_1, \ldots, r_p) \equiv 10$ випливає, що майже напевно

$$M_f(r,t) \le \mu_f(r)(\ln \mu_f(r))^{\frac{p}{2}+\delta} \left(\prod_{k=1}^{p} \ln \frac{er_k}{\varepsilon_k} \right)^{\frac{p-1}{4}+\delta} \tag{15}$$

для всіх $r \in \Delta_\varepsilon \subset \mathbb{R}^{\shortmid}_+$ зовні деякої множини E такої, що $\displaystyle\int \cdots \int_{E\cap\Delta_\varepsilon} \frac{dr_1 \ldots dr_p}{r_1 \ldots r_p} < +\infty.$

Наступне твердження є наслідком з теореми 2 і дає для заданої функції $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{C}^p)$ майже напевно істотно сильніший опис виняткової множини у нерівності (15).

***Наслідок* 1.** *Нехай $Z = (Z_n(t))$ — мультиплікативна система, рівномірно обмежена числом* 1 *майже напевно, $f \in \mathcal{A}^p(\mathbb{C}^p)$. Для кожних $\varepsilon \in \mathbb{R}^p_+, \delta > 0$ існує множина $E = E(\delta, f, t) \in \in \mathcal{S}_h$ з $h(r) = (\ln \mu_f(r))^{p/(p+1)}$ така, що для всіх $r \in \Delta_\varepsilon \setminus E$ майже напевно в $\mathcal{K}(f, Z)$ виконується нерівність* (15).

У випадку $p = 1$ з теореми 2 маємо такий наслідок.

***Наслідок* 2.** *Нехай $Z = (Z_n(t))$ — мультиплікативна система, рівномірно обмежена числом* 1 *майже напевно, $h \in \mathcal{H}^1$, $f \in \mathcal{A}^1(\mathbb{D}_R)$, $0 < R \le +\infty$. Для кожного $\delta > 0$ існують множина $E = E(\delta, f, t) \in \mathcal{S}_h$ і стала $C > 0$ такі, що для всіх $r \in \Delta_\varepsilon \setminus E$ майже напевно в $\mathcal{K}(f, Z)$ виконується нерівність*

$$M_f(r,t) \le C\mu_f(r)(h(r))^{\frac{1}{2}} \ln^{\frac{5}{4}+\delta} h(r) \ln^{\frac{1}{4}+\delta} \big(\mu_f(r)h(r)\big).$$

Зауважимо, що у частковому випадку $p = 1$ нерівність (5) є слабшою за нерівність (2), тому у цьому випадку висловимо припущення, що у наслідку 2 повинна виконуватись дещо сильніша нерівність $M_f(r,t) \le \mu_f(r)(h(r))^{\frac{1}{2}} \big(\ln h(r) \ln(h(r)\mu_f(r))\big)^{1/4+\delta}$.

Література

1. G. Valiron, *Functions analytiques*, Press Univ. de France, Paris (1954).
2. H. Wittich, *Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen*, Springer-Verlag, Berlin etc. (1955).
3. P. C. Rosenbloom, *Probability and entire functions*, Stud. Math. Anal. and Relat. Top., Calif. Univ. Press, Stanford (1962), p. 325 – 332.
4. O. B. Skaskiv, P. V. Filevych, *On the size of an exceptional set in the Wiman theorem*, Mat. Stud., **12**, № 1, 31 – 36 (1999) (in Ukrainian).
5. O. B. Skaskiv, O. V. Zrum, *On an exeptional set in the Wiman inequalities for entire functions*, Mat. Stud., **21**, № 1, 13 – 24 (2004) (in Ukrainian).
6. A. O. Kuryliak, O. B. Skaskiv, *Wiman's type inequality for analytic and entire functions and h-measure of an exceptional sets*, Carpathian Math. Publ., **12**, № 2, 492 – 498 (2020).
7. P. Lévy, *Sur la croissance de fonctions entière*, Bull. Soc. Math. France, **58**, 29 – 59, 127 – 149 (1930).
8. W. Bergweiler, *On meromorphic function that share three values and on the exceptional set in Wiman – Valiron theory*, Kodai Math. J., **13**, № 1, 1 – 9 (1990); DOI: 10.2996/kmj/1138039154.
9. T. M. Salo, O. B. Skaskiv, O. M. Trakalo, *On the best possible description of exeptional set in Wiman – Valiron theory for entire function*, Mat. Stud., **16**, № 2, 131 – 140 (2001).
10. O. B. Skaskiv, O. M. Trakalo, *On exeptional set in Borel relation for multiple entire Dirichlet series*, Mat. Stud., **15**, № 2, 163 – 172 (2001) (in Ukrainian).
11. P. V. Filevych, *An exact estimate for the measure of the exceptional set in the Borel relation for entire functions*, Ukr. Math. J., **53**, № 2, 328 – 332 (2001); https://doi.org/10.1023/A:1010489609188.

12. O. B. Skaskiv, O. M. Trakalo, *Sharp estimate of exceptional set in Borel's relation for entire functions of several complex variables*, Mat. Stud., **18**, № 1, 53 – 56 (2002) (in Ukrainian).
13. O. B. Skaskiv, D. Yu. Zikrach, *On the best possible description of an exceptional set in asymptotic estimates for Laplace – Stieltjes integrals*, Mat. Stud., **35**, № 2, 131 – 141 (2011).
14. T. M. Salo, O. B. Skaskiv, *Minimum modulus of lacunary power series and h-measure of exceptional sets*, Ufa Math. J., **9**, № 4, 135 – 144 (2017); DOI: 10.13108/2017-9-4-135.
15. A. O. Kuryliak, O. B. Skaskiv, *Wiman's type inequality in multiple-circular domain*, Axioms, **2021**, № 10(4), Article ID: 348 (2021); https://doi.org/10.3390/axioms10040348.
16. T. Kővari, *On the maximum modulus and maximal term of functions analytic in the unit disc*, J. London Math. Soc., **41**, 129 – 137 (1966); https://doi.org/10.1112/jlms/s1-41.1.129.
17. N. V. Suleymanov, *An estimate of the Wiman – Valiron type for power series with a finite radius of convergence and its sharpness*, Dokl. Akad. Nauk USSR, **253**, № 4, 822 – 824 (1980) (in Russian).
18. P. Erdős, A. Rényi, *On random entire function*, Zastosowania mat., **10**, 47 – 55 (1969).
19. J. M. Steele, *Sharper Wiman inequality for entire functions with rapidly oscillating coefficients*, J. Math. Anal. and Appl., **123**, 550 – 558 (1987).
20. P. V. Filevych, *Some classes of entire functions in which the Wiman – Valiron inequality can be almost certainly improved*, Mat. Stud., **6**, 59 – 66 (1996) (in Ukrainian).
21. P. V. Filevych, *The Baire categories and Wiman's inequality for entire functions*, Mat. Stud., **20**, № 2, 215 – 221 (2003).
22. O. B. Skaskiv, *Random gap power series and Wiman's inequality*, Mat. Stud., **30**, № 1, 101 – 106 (2008) (in Ukrainian).
23. O. B. Skaskiv, A. O. Kuryliak, *Direct analogues of Wiman's inequality for analytic functions in the unit disk*, Carpathian Math. Publ., **2**, № 1, 109 – 118 (2010) (in Ukrainian).
24. A. O. Kuryliak, O. B. Skaskiv, I. E. Chyzhykov, *Baire categories and Wiman's inequality for analytic functions*, Bull. Soc. Sci. Lett. Lodz, **62**, № 3, 17 – 33 (2012).
25. O. V. Zrum, O. B. Skaskiv, *On Wiman's inequality for random entire functions of two variables*, Mat. Stud., **23**, № 2, 149 – 160 (2005) (in Ukrainian).
26. P. C. Fenton, *Wiman – Valiron theory in two variables*, Trans. Amer. Math. Soc., **347**, № 11, 4403 – 4412 (1995).
27. A. O. Kuryliak, O. B. Skaskiv, O. V. Zrum, *Lévy's phenomenon for entire functions of several variables*, Ufa Math. J., **6**, № 2, 118 – 127 (2014).
28. J. Gopala Krishna, I. H. Nagaraja Rao, *Generalised inverse and probability techniques and some fundamental growth theorems in $\mathbb{C}^k$*, J. Indian Math. Soc., **41**, 203 – 219 (1977).
29. A. Schumitzky, *Wiman – Valiron theory for functions of several complex variables*, Ph. D. Dissertation, Ithaca, Cornell Univ. (1965).
30. A. Schumitzky, *A probabilistic approach to the Wiman – Valiron theory for entire functions of several complex variables*, Complex Variables, **13**, 85 – 98 (1989).
31. A. O. Kuryliak, O. B. Skaskiv, *Wiman's type inequalities without exceptional sets for random entire functions of several variables*, Mat. Stud., **38**, № 1, 35 – 50 (2012).
32. I. F. Bitlyan, A. A. Goldberg, *Wiman – Valiron's theorem for entire functions of several complex variables*, Vestn. Leningrad Univ. Ser. Mat., Mech. and Astron., **2**, № 131, 27 – 41 (1959) (in Russian).
33. O. B. Skaskiv, O. M. Trakalo, *On classical Wiman's inequality for multiple entire Dirichlet series*, Mat. Metods and Fys.-Mekh. Polya, **43**, № 3, 34 – 39 (2000) (in Ukrainian).
34. A. O. Kuryliak, S. I. Panchuk, O. B. Skaskiv, *Gol'dberg type inequality for entire functions and diagonal maximal term*, Mat. Stud. **54**, № 2, 135 – 145 (2020); DOI:10.30970/ms.54.2.135-145.
35. A. O. Kuryliak, L. O. Shapovalovska, O. B. Skaskiv, *Wiman's type inequality for analytic functions in the polydisc*, Ukr. Math. J., **68**, № 1, 78 – 86 (2016).
36. A. Kuryliak, O. Skaskiv, S. Skaskiv, *Lévy's phenomenon for analytic functions on a polydisk*, Eur. J. Math., **6**, № 1, 138 – 152 (2020); DOI.org/10.1007/s40879-019-00363-2.
37. A. Kuryliak, V. Tsvigun, *Wiman's type inequality for multiple power series in the unbounded cylinder domain*, Mat. Stud., **49**, № 1, 29 – 51 (2018); DOI:10.15330/ms.49.1.29-51.

Одержано 30.01.22