DOI: 10.37863/umzh.v74i7.7138

УДК 517.9

А. В. Дворник, В. І. Ткаченко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЧАСТОТНА СИНХРОНІЗАЦІЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПРИ ІМПУЛЬСНИХ ЗБУРЕННЯХ*

We present sufficient conditions for the frequency locking of an orbitally asymptotically stable periodic solution of a system of autonomous differential equations with small impulsive perturbations. We introduce local coordinates in the neighborhood of stable invariant cycle and prove the existence of a piecewise smooth integral manifold of the perturbed impulsive system. The method of averaging for the impulsive system is applied to the investigation of the equation on the manifold and in order to deduce the conditions of frequency synchronisation.

Отримано умови частотної синхронізації орбітально асимптотично стійкого періодичного розв'язку системи автономних диференціальних рівнянь при малих імпульсних збуреннях. Введено локальні координати в околі стійкого інваріантного циклу і доведено існування кусково-гладкого інтегрального многовиду у збуреної імпульсної системи. Для дослідження поведінки імпульсної системи на збуреному многовиді і отримання умов синхронізації застосовано метод усереднення імпульсних систем.

1. Вступ. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \varepsilon g(x, \omega t), \tag{1}$$

$$x(\tau_k + 0) - x(\tau_k) = \varepsilon g_k(x(\tau_k)), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ і $g_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — C^2-гладкі функції, $\omega > 0$ і $\varepsilon \geq 0$ — параметри. Вважаємо всі розв'язки системи (1), (2) неперервними зліва.

Припускаємо, що незбурена система $dx/dt = f(x)$ має експоненціально орбітально стійкий періодичний розв'язок $x_*(\omega_0 t)$, тобто

$$\frac{dx_*(\omega_0 t)}{dt} = f(x_*(\omega_0 t)), \quad x_*(\varphi + 1) = x_*(\varphi), \qquad \frac{dx_*(\varphi)}{d\varphi} \neq 0.$$

Позначимо через $\mathcal{T}_1$ цикл $\{x_*(\varphi),\ \varphi \in \mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}\}$.

Припускаємо, що функція $g(x, \varphi)$ періодична з періодом 1 по φ й існує таке $m \in \mathbb{Z}$, що $g_{k+m}(x) = g_k(x)$ і $\omega(\tau_{k+m} - \tau_k) = 1$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$. Не зменшуючи загальності, покладемо $\tau_0 = 0$.

Ми отримаємо умови частотної синхронізації частоти ω_0 незбуреного періодичного розв'язку $x_*(\omega_0 t)$ і частоти $\omega \approx \omega_0$ малого імпульсного збурення. Це означає, що для малих ε існують дві гладкі функції $\omega_-(\varepsilon)$ і $\omega_+(\varepsilon)$ з $\omega_+(0) = \omega_-(0) = \omega_0$ і $\omega_+(\varepsilon) - \omega_-(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon > 0$, такі що для $\omega \in (\omega_-(\varepsilon), \omega_+(\varepsilon))$ існує принаймні один асимптотично стійкий кусково-неперервний періодичний розв'язок збуреної системи (1), (2) з частотою ω.

Існує багато досліджень частотної синхронізації для звичайних диференціальних рівнянь з гладким збуренням (див., наприклад, [1 – 7]). У роботі [8] із використанням редукції Ляпунова – Шмідта вивчалася частотна синхронізація для збурення вигляду функції Дірака.

* Виконано при частковій фінансовій підтримці в рамках програми підтримки пріоритетних для держави наукових досліджень і науково-технічних (експериментальних) розробок Відділення математики НАН України на 2022 – 2023 рр. (державний реєстраційний номер 0122U000670).

У даній роботі ми вводимо локальні координати в околі стійкого інваріантного циклу $\mathcal{T}_1$ і доводимо існування кусково-гладкого інтегрального многовиду у збуреної імпульсної системи. Далі, застосовуємо метод усереднення імпульсних систем для дослідження поведінки імпульсної системи на збуреному кусково-неперервному циклі і отримуємо умови синхронізації.

Зазначимо, що такий підхід було застосовано при вивченні синхронної поведінки модульованих коливних розв'язків у S^1-інваріантних диференціальних рівняннях при зовнішньому збуренні модульованою хвилею [9 – 11]. Інтегральні многовиди систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією досліджувалися також у [12 – 14].

Система у варіаціях в околі періодичного розв'язку $x_*(\varphi)$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{1}{\omega_0} \frac{\partial f(x_*(\varphi))}{\partial x} y \tag{3}$$

має періодичний з періодом 1 розв'язок $\dot{x}_*(\varphi) = dx_*(\varphi)/d\varphi$. Оскільки періодичний розв'язок $x_*(\varphi)$ експоненціально орбітально стійкий, спряжена лінійна однорідна система

$$\frac{dy}{d\varphi} = -\frac{1}{\omega_0} \left(\frac{\partial f(x_*(\varphi))}{\partial x} \right)^T y \tag{4}$$

має одновимірну сім'ю нетривіальних 1-періодичних розв'язків. Тут через A^T позначено транспоновану матрицю до A.

Позначимо через $y_*(\varphi)$ такий періодичний розв'язок системи (4), що $y_*^T(\varphi)\dot{x}_*(\varphi) = 1$, $\varphi \in \mathbb{T}^1$. Означимо періодичну функцію

$$G(\varphi) = \int_0^1 y_*^T(\xi + \varphi) g(x_*(\xi + \varphi), \xi) d\xi + \sum_{k=1}^m y_*^T(\varphi + \omega\tau_k) g_k(x_*(\varphi + \omega\tau_k)) \tag{5}$$

і числа

$$G_+ := \max_{\varphi \in [0,1]} G(\varphi), \qquad G_- := \min_{\varphi \in [0,1]} G(\varphi). \tag{6}$$

Будемо вважати, що всі критичні точки функції G невироджені: $G''(\varphi) \neq 0$ для всіх таких φ, що $G'(\varphi) = 0$. Тому множина критичних точок функції G складається з парного числа $2N$ різних точок:

$$\big\{\varphi \in [0,1) : \, G'(\varphi) = 0\big\} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{2N}\}.$$

Множину критичних значень функції G позначимо через $S := \big\{G(\varphi_1), \ldots, G(\varphi_{2N})\big\}$.

Теорема 1. *Нехай* $\varphi_0 \in \mathbb{T}^1$ *і* $G'(\varphi_0) \neq 0$. *Тоді існує таке* $\varepsilon_0 > 0$, *що для всіх* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *система* (1), (2) *має єдиний кусково-неперервний періодичний розв'язок*

$$\tilde{x}_0(\omega t, \varepsilon) = x_*(\omega t + \varphi_0) + \varepsilon \tilde{X}(\omega t, \varepsilon) \tag{7}$$

з частотою $\omega = \omega_0 + \varepsilon G(\varphi_0)$, *а функція* $\tilde{X}$ *періодична з періодом* 1 *щодо* ωt *і неперервно диференційовна при* $t \neq \tau_k$. *Цей розв'язок асимптотично стійкий, якщо* $G'(\varphi_0) < 0$.

Теорема 2. *Для довільного* $\nu > 0$ *існує таке* $\varepsilon_0 > 0$, *що для всіх* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *і*

$$G_- < \frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon} < G_+, \qquad \operatorname{dist}\left(\frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon}, S\right) \geq \nu \tag{8}$$

справджуються такі твердження:

i) *система* (1), (2) *має парне число кусково-неперервних періодичних розв'язків* $\tilde{x}_j(\omega t, \varepsilon)$, $j = 1, \ldots, 2\tilde{N}(\omega, \varepsilon)$, $0 < \tilde{N}(\omega, \varepsilon) \leq N$, *вигляду*

$$\tilde{x}_j(\omega t, \varepsilon) = x_*(\omega t + \vartheta_j) + \varepsilon X_j(\omega t, \varepsilon),$$

де сталі $\vartheta_j = \vartheta_j(\varepsilon)$ *визначаються як розв'язки рівняння* $\omega - \omega_0 = \varepsilon G(\vartheta_j)$, *а функції* X_j *періодичні з періодом* 1 *щодо* ωt *і неперервно диференційовні при* $t \neq \tau_k$;

ii) *існує таке* $\delta > 0$, *що розв'язки* $x(t)$ *системи* (1), (2) *з* $\operatorname{dist}(x(t_0), \mathcal{T}_1) < \delta$ *для деякого* $t_0 \in \mathbb{R}$ *прямують до одного з розв'язків* $\tilde{x}_j(\omega t, \varepsilon)$ *при* $t \to \infty$.

2. Локальні координати. Для введення локальних координат в околі інваріантного циклу $\mathcal{T}_1$ використаємо метод роботи [15] (див. також [16]). Позначимо через $\mathfrak{Z}$ тривіальне векторне розшарування над $\mathbb{T}^1$ з шаром $\mathbb{R}^n$. Розглянемо відповідний (3) потік на $\mathfrak{Z}$ з часом φ:

$$(x_0, \varphi_0) \to \big(\Omega(\varphi, \varphi_0)x_0, \varphi + \varphi_0\big), \tag{9}$$

де $\Omega(\varphi, \varphi_0)$ — фундаментальний розв'язок лінійної системи (3), такий що $\Omega(\varphi_0, \varphi_0) = I_n$, I_n — одинична матриця розмірності n. Векторне розшарування $\mathfrak{Z}$ є сумою двох підрозшарувань $\mathfrak{Z}_1$ і $\mathfrak{Z}_2$, які інваріантні по відношенню до потоку (9). Одновимірне розшарування $\mathfrak{Z}_1$ утворюється періодичними розв'язками системи (3), які пропорційні розв'язку $\dot{x}_*(\varphi)$. Розв'язки з доповнюючого підрозшарування $\mathfrak{Z}_2$ експоненціально прямують до нуля при $\varphi \to \infty$. Оскільки підрозшарування $\mathfrak{Z}_1$ тривіальне, підрозшарування $\mathfrak{Z}_2$ стабільно тривіальне. За результатами [17, с. 117] стабільно тривіальне векторне розшарування, в якого розмірність шару більша за розмірність бази, тривіальне. Тому якщо $n \geq 3$, то $(n-1)$-вимірне розшарування $\mathfrak{Z}_2$ тривіальне й існує гладке відображення $\Phi_0 : \mathbb{T}^1 \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}^n)$, яке є ізоморфізмом між $\mathfrak{Z}_2$ і $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$. У випадку $n = 2$ існування гладкої періодичної функції $\Phi_0(\varphi)$ можна показати безпосередніми обчисленнями.

За побудовою $(n \times n)$-матриця

$$\Phi_1(\varphi) = \big\{\dot{x}_*(\varphi), \Phi_0(\varphi)\big\} \tag{10}$$

невироджена при всіх φ. Заміною змінних $y = \Phi_1(\varphi)z$, $z = (z_1, z_2)$, $z_1 \in \mathbb{R}$, $z_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$, система (3) трансформується у систему

$$\frac{dz}{d\varphi} = \operatorname{diag}\left\{0, \frac{A_0(\varphi)}{\omega_0}\right\} z$$

з 1-періодичною $((n-1) \times (n-1))$-матрицею $A_0(\varphi)$. Підсистема

$$\frac{dz_2}{dt} = A_0(\omega_0 t)z_2$$

експоненціально стійка, її матрицант $X_0(t, t_0), X_0(t_0, t_0) = I$, задовольняє оцінку

$$\big\|X_0(t, t_0)\big\| \leq K e^{-\alpha(t - t_0)}, \quad t \geq t_0,$$

з деякими сталими $\alpha > 0$ і $K \geq 1$.

Спряжена система (4) має аналогічні властивості. Оскільки скалярний добуток довільного розв'язку системи (3) і довільного розв'язку спряженої системи однаковий для всіх φ, можна перевірити, що матриця $\Phi_1^{-1}(\varphi)$ має форму $\Phi_1^{-1}(\varphi) = \{y_*(\varphi), \tilde{\Phi}_0(\varphi)\}^T$, де $((n-1)\times n)$-матриця $\tilde{\Phi}_0(\varphi)$ періодична з періодом 1; $((n-1)\times n)$-матриця $\Phi_0(\varphi)$ задовольняє співвідношення

$$\frac{d\Phi_0(\varphi)}{d\varphi} + \frac{1}{\omega_0}\Phi_0(\varphi)A_0(\varphi) = \frac{1}{\omega_0}\frac{\partial f(x_*(\varphi))}{\partial x}\Phi_0(\varphi). \tag{11}$$

Введемо нові координати φ і h в околі циклу $\mathcal{T}_1$ формулою

$$x = x_*(\varphi) + \Phi_0(\varphi)h, \tag{12}$$

де $h \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\|h\| \le \rho$, $\rho = \mathrm{const} > 0$, а матриця $\Phi_0(\varphi)$ визначається з формули (10).

Підставляючи (12) в (1), отримуємо

$$\begin{gathered}\left(\frac{dx_*(\varphi)}{d\varphi} + \frac{d\Phi_0(\varphi)}{d\varphi}h\right)\frac{d\varphi}{dt} + \Phi_0(\varphi)\frac{dh}{dt} = \\ = f(x_*(\varphi) + \Phi_0(\varphi)h) + \varepsilon g(x_*(\varphi) + \Phi_0(\varphi)h, \omega t).\end{gathered} \tag{13}$$

Враховуючи (3) і (11), записуємо (13) у вигляді

$$\begin{gathered}\left(\frac{dx_*(\varphi)}{d\varphi} + \frac{d\Phi_0(\varphi)}{d\varphi}h\right)\left(\frac{d\varphi}{dt} - \omega_0\right) + \Phi_0(\varphi)\left(\frac{dh}{dt} - A_0(\varphi)h\right) = \\ = f(x_*(\varphi) + \Phi_0(\varphi)h) - f(x_*(\varphi)) - \frac{\partial f(x_*(\varphi))}{\partial x}\Phi_0(\varphi)h + \varepsilon g(x_*(\varphi) + \Phi_0(\varphi)h, \omega t).\end{gathered} \tag{14}$$

Оскільки за побудовою

$$\det\left[\frac{dx_*(\varphi)}{d\varphi}, \Phi_0(\varphi)\right] \ne 0, \quad \varphi \in \mathbb{T}^1,$$

то для досить малих h існує обернена матриця

$$\left[\frac{dx_*(\varphi)}{d\varphi} + \frac{d\Phi_0(\varphi)}{d\varphi}h, \Phi_0(\varphi)\right]^{-1} = \begin{bmatrix} y_*^T(\varphi) \\ \tilde{\Phi}_0^T(\varphi)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\tilde{H}_1(h,\varphi) \\ \tilde{H}_2(h,\varphi)\end{bmatrix}, \tag{15}$$

де C^1-гладка матрична функція $\tilde{H}(h,\varphi) = \mathcal{O}(\|h\|)$ періодична по φ.

Отже, рівняння (14) може бути розв'язане щодо похідних $d\varphi/dt$ і dh/dt:

$$\begin{gathered}\frac{dh}{dt} = A_0(\varphi)h + \big(\tilde{\Phi}_0^T(\varphi) + \tilde{H}_2(h,\varphi)\big)F(h,\varphi) + \\ + \varepsilon\,\big(\tilde{\Phi}_0^T(\varphi) + \tilde{H}_2(h,\varphi)\big)g(x_*(\varphi) + \Phi_0(\varphi)h, \omega t), \\ \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \big(y_*^T(\varphi) + \tilde{H}_1(h,\varphi)\big)F(h,\varphi) + \\ + \varepsilon\,\big(y_*^T(\varphi) + \tilde{H}_1(h,\varphi)\big)g(x_*(\varphi) + \Phi_0(\varphi)h, \omega t),\end{gathered} \tag{16}$$

де

$$F(h,\varphi)=f(x_*(\varphi)+\Phi_0(\varphi)h)-f(x_*(\varphi))-\frac{\partial f(x_*(\varphi))}{\partial x}\Phi_0(\varphi)h=\mathcal{O}(\|h\|^2).$$

Позначимо через $\hat{F}$ функцію, яка задає імпульсну дію (2) після заміни змінних (12):

$$\begin{gathered}\hat{F}(\Delta\varphi_k,\Delta h_k,\varphi_k,h_k,\varepsilon)=x_*(\varphi_k+\Delta\varphi_k)+\Phi_0(\varphi_k+\Delta\varphi_k)(h_k+\Delta h_k)-\\-x_*(\varphi_k)-\Phi_0(\varphi_k)h_k-\varepsilon g_k(x_*(\varphi_k)+\Phi_0(\varphi_k)h_k)=0,\end{gathered}\tag{17}$$

де $\varphi_k=\varphi(\tau_k),\ \Delta\varphi_k=\varphi(\tau_k+0)-\varphi(\tau_k),\ h_k=h(\tau_k),\ \Delta h_k=h(\tau_k+0)-h(\tau_k)$. Похідна

$$\left[\frac{\partial\hat{F}(0,0,\varphi_k,h_k,0)}{\partial(\Delta\varphi_k)},\frac{\partial\hat{F}(0,0,\varphi_k,h_k,0)}{\partial(\Delta h_k)}\right]=\left[\frac{dx_*(\varphi_k)}{d\varphi}+\frac{d\Phi_0(\varphi_k)}{d\varphi}h_k,\Phi_0(\varphi_k)\right]$$

невироджена при досить малих h, тому з (15) отримуємо

$$\left[\frac{dx_*(\varphi_k)}{d\varphi}+\frac{d\Phi_0(\varphi_k)}{d\varphi}h_k,\Phi_0(\varphi_k)\right]^{-1}=\begin{bmatrix}y_*^T(\varphi_k)\\ \tilde{\Phi}_0^T(\varphi_k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\tilde{H}_1(h_k,\varphi_k)\\ \tilde{H}_2(h_k,\varphi_k)\end{bmatrix}.$$

Тоді за теоремою про неявну функцію існують такі інтервал $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ і функції $\Delta\varphi_k(\varepsilon)$, $\Delta h_k(\varepsilon)$, що

$$\hat{F}\big(\Delta\varphi_k(\varepsilon),\Delta h_k(\varepsilon),\varphi_k,h_k,\varepsilon\big)=0,\quad \varepsilon\in(0,\varepsilon_0).$$

Якщо $\hat{F}\in C^1$ у околі $(0,0)$ і $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, то $\Delta\varphi_k(\varepsilon)$ і $\Delta h_k(\varepsilon)$ також C^1-гладкі.

З (17) випливає, що

$$\begin{bmatrix}d\Delta\varphi_k(\varepsilon)/d\varepsilon\\ d\Delta h_k(\varepsilon)/d\varepsilon\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_*^T(\varphi_k)+\tilde{H}_1(h_k,\varphi_k)\\ \tilde{\Phi}_0^T(\varphi_k)+\tilde{H}_2(h_k,\varphi_k)\end{bmatrix}g_k(x_*(\varphi_k)+\Phi_0(\varphi_k)h_k).$$

Розкладаючи $\Delta h_k(\varepsilon)$ і $\Delta\varphi_k(\varepsilon)$ за формулою Тейлора, одержуємо

$$\begin{aligned}\Delta h_k(\varepsilon)&=\varepsilon\Phi_0^T(\varphi_k)g_k(x_*(\varphi_k))+\varepsilon R_{11}(h_k,\varphi_k)+\varepsilon^2R_{12}(h_k,\varphi_k,\varepsilon),\\ \Delta\varphi_k(\varepsilon)&=\varepsilon y_*^T(\varphi_k)g_k(x_*(\varphi_k))+\varepsilon R_{21}(h_k,\varphi_k)+\varepsilon^2R_{22}(h_k,\varphi_k,\varepsilon),\end{aligned}\tag{18}$$

де $R_{11}(h_k,\varphi_k)=\mathcal{O}(\|h_k\|),\quad R_{21}(h_k,\varphi_k)=\mathcal{O}(\|h_k\|)$.

Система рівнянь (16) з імпульсною дією (18) еквівалентна системі (1), (2) в деякому околі періодичного розв'язку $x_*(\omega_0 t)$.

3. Існування збуреного многовиду. Поклавши $\psi=\omega t$ у системі (16), (18), отримаємо систему автономних рівнянь

$$\begin{aligned}&\frac{dh}{dt}=A_0(\varphi)h+Q_1(h,\varphi,\psi,\varepsilon),\\ &\frac{d\varphi}{dt}=\omega_0+Q_2(h,\varphi,\psi,\varepsilon),\qquad \frac{d\psi}{dt}=\omega,\\ &\Delta h|_{(\varphi,\psi)\in\Gamma}=\varepsilon R_1(h,\varphi,\psi,\varepsilon),\\ &\Delta\varphi|_{(\varphi,\psi)\in\Gamma}=\varepsilon R_2(h,\varphi,\psi,\varepsilon),\end{aligned}\tag{19}$$

де $(\varphi,\psi)\in\mathbb{T}^2=\mathbb{T}^1\times\mathbb{T}^1$. Многовид Γ має вигляд

$$\Gamma=\cup_j\Gamma_j\subset\mathbb{T}^2,\quad \Gamma_j=\big\{\varphi\in\mathbb{T}^1,\ \psi=\omega\tau_j\ (\mathrm{mod}\,1)\big\}.$$

Величини Δh і $\Delta\varphi$ визначають стрибки відповідно функцій h і φ в точці $(\varphi,\psi)\in\Gamma$, отриманих при русі вздовж траєкторій рівнянь щодо φ і ψ. Ми використовуємо позначення

$$Q_1(h,\varphi,\psi,\varepsilon)=\big(\tilde\Phi_0^T(\varphi)+\tilde H_2(h,\varphi)\big)F(h,\varphi)+\varepsilon\big(\tilde\Phi_0^T(\varphi)+\tilde H_2(h,\varphi)\big)g(x_*(\varphi)+\Phi_0(\varphi)h,\psi),$$

$$Q_2(h,\varphi,\psi,\varepsilon)=\big(y_*^T(\varphi)+\tilde H_1(h,\varphi)\big)F(h,\varphi)+\varepsilon\big(y_*^T(\varphi)+\tilde H_1(h,\varphi)\big)g(x_*(\varphi)+\Phi_0(\varphi)h,\psi)=$$

$$=\varepsilon y_*^T(\varphi)g(x_*(\varphi),\psi)+Q_{20}(h,\varphi,\psi,\varepsilon),$$

$$R_1(h,\varphi,\psi,\varepsilon)=\Phi_0^T(\varphi)\tilde g(x_*(\varphi),\psi)+R_{11}(h,\varphi,\psi)+\varepsilon R_{12}(h,\varphi,\psi,\varepsilon),$$

$$R_2(h,\varphi,\psi,\varepsilon)=y_*^T(\varphi)\tilde g(x_*(\varphi),\psi)+R_{21}(h,\varphi,\psi)+\varepsilon R_{22}(h,\varphi,\psi,\varepsilon),$$

$$\tilde g\colon\Gamma\to\mathbb{R}^n,\quad \tilde g(\varphi,\psi)=g_k(x_*(\varphi)),\quad \text{якщо}\quad \psi\in\Gamma_k.$$

Ці функції мають такі властивості:

$$Q_1(h,\varphi,\psi,0)=\mathcal{O}(\|h\|^2),\qquad Q_{20}(h,\varphi,\psi,\varepsilon)=Q_{21}(h,\varphi,\psi)+\varepsilon Q_{22}(h,\varphi,\psi,\varepsilon),$$

$$Q_{21}(h,\varphi,\psi)=\mathcal{O}(\|h\|^2),\qquad Q_{22}(h,\varphi,\psi,\varepsilon)=\mathcal{O}(\|h\|),$$

$$R_{11}(h,\varphi,\psi)=\mathcal{O}(\|h\|),\qquad R_{21}(h,\varphi,\psi)=\mathcal{O}(\|h\|).$$

Функції Q_1 і Q_2 є C^1-гладкими по $(\varphi,\psi)\in\mathbb{T}^2,\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ і $h,\|h\|\le\rho$, а функції R_1 і R_2 — C^1-гладкими по $(\varphi,\psi)\in\Gamma,\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ і $h,\|h\|\le\rho$.

$C^s(\mathbb{T}^2)$ — це простір s разів неперервно диференційовних функцій чи матриць, означених на $\mathbb{T}^2$. Через $C^s_\Gamma(\mathbb{T}^2)$ позначимо простір функцій чи матриць $a(\varphi,\psi)$ з такими властивостями:

i) $a(\varphi,\psi)$ має неперервні частинні похідні по φ,ψ до s-го порядку для $(\varphi,\psi)\in\mathbb{T}^2\setminus\Gamma$,

ii) всі частинні похідні $a(\varphi,\psi)$ мають неперервні продовження до лівої та правої сторін многовиду Γ.

Для $a\in C^s_\Gamma(\mathbb{T}^2)$ означимо норму

$$\|a\|_{C^s}=\max_{0\le|j|\le s}\ \sup_{(\varphi,\psi)\in\mathbb{T}^2\setminus\Gamma}\left\|\frac{\partial^{|j|}a(\varphi,\psi)}{\partial\varphi^{j_1}\partial\psi^{j_2}}\right\|,$$

де $j=(j_1,j_2)$, $|j|=j_1+j_2$.

Позначимо через $\mathcal{F}_\rho$ простір функцій $w\colon\mathbb{T}^2\times[0,\varepsilon_0)\to\mathbb{R}^{n-1}$ з такими властивостями:

i) функції задовольняють умову Ліпшиця при $(\varphi,\psi)\in\mathbb{T}^2\setminus\Gamma$ і $\|w\|_C\le\rho$, $\mathcal{L}_{(\varphi,\psi)}w\le\rho$ і $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)$, $\mathcal{L}_{(\varphi,\psi)}w$ — стала Ліпшиця функції w по змінних φ, ψ, до того ж у нерівності $\big\|w(\varphi,\psi_1)-w(\varphi,\psi_2)\big\|\le\mathcal{L}|\psi_1-\psi_2|$ розглядаються лише ті пари точок ψ_1 і ψ_2, які належать тій самій області неперервності w;

ii) функції $w(\varphi,\psi,\varepsilon)$ неперервні по ε.

Теорема 3. *Для $\varepsilon\in[0,\varepsilon_1)$ з досить малим $\varepsilon_1\le\varepsilon_0$ імпульсна система* (19) *має інваріантний многовид*

$$\mathfrak{M}_\varepsilon=\big\{(h,\varphi,\psi)\colon h=\varepsilon u_*(\varphi,\psi,\varepsilon),\ \ (\varphi,\psi)\in\mathbb{T}^2,\ \ t\in\mathbb{R}\big\},$$

де функція u_* періодична по φ і ψ з періодом 1, неперервно диференційовна по $(\varphi, \psi) \in \mathbb{T}^2 \setminus \Gamma$, $0 \le \varepsilon < \varepsilon_1$, має розриви першого роду при $(\varphi, \psi) \in \Gamma$, $0 \le \varepsilon < \varepsilon_1$, і задовольняє оцінку $\|u\|_{C^1} \le M_0$ з додатною сталою M_0, яка не залежить від ε.

Інваріантний многовид $\mathfrak{M}_\varepsilon$ асимптотично стійкий, а саме, існує таке $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon_1)$, що для кожного початкового значення (h_0, φ_0, ψ_0) з $\|h_0\| \le \nu_0$ існує єдине значення φ_1 таке, що

$$\begin{aligned} &\big|\varphi(t, h_0, \varphi_0, \psi_0, \varepsilon) - \varphi_*(t, \varphi_1, \psi_0, \varepsilon)\big| + \\ &+ \ \big\|h(t, h_0, \varphi_0, \psi_0, \varepsilon) - \varepsilon u_*(\varphi_*(t, \varphi_1, \psi_0, \varepsilon), \psi(t), \varepsilon)\big\| \le \\ &\le Le^{-\kappa t}\big(\|\varphi_0 - \varphi_1\| + \|h_0 - \varepsilon u_*(\varphi_1, \psi_0, \varepsilon)\|\big), \quad t \ge 0, \end{aligned} \tag{20}$$

де додатні сталі L і κ не залежать від ω, ε, а $\varphi_*(t, \varphi_1, \psi_0, \varepsilon)$, $\varphi_*(0, \varphi_1, \psi_0, \varepsilon) = \varphi_1$, — розв'язок системи рівнянь на многовиді

$$\begin{aligned} &\frac{d\varphi_*}{dt} = \omega_0 + Q_2(\varepsilon u_*(\varphi_*, \psi, \varepsilon), \varphi_*, \psi, \varepsilon), \qquad \frac{d\psi}{dt} = \omega, \\ &\Delta\varphi_*|_{(\varphi,\psi)\in\Gamma} = \varepsilon R_2(\varepsilon u_*(\varphi_*, \psi, \varepsilon), \varphi_*, \psi, \varepsilon). \end{aligned} \tag{21}$$

Доведення. Нехай $v \in \mathcal{F}_\rho$. Позначимо через $\varphi^v(t, \varphi_0, \psi_0, \varepsilon)$, $\psi(t, \psi_0)$ розв'язки з початковими значеннями $\varphi^v(0, \varphi_0, \psi_0, \varepsilon) = \varphi_0$, $\psi(0, \psi_0) = \psi_0$ системи рівнянь на торі $\mathbb{T}^2$:

$$\begin{aligned} &\frac{d\varphi^v}{dt} = \omega_0 + Q_2(v(\varphi^v, \psi, \varepsilon), \varphi^v, \psi, \varepsilon), \qquad \frac{d\psi}{dt} = \omega, \\ &\Delta\varphi^v|_{(\varphi,\psi)\in\Gamma} = \varepsilon R_2(v(\varphi^v, \psi, \varepsilon), \varphi^v, \psi, \varepsilon). \end{aligned}$$

Позначимо через $\tau_k^0(\psi_0) = \tau_k - \psi_0/\omega$, $k \in \mathbb{Z}$, моменти часу перетину цих розв'язків із многовидом Γ і $\varphi_k^v = \varphi^v\big(\tau_k^0, \varphi_0, \psi_0, \varepsilon\big)$, $\psi_k^0 = \psi\big(\tau_k^0, \psi_0\big) = \psi_0 + \omega\tau_k^0 = \omega\tau_k$. Якщо $v \in \mathcal{F}_\rho$, то розв'язок $\varphi^v(t, \varphi_0, \psi_0, \varepsilon)$ однозначно визначений і неперервно диференційовний по φ_0 і ψ_0 для $(\varphi_0, \psi_0) \notin \Gamma$ і має розриви першого роду по t при $t = \tau_k^0(\psi_0)$.

Лінійна система

$$\frac{dh}{dt} = A_0\big(\varphi^v(t, \varphi_0, \psi_0, \varepsilon)\big)h \tag{22}$$

має фундаментальний розв'язок $U^v(t, \tau, \varphi_0, \psi_0, \varepsilon)$, $U^v(\tau, \tau, \varphi_0, \psi_0, \varepsilon) = I_{n-1}$. Існують такі ε_1 і ρ_1, що для $\varepsilon \le \varepsilon_1$ і $\rho \le \rho_1$ існують сталі $\alpha_1 > 0$ і $K_1 \ge 1$ такі, що

$$\big\|U^v(t, \tau, \varphi_0, \psi_0, \varepsilon)\big\| \le K_1 e^{-\alpha_1(t-\tau)}, \quad t \ge \tau. \tag{23}$$

Справді, оскільки за умовою теореми незбурена система експоненціально стійка з показниками α і K, для неї існує додатно означена квадратична функція Ляпунова $\mathcal{V} = \langle S(\varphi_0)h, h\rangle$ з матрицею $S(\varphi_0) = \displaystyle\int_0^\infty \big(U^0(0, \tau, \varphi_0, \psi_0, 0)\big)^T U^0(0, \tau, \varphi_0, \psi_0, 0)d\tau$, похідна якої в силу незбуреної системи від'ємно означена [19, с. 121]. Тут $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярний добуток в $\mathbb{R}^{n-1}$. Легко перевірити, що при малих ε і v похідна функції $\mathcal{V}$ в силу збуреної системи (22) також від'ємно означена. За результатами [19, с. 123] система (22) експоненціально стійка.

Для $h \in \mathcal{F}_\rho$ функції Q_i, R_i, $i = 1, 2$, задовольняють оцінки

$$\|Q_i\| \le \|h\|^2 M_1 + \varepsilon M_1, \qquad \|R_i\| \le M_1, \qquad \mathcal{L}_h Q_i \le \|h\| M_1, \qquad \mathcal{L}_h R_i \le M_1,$$

$$\mathcal{L}_{(\varphi,\psi)}Q_i \le \|h\|^2 M_1 + \varepsilon M_1, \qquad \mathcal{L}_{(\varphi,\psi)}R_i \le M_1$$

зі сталою M_1, яка не залежить від ε.

Для доведення існування інваріантного многовиду для системи (19) розглянемо таке відображення T для $v \in \mathcal{F}_\rho$:

$$[Tv](\varphi_0,\psi_0,\varepsilon) = \int\limits_{-\infty}^{0} U^v(0,\tau,\varphi_0,\psi_0,\varepsilon)Q_1\big(v(\varphi^v(\tau),\psi(\tau),\varepsilon),\varphi^v(\tau),\psi(\tau),\varepsilon\big)d\tau +$$

$$+\ \varepsilon \sum_{\tau_k^0<0} U^v\big(0,\tau_k^0,\varphi_0,\psi_0,\varepsilon\big)R_1\big(v(\varphi_k^v,\omega\tau_k,\varepsilon),\varphi_k^v,\omega\tau_k,\varepsilon\big).$$

Розглянемо підмножину $\mathcal{F}_{\varepsilon a_0}$ множини $\mathcal{F}_\rho$, яка складається з функцій v з $\|v(.,.,\varepsilon)\|_C \le \varepsilon a_0, \mathcal{L}_{(\varphi,\psi)}v(.,.,\varepsilon) \le \varepsilon a_0$, де a_0 — деяка додатна стала. Покажемо, що існує таке a_0, що при досить малих ε відображення

$$T : \mathcal{F}_{\varepsilon a_0} \to \mathcal{F}_{\varepsilon a_0} \tag{24}$$

означене коректно. З (23) випливає, що

$$\|Tv\|_C \le \frac{K_1 M_1}{\alpha_1}(\varepsilon^2 a_0^2 + \varepsilon) + \frac{\varepsilon K_1 M_1}{1 - e^{-\alpha_1\theta}}, \tag{25}$$

де $\theta \le \tau_k - \tau_{k-1},\ k \in \mathbb{Z}$. З (21) отримуємо

$$\varphi^v(t,\varphi^1,\psi^1,\varepsilon) - \varphi^v(t,\varphi^2,\psi^2,\varepsilon) = \varphi_1^v(t) - \varphi_2^v(t) =$$

$$= \varphi^1 - \varphi^2 + \int\limits_0^t \big(Q_2(v(\varphi_1^v(s),\psi^1(s),\varepsilon),\varphi_1^v(s),\psi^1(s),\varepsilon) -$$

$$- Q_2\ \big(v(\varphi_2^v(s),\psi^2(s),\varepsilon),\varphi_2^v(s),\psi^2(s),\varepsilon\big)\big)ds +$$

$$+ \sum_{0\le\tau_k^1<t} \varepsilon R_2\big(v(\varphi_k^1,\omega\tau_k,\varepsilon),\varphi_k^1,\omega\tau_k,\varepsilon\big) - \sum_{0\le\tau_k^2<t} \varepsilon R_2\big(v(\varphi_k^2,\omega\tau_k,\varepsilon),\varphi_k^2,\omega\tau_k,\varepsilon\big),$$

де

$$\psi^1(s) = \psi^1 + \omega s, \qquad \psi^2(s) = \psi^2 + \omega s,$$

$$\varphi_k^1 = \varphi^v(\tau_k^1,\varphi^1,\psi^1,\varepsilon), \qquad \varphi_k^2 = \varphi^v(\tau_k^2,\varphi^2,\psi^2,\varepsilon), \qquad \tau_k^1 = \tau_k - \psi^1/\omega, \qquad \tau_k^2 = \tau_k - \psi^2/\omega.$$

Припустимо для визначеності, що $\psi^1 > \psi^2$, до того ж точки ψ^1 і ψ^2 належать одному і тому ж інтервалу $(\tau_j,\tau_{j+1}]$ для деякого j. Тоді за побудовою моменти перетину розв'язків $\psi^1(t)$ і $\psi^2(t)$ з многовидом Γ задовольняють нерівності $\tau_k^1 < \tau_k^2$ для всіх k.

Введемо множини

$$\mathcal{J} = \cup_j \mathcal{J}_j, \qquad \mathcal{I} = \cup_j \mathcal{I}_j,$$

де $\mathcal{J}_j = \big(\tau_{j-1}^2,\tau_j^1\big]$, $\mathcal{I}_j = \big(\tau_j^1,\tau_j^2\big]$. Нехай $t \in \mathcal{J}_p = \big(\tau_{p-1}^2,\tau_p^1\big]$. Тоді

$$|\varphi_1^v(t)-\varphi_2^v(t)| \le |\varphi^1-\varphi^2| + \sum_{j=1}^{p} \int\limits_{I_j\cap[0,t]} 2\varepsilon M_1(\varepsilon a_0^2+1)ds +$$

$$+ \sum_{j=1}^{p} \int\limits_{J_j\cap[0,t]} (\varepsilon a_0 \mathcal{L}_h Q_2 + \mathcal{L}_{(\varphi,\psi)} Q_2)\left(|\varphi_1^v(s)-\varphi_2^v(s)| + |\psi^1-\psi^2|\right) ds +$$

$$+ \sum_{j=1}^{p} \varepsilon(\varepsilon a_0 \mathcal{L}_h R_2 + \mathcal{L}_{(\varphi,\psi)} R_2)\left(|\varphi_k^1-\varphi_k^2| + |\psi^1-\psi^2|\right). \qquad (26)$$

Спочатку оцінимо $\left|\varphi_k^1-\varphi_k^2\right|$:

$$|\varphi_k^1-\varphi_k^2| \le \left|\varphi^v(\tau_k^1,\varphi^1,\psi^1,\varepsilon)-\varphi^v(\tau_k^1,\varphi^2,\psi^2,\varepsilon)\right| + \left|\varphi^v(\tau_k^1,\varphi^2,\psi^2,\varepsilon)-\varphi^v(\tau_k^2,\varphi^2,\psi^2,\varepsilon)\right| \le$$
$$\le \left|\varphi_1^v(\tau_k^1)-\varphi_2^v(\tau_k^1)\right| + \left|\varphi_2^v(\tau_k^1)-\varphi_2^v(\tau_k^2)\right| \le \left|\varphi_1^v(\tau_k^1)-\varphi_2^v(\tau_k^1)\right| + \varepsilon M_1(\varepsilon a_0^2+1)|\psi^1-\psi^2|.$$

Проведемо перетворення у (26):

$$\left|\varphi^v(t,\varphi^1,\psi^1,\varepsilon)-\varphi^v(t,\varphi^2,\psi^2,\varepsilon)\right| \le$$
$$\le |\varphi^1-\varphi^2| + t\big(\varepsilon a_0\mathcal{L}_h Q_2 + \mathcal{L}_{(\varphi,\psi)}Q_2\big)|\psi^1-\psi^2| +$$
$$+ \big(2\varepsilon M_1(\varepsilon a_0^2+1) + \varepsilon(\varepsilon a_0\mathcal{L}_h R_2 + \mathcal{L}_{(\varphi,\psi)}R_2)(1+M_1(\varepsilon a_0^2+1))\big)p|\psi^1-\psi^2| +$$
$$+ \int\limits_0^t \big(\varepsilon a_0\mathcal{L}_h Q_2 + \mathcal{L}_{(\varphi,\psi)}Q_2\big)|\varphi^v(s)-\varphi^v(s)|ds +$$
$$+ \sum_{j=1}^{p} (\varepsilon a_0\mathcal{L}_h R_2 + \mathcal{L}_{(\varphi,\psi)}R_2)|\varphi^v(\tau_j^1)-\varphi^v(\tau_j^1)|.$$

Застосувавши до останньої формули узагальнену нерівність Гроноулла для імпульсних систем [18, с. 12], отримаємо оцінки

$$\left|\varphi^v(t,\varphi^1,\psi^1,\varepsilon)-\varphi^v(t,\varphi^2,\psi^2,\varepsilon)\right| \le L_1\left(|\varphi^1-\varphi^2| + |\psi^1-\psi^2|\right)e^{\varepsilon\kappa_1 t}, \quad t\in J, \qquad (27)$$

$$\left\|U^v(t,\tau,\varphi^1,\psi^1,\varepsilon)-U^v(t,\tau,\varphi^2,\psi^2,\varepsilon)\right\| = \left\|U_1^v(t,\tau)-U_2^v(t,\tau)\right\| \le$$
$$\le \int\limits_\tau^t \|U_1^v(t,s)\| \left\|A_0(\varphi^v(s,\varphi^1,\psi^1,\varepsilon)) - A_0(\varphi^v(s,\varphi^2,\psi^2,\varepsilon))\right\| \|U_2^v(s,\tau)\|ds \le$$
$$\le \int\limits_{J_j\cap[0,t]} K_1e^{-\alpha_1(t-s)}\|A_0\|_{C^1}L_1e^{\varepsilon\kappa_1 s}K_1e^{-\alpha_1(s-\tau)}ds\left(|\varphi^1-\varphi^2| + |\psi^1-\psi^2|\right) +$$
$$+ \int\limits_{I_j\cap[0,t]} 2K_1^2e^{-\alpha_1(t-s)}\|A_0\|_C e^{-\alpha_1(s-\tau)}ds \le$$
$$\le K_2e^{-\alpha_2(t-\tau)}\left(|\varphi^1-\varphi^2| + |\psi^1-\psi^2|\right), \qquad (28)$$

де додатні сталі $\kappa_1,\ L_1,\ \alpha_2 \le \alpha_1$ і K_2 не залежать від ε.

Використовуючи останні нерівності, оцінюємо сталу Ліпшиця для Tv :

$$\big\|[Tv](\varphi^1,\psi^1)-[Tv](\varphi^2,\psi^2)\big\|\leq$$

$$\leq\int\limits_{-\infty}^{0}\big\|U_1^v(0,\tau)-U_2^v(0,\tau)\big\|\big\|Q_1(v(\varphi_1^v(\tau),\psi_1(\tau),\varepsilon),\varphi_1^v(\tau),\psi_1(\tau),\varepsilon)\big\|d\tau+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{0}\|U_2^v(0,\tau)\|\big\|Q_1(v(\varphi_1^v(\tau),\psi_1(\tau),\varepsilon),\varphi_1^v(\tau),\psi_1(\tau),\varepsilon)-$$

$$-Q_1\,(v(\varphi_2^v(\tau),\psi_2(\tau),\varepsilon),\varphi_2^v(\tau),\psi_2(\tau),\varepsilon)\big\|d\tau+$$

$$+\ \varepsilon\sum_{\tau_k^2<0}\big\|U_1^v(0,\tau_k^1)-U_2^v(0,\tau_k^2)\big\|\big\|R_1(v(\varphi_k^1,\psi_k^1,\varepsilon),\varphi_k^1,\psi_k^1,\varepsilon)\big\|+$$

$$+\ \varepsilon\sum_{\tau_k^2<0}\|U_2^v(0,\tau_k^2)\|\big\|R_1(v(\varphi_k^1,\psi_k^1,\varepsilon),\varphi_k^1,\psi_k^1,\varepsilon)-R_1(v(\varphi_k^2,\psi_k^2,\varepsilon),\varphi_k^2,\psi_k^2,\varepsilon)\big\|\leq$$

$$\leq\left(\frac{K_2}{\alpha_2}\varepsilon M_1(\varepsilon a_0^2+1)+\frac{K_1}{\alpha_1}(\varepsilon a_0\mathcal{L}_hQ_1+\mathcal{L}_{(\varphi,\psi)}Q_1)\right)\big(|\varphi^1-\varphi^2|+|\psi^1-\psi^2|\big)+$$

$$+\ \varepsilon\left[\frac{M_1K_2}{1-e^{-\alpha_2\theta}}+\frac{\varepsilon M_1(\varepsilon a_0^2+1)+\mathcal{L}_hR_1+\mathcal{L}_{(\varphi,\psi)}R_1}{1-e^{-\alpha_1\theta}}\right]\big(|\varphi^1-\varphi^2|+|\psi^1-\psi^2|\big).\qquad(29)$$

З (25) і (29) випливає, що існують такі додатні сталі a_0 і $\varepsilon_1\leq\varepsilon_0$, що для $\varepsilon\leq\varepsilon_1$ відображення (24) означене коректно.

Тепер доведемо, що T є відображенням стиску на множині $F_{a_0\varepsilon}$ для всіх $\varepsilon\leq\varepsilon_1$ з деяким досить малим ε_1. Для $v_1,v_2\in F_{a_0\varepsilon}$ розглянемо різницю

$$[Tv_1](\varphi_0,\psi_0,\varepsilon)-[Tv_2](\varphi_0,\psi_0,\varepsilon)=$$

$$=\varepsilon\int\limits_{-\infty}^{0}U^{v_1}(0,\tau)\Big(Q_1(v_1(\varphi^{v_1}(\tau),\psi(\tau),\varepsilon),\varphi^{v_1}(\tau),\psi(\tau),\varepsilon)-$$

$$-Q_1\,(v_2(\varphi^{v_2}(\tau),\psi(\tau),\varepsilon),\varphi^{v_2}(\tau),\psi(\tau),\varepsilon)\Big)d\tau+$$

$$+\ \varepsilon\int\limits_{-\infty}^{0}\Big(U^{v_1}(0,\tau)-U^{v_2}(0,\tau)\Big)Q_1(v_2(\varphi^{v_2}(\tau),\psi(\tau),\varepsilon),\varphi^{v_2}(\tau),\psi(\tau),\varepsilon)d\tau+$$

$$+\ \varepsilon\sum_{\tau_k^0<0}U^{v_1}(0,\tau_k^0)\Big(R_1(v_1(\varphi_k^{v_1},\psi_k^0,\varepsilon),\varphi_k^{v_1},\psi_k^0,\varepsilon)-R_1(v_2(\varphi_k^{v_2},\psi_k^0,\varepsilon),\varphi_k^{v_2},\psi_k^0,\varepsilon)\Big)+$$

$$+\ \varepsilon\sum_{\tau_k^0<0}\Big(U^{v_1}(0,\tau_k^0)-U^{v_2}(0,\tau_k^0)\Big)R_1(v_2(\varphi_k^{v_2},\psi_k^0,\varepsilon),\varphi_k^{v_2},\psi_k^0,\varepsilon).\qquad(30)$$

Тут $U^{v_j}(0,\tau)=U^{v_j}(0,\tau,\varphi_0,\psi_0,\varepsilon)$. Різниця $\varphi^{v_1}(t,\varphi_0,\psi_0,\varepsilon)-\varphi^{v_2}(t,\varphi_0,\psi_0,\varepsilon)$ задовольняє рівняння

$$\varphi^{v_1}(t,\varphi_0,\psi_0,\varepsilon)-\varphi^{v_2}(t,\varphi_0,\psi_0,\varepsilon)=$$
$$=\int\limits_0^t\Big(Q_2(v_1(\varphi^{v_1}(s),\psi(s),\varepsilon),\varphi^{v_1}(s),\psi(s),\varepsilon)-$$
$$-\,Q_2\,\left(v_2(\varphi^{v_2}(s),\psi(s),\varepsilon),\varphi^{v_2}(s),\psi(s),\varepsilon\right)\Big)ds+$$
$$+\sum_{0\le\tau_k^0<t}\varepsilon\Big(R_2(v_1(\tilde\varphi_k^1,\psi_k^0,\varepsilon),\tilde\varphi_k^1,\psi_k^0,\varepsilon)-R_2(v_2(\tilde\varphi_k^2,\psi_k^0,\varepsilon),\tilde\varphi_k^2,\psi_k^0,\varepsilon)\Big),$$

де $\tilde\varphi_k^1=\varphi^{v_1}\left(\tau_k^0,\varphi_0,\psi_0,\varepsilon\right),\ \tilde\varphi_k^2=\varphi^{v_2}\left(\tau_k^0,\varphi_0,\psi_0,\varepsilon\right)$.

Аналогічно (27) і (28), застосовуючи узагальнену нерівність Гронуолла, отримуємо

$$\left|\varphi^{v_1}(t,\varphi_0,\psi_0,\varepsilon)-\varphi^{v_2}(t,\varphi_0,\psi_0,\varepsilon)\right|\le\varepsilon L_2e^{\varepsilon\kappa_2t}\left\|v_1(.,.,\varepsilon)-v_2(.,.,\varepsilon)\right\|_C. \tag{31}$$

З (23) і (31) випливає оцінка

$$\left\|U^{v_1}(t,\tau)-U^{v_2}(t,\tau)\right\|=\left\|\int\limits_\tau^t U^{v_1}(t,s)\left(A_0(\varphi^{v_2}(s))-A_0(\varphi^{v_1}(s))\right)U^{v_2}(s,\tau)ds\right\|\le$$
$$\le\int\limits_\tau^t K_1e^{-\alpha_1(t-s)}\left\|A_0\right\|_{C^1}\left|\varphi^{v_1}(s)-\varphi^{v_2}(s)\right|K_1e^{-\alpha_1(s-\tau)}ds\le$$
$$\le\varepsilon K_3e^{-\alpha_3(t-\tau)}\left\|v_1(.,.,\varepsilon)-v_2(.,.,\varepsilon)\right\|_C \tag{32}$$

з додатними сталими K_3 і α_3, які не залежать від ε.

З (30) – (32) випливає, що існують такі $\varepsilon_1\le\varepsilon_0$ і $\gamma_1<1$, що

$$\left\|T(v_1)-T(v_2)\right\|_C\le\gamma_1\|v_1-v_2\|_C$$

для $v_1,v_2\in\mathcal F_{a_0\varepsilon}$ і $\varepsilon\le\varepsilon_1$. Отже, відображення $T:\ \mathcal F_{a_0\varepsilon}\to\mathcal F_{a_0\varepsilon}$ при $\varepsilon\le\varepsilon_1$ з деяким досить малим ε_1 є відображенням стиску. Воно має єдину нерухому точку $w_*(\varphi,\psi,\varepsilon)=\varepsilon u_*(\varphi,\psi,\varepsilon)$. Функція u_* ліпшицева при $(\varphi,\psi)\in\mathbb T^2\setminus\Gamma$.

Для доведення диференційовності інваріантного многовиду $\varepsilon u_*(\varphi,\psi,\varepsilon)$ використаємо теорему про нерухому точку відображення стиску на шарах розшарування [2, с. 127]. Спочатку покажемо, що інваріантний многовид є C^1-гладким щодо φ. Неперервна диференційовність щодо ε доводиться аналогічно.

Розглянемо відображення $T^1:\ \mathcal F_\rho\times\mathcal F_\rho\to\mathcal F_\rho$, яке має вигляд

$$T^1(v,\Psi)(\varphi_0,\psi_0)=\int\limits_{-\infty}^0U^v(0,\tau,\varphi_0,\psi_0,\varepsilon)\left(\frac{\partial Q_1\big(v(\varphi^v(\tau),\psi(\tau),\varepsilon),\varphi^v(\tau),\psi(\tau),\varepsilon\big)}{\partial\varphi}W(\tau)+\right.$$
$$+\ \frac{\partial Q_1\big(v(\varphi^v(\tau),\psi(\tau),\varepsilon),\varphi^v(\tau),\psi(\tau),\varepsilon\big)}{\partial h}\Psi(\varphi^v(\tau),\psi(\tau),\varepsilon)W(\tau)+$$
$$\left.+\ \frac{\partial A_0(\varphi^v(\tau))}{\partial\varphi}W(\tau)v(\varphi^v(\tau),\psi(\tau),\varepsilon)\right)d\tau+$$

$$+\ \varepsilon \sum_{\tau_k^0<0} U^v\big(0,\tau_k^0,\varphi_0,\psi_0,\varepsilon\big)\left(\frac{\partial R_1(v(\varphi_k^v,\psi_k^0,\varepsilon),\varphi_k^v,\psi_k^0,\varepsilon)}{\partial\varphi}W(\tau_k^0)+\right.$$

$$\left.+\ \frac{\partial R_1(v(\varphi_k^v,\psi_k^0,\varepsilon),\varphi_k^v,\psi_k^0,\varepsilon)}{\partial h}\Psi(\varphi_k^v,\psi_k^0,\varepsilon)W(\tau_k^0)+\frac{\partial A_0(\varphi_k^0)}{\partial\varphi}W(\tau_k^0)v(\varphi_k^v,\psi_k^0,\varepsilon)\right), \qquad (33)$$

де $W(t,\varphi_0,\psi_0,\varepsilon)$ — розв'язок початкової задачі $W(0,\varphi_0,\psi_0,\varepsilon)=1$ для рівняння

$$\frac{dW}{dt}=\frac{\partial Q_2(v(\varphi^v,\psi,\varepsilon),\varphi^v,\psi,\varepsilon)}{\partial h}\Psi(\varphi^v,\psi,\varepsilon)W+\frac{\partial Q_2(v(\varphi^v,\psi,\varepsilon),\varphi^v,\psi,\varepsilon)}{\partial\varphi}W,$$

$$\Delta W|_{(\varphi,\psi)\in\Gamma}=\varepsilon\frac{\partial R_2(v(\varphi^v,\psi,\varepsilon),\varphi^v,\psi,\varepsilon)}{\partial h}\Psi(\varphi^v,\psi,\varepsilon)W+$$

$$+\ \varepsilon\frac{\partial R_2(v(\varphi^v,\psi,\varepsilon),\varphi^v,\psi,\varepsilon)}{\partial\varphi}W. \qquad (34)$$

Для $v,\Psi\in\mathcal{F}_{a_0\varepsilon}$ і $(\varphi,\psi)\notin\Gamma$ похідні функцій Q_j і R_j задовольняють оцінки

$$\left\|\frac{\partial Q_j}{\partial\varphi}\right\|\le\varepsilon M_2,\qquad\left\|\frac{\partial Q_j}{\partial h}\right\|\le\varepsilon M_2,\qquad\left\|\frac{\partial R_j}{\partial\varphi}\right\|\le M_2,\qquad\left\|\frac{\partial R_j}{\partial h}\right\|\le M_2,\quad j=1,2, \qquad (35)$$

з додатною сталою M_2, не залежною від ε.

Припускаючи $v\in\mathcal{F}_{\varepsilon a_0}$ і застосовуючи узагальнену нерівність Гроноулла до (34), отримуємо

$$\|W(t,\varphi,\psi,\varepsilon)\|\le L_3e^{\varepsilon\kappa_3|t|} \qquad (36)$$

з додатними сталими L_3 і κ_3, не залежними від ε.

Оцінимо різницю W_1-W_2, де $W_j(t,\varphi_0,\psi_0,\varepsilon)$, $W_j(0,\varphi_0,\psi_0,\varepsilon)=1$, — розв'язок рівняння (34) при $\Psi(s)=\Psi_j(s)=\Psi_j(\varphi^v(s),\psi(s),\varepsilon)$:

$$\big\|W_1(t)-W_2(t)\big\|\le\int_0^t\left(\left\|\frac{\partial Q_2}{\partial\varphi}\right\|+\left\|\frac{\partial Q_2}{\partial h}\right\|\|\Psi_1\|\right)\|W_1(s)-W_2(s)\|ds+$$

$$+\ \int_0^t\left\|\frac{\partial Q_2}{\partial h}\right\|\|W_2\|\|\Psi_1(s)-\Psi_2(s)\|ds+\varepsilon\sum_{0\le\tau_k^0<t}\left\|\frac{\partial R_2}{\partial h}\right\|\|W_2\|\big\|\Psi_1(\tau_k^0)-\Psi_2(\tau_k^0)\big\|+$$

$$+\ \varepsilon\sum_{0\le\tau_k^0<t}\left(\left\|\frac{\partial R_2}{\partial\varphi}\right\|+\left\|\frac{\partial R_2}{\partial h}\right\|\|\Psi_1\|\right)\big\|W_1(\tau_k^0)-W_2(\tau_k^0)\big\|. \qquad (37)$$

Підставляючи (35) і (36) у (37), одержуємо

$$\|W_1(t)-W_2(t)\|\le\int_0^t\varepsilon M_2\left[(1+\varepsilon a_2)\|W_1(s)-W_2(s)\|+L_3e^{\varepsilon\kappa_3 s}\|\Psi_1(s)-\Psi_2(s)\|\right]ds+$$

$$+\ \sum_{0\le\tau_k^0<t}\varepsilon M_2\left[(1+\varepsilon a_2)\big\|W_1(\tau_k^0)-W_2(\tau_k^0)\big\|+L_3e^{\varepsilon\kappa_3 s}\big\|\Psi_1(\tau_k^0)-\Psi_2(\tau_k^0)\big\|\right].$$

Застосовуючи узагальнену нерівність Гронуолла, отримуємо

$$\big\|W_1(t) - W_2(t)\big\| \le L_4 e^{\varepsilon\kappa_4|t|}\|\Psi_1 - \Psi_2\|_C \tag{38}$$

з додатними сталими L_4 і κ_4, не залежними від ε.

Аналогічно відображенню (24) можна перевірити, що існують такі сталі a_1 і $\varepsilon_1 \le \varepsilon_0$, що для $\varepsilon \le \varepsilon_1$ відображення $T^1(v,\Psi)$ означене коректно.

Розглянемо відображення $\mathcal{F}_{\varepsilon a_0} \times \mathcal{F}_{\varepsilon a_1} \to \mathcal{F}_{\varepsilon a_0} \times \mathcal{F}_{\varepsilon a_1}$, задане виразом

$$(v,\Psi) \to (T(v), T^1(v,\Psi)). \tag{39}$$

Аналогічно [2, с. 337] можна показати, що відображення (39) неперервне по v. Тепер доведемо, що (39) є відображенням стиску на розшаруванні. Для $v \in \mathcal{F}_{\varepsilon a_0}$ і $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{F}^1_{\varepsilon a_1}$ маємо

$$\begin{gathered}\big\|T^1(v,\Psi_1) - T^1(v,\Psi_2)\big\| \le \\ \le \left\| \int\limits_{-\infty}^{0} U^v(0,\tau,\varphi_0,\psi_0,\varepsilon)\left(\frac{\partial Q_1}{\partial\varphi}(W_1 - W_2) + \frac{\partial Q_1}{\partial h}(\Psi_1 W_1 - \Psi_2 W_2)\right)d\tau\right\| + \\ + \ \varepsilon\sum_{\tau_k^0<0}\left\|U^v\big(0,\tau_k^0,\varphi_0,\psi_0,\varepsilon\big)\left(\frac{\partial R_1}{\partial\varphi}\big(W_1(\tau_k^0) - W_2(\tau_k^0)\big) + \right.\right. \\ \left.\left. + \ \frac{\partial R_1}{\partial h}\big(\Psi_1(\varphi_k^v,\psi_k^0,\varepsilon)W_1(\tau_k^0) - \Psi_2(\varphi_k^v,\psi_k^0,\varepsilon)W_2(\tau_k^0)\big)\right)\right\|. \end{gathered} \tag{40}$$

Підставляючи (38) у (40), одержуємо

$$\big\|T^1(v,\Psi_1) - T^1(v,\Psi_2)\big\| \le \sigma\|\Psi_1 - \Psi_2\|_C,$$

де $\sigma < 1$ для досить малих ε. Отже, відображення (39) є відображенням стиску на розшаруванні. Воно має єдину нерухому точку (w_*, w_1). З (33) випливає, що функція $w_1(\varphi,\psi,\varepsilon)$ рівномірно обмежена для $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1)$. Повторюючи результати [2, с. 290], показуємо, що w_* неперервно диференційовна для $(\varphi,\psi) \in \mathbb{T}_2 \setminus \Gamma$ і $Dw_* = w_1$.

Для доведення орбітальної асимптотичної стійкості многовиду $\mathfrak{M}_\varepsilon$ скористаємось ідеями роботи [19, с. 227]. Виконаємо заміну змінних $h = z + \varepsilon u_*$, $\varphi = \varphi_* + \theta$, де $\varphi_*(t)$ — розв'язок з початковими даними $\varphi_*(0,\bar\varphi_*,\psi_0,\varepsilon) = \bar\varphi_*$, $\psi(0,\psi_0) = \psi_0$ системи на многовиді (21). У змінних (z,θ) система (19) має вигляд

$$\begin{aligned} &\frac{dz}{dt} = A(z,\theta,\psi,\varepsilon)z, \\ &\frac{d\theta}{dt} = a_1(\theta,\psi,\varepsilon)\theta + a_2(z,\theta,\psi,\varepsilon)z, \\ &\Delta z|_{(\varphi,\psi)\in\Gamma} = \varepsilon B(z,\theta,\psi,\varepsilon)z, \\ &\Delta\theta|_{(\varphi,\psi)\in\Gamma} = \varepsilon b_1(\theta,\psi,\varepsilon)\theta + \varepsilon b_2(z,\theta,\psi,\varepsilon)z, \end{aligned} \tag{41}$$

де

$$a_1(\theta,\psi,\varepsilon)\theta = Q_2(\varepsilon u_*(\varphi_* + \theta,\psi,\varepsilon),\varphi_* + \theta,\psi,\varepsilon) - Q_2(\varepsilon u_*(\varphi_*,\psi,\varepsilon),\varphi_*,\psi,\varepsilon),$$

$$a_2(z,\theta,\psi,\varepsilon)z = Q_2(\varepsilon u_*(\varphi_*+\theta,\psi,\varepsilon)+z,\varphi_*+\theta,\psi,\varepsilon) -$$

$$- Q_2\,(\varepsilon u_*(\varphi_*+\theta,\psi,\varepsilon),\varphi_*+\theta,\psi,\varepsilon),$$

$$b_1(\theta,\psi,\varepsilon)\theta = R_2(\varepsilon u_*(\varphi_*+\theta,\psi,\varepsilon),\varphi_*+\theta,\psi,\varepsilon) - R_2(\varepsilon u_*(\varphi_*,\psi,\varepsilon),\varphi_*,\psi,\varepsilon),$$

$$b_2(z,\theta,\psi,\varepsilon)z = R_2(\varepsilon u_*(\varphi_*+\theta,\psi,\varepsilon)+z,\varphi_*+\theta,\psi,\varepsilon) -$$

$$- R_2\,(\varepsilon u_*(\varphi_*+\theta,\psi,\varepsilon),\varphi_*+\theta,\psi,\varepsilon),$$

$$A(z,\theta,\psi,\varepsilon)z = A_0(\varphi_*+\theta)z + Q_1(z+\varepsilon u_*,\varphi_*+\theta,\psi,\varepsilon) - Q_1(\varepsilon u_*,\varphi_*+\theta,\psi,\varepsilon) -$$

$$- \varepsilon\,\frac{\partial u_*}{\partial\varphi}\left(Q_2(z+\varepsilon u_*,\varphi_*+\theta,\psi,\varepsilon) - Q_2(\varepsilon u_*,\varphi_*+\theta,\psi,\varepsilon)\right),$$

$$B(z,\theta,\psi,\varepsilon)z = R_1(z+\varepsilon u_*,\varphi_*+\theta,\psi,\varepsilon) - R_1(\varepsilon u_*,\varphi_*+\theta,\psi,\varepsilon),$$

а φ і ψ задовольняють відповідні рівняння (19) при $h = z + \varepsilon u_*$.

Для функції $\alpha\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ будемо позначати норму так: $\|\alpha\|_0 = \sup_{t\geq 0}\|\alpha(t)\|$.

Зафіксуємо початкове значення $\psi(0) = \psi_0$, тоді розв'язок $\psi(t,\psi_0)$ перетинає многовид Γ в моменти часу $\tau_j^0 = \tau_j - \psi_0/\omega$. Побудуємо послідовність функцій $z^k(t), \theta^k(t),\ t\geq 0$. Покладемо $z^0(t) = z_0, \theta^0(t) = 0$. Ітерацію $z^{k+1}(t), z^{k+1}(0) = z_0,\ k = 0,1,\ldots,$ визначимо як розв'язок системи

$$\begin{aligned} \frac{dz^{k+1}}{dt} &= A(z^k(t),\theta^k(t),\psi(t),\varepsilon)z^{k+1}, \quad t\neq\tau_j^0, \\ \Delta z^{k+1}\Big|_{t=\tau_j^0} &= \varepsilon B(z^k(\tau_j^0),\theta^k(\tau_j^0),\omega\tau_j,\varepsilon)z^{k+1}(\tau_j^0). \end{aligned} \tag{42}$$

Незбурена система (42) (при $\varepsilon = 0,\ z^k\equiv 0,\ \theta^k\equiv 0$) експоненціально стійка. За лемою про експоненціальну стійкість збуреної імпульсної системи [20] існують такі сталі $\alpha_1 > 0$ і $K_1\geq 1$, що при $\|z^k\|\leq\nu_1,\ \|\theta^k\|\leq\nu_1,\ \varepsilon\leq\varepsilon_1$ з деякими $\nu_1>0,\ \varepsilon_1>0$ система (42) експоненціально стійка, а саме, її фундаментальна система розв'язків $X^k(t,\tau)$ задовольняє оцінку

$$\left\|X^k(t,\tau)\right\| \leq K_1 e^{-\alpha_1(t-\tau)}, \quad t\geq\tau. \tag{43}$$

Оскільки $Q_1 = \mathcal{O}(\|h\|^2)$, стала ν_1 не залежить від ε.

Ітерацію $\theta^{k+1}(t)$ означимо так:

$$\theta^{k+1}(t) = -\int\limits_t^\infty V^k(t,s,\varepsilon)a_2(z^k(s),\theta^k(s),\psi(s),\varepsilon)z^{k+1}(s)ds -$$

$$- \sum_{\tau_j^0\geq t}\varepsilon V^k(t,\tau_j^0,\varepsilon)b_2(z^k(\tau_j^0),\theta^k(\tau_j^0),\omega\tau_j,\varepsilon)z^{k+1}(\tau_j^0),$$

де $V^k(t,s,\varepsilon),\ V^k(s,s,\varepsilon) = 1,$ — фундаментальний розв'язок рівняння

$$\frac{d\theta}{dt} = a_1(\theta^k,\psi,\varepsilon)\theta, \qquad \Delta\theta\big|_{t=\tau_j^0} = \varepsilon b_1(\theta^k(\tau_j^0),\omega\tau_j,\varepsilon)\theta(\tau_j^0).$$

Оскільки за побудовою $a_1 = \mathcal{O}(\varepsilon),\ b_1 = \mathcal{O}(\varepsilon)$, розв'язок $V^k(t,s,\varepsilon)$ ненульовий і задовольняє оцінку $\|V^k(t,s)\|\leq N_1 e^{\varepsilon\beta_1|t-s|},\ t,s\in\mathbb{R}$, з деякими сталими $N_1\geq 1$ і $\beta_1>0$.

Покажемо рівномірну обмеженість послідовностей $z^k(t)$ і $\theta^k(t)$.

Ітерація $z^1(t)$ визначається як розв'язок системи

$$\frac{dz^1}{dt} = A(z_0, 0, \psi, \varepsilon)z^1, \quad t \neq \tau_j^0, \qquad \Delta z^1\big|_{t=\tau_j^0} = \varepsilon B(z_0, 0, \omega\tau_j, \varepsilon)z^1(\tau_j^0) \tag{44}$$

з початковою умовою $z^1(0) = z_0$, тобто $z^1(t) = X^0(t,0)z_0$, де $X^0(t,t_0)$, $X^0(t_0,t_0) = I_{n-1}$ — фундаментальна система розв'язків системи рівнянь (44). Якщо $\|z_0\| \leq \nu_1$, то $\|X^0(t,t_0)\| \leq$ $\leq K_1 e^{-\alpha_1(t-t_0)}$, $t \geq t_0$. Ітерація $\theta^1(t)$ задовольняє рівність

$$\theta^1(t) = -\int\limits_t^\infty a_2(z_0, 0, \psi(s), \varepsilon)z^1(s)ds - \sum_{\tau_j^0 \geq t} \varepsilon b_2(z_0, 0, \omega\tau_j, \varepsilon)z^1(\tau_j^0),$$

тому

$$\|\theta^1(t)\| \leq \left(\frac{K_1\|a_2\|_0}{\alpha_1} + \frac{K_1\|b_2\|_0}{1 - e^{-\alpha_1\theta}}\right)e^{-\alpha_1 t}\|z_0\|,$$

де $\|a_2\|_0$ і $\|b_2\|_0$ — норми функцій $a_2(z,\theta,\psi,\varepsilon)$ і $b_2(z,\theta,\psi,\varepsilon)$ при $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\|z\| \leq \nu_0$. Отже, при малих $\|z_0\|$ виконується $\|z^1\|_0 \leq \nu_1$, $\|\theta^1\|_0 \leq \nu_1$.

Припустимо, що $\|z^k\|_0 \leq \nu_1$, $\|\theta^k\|_0 \leq \nu_1$. Тоді розв'язок $z^{k+1}(t)$ задовольняє нерівність

$$\|z^{k+1}(t)\| \leq \|X^k(t,0)\|\|z_0\| \leq K_1 e^{-\alpha_1 t}\|z_0\|, \quad t \geq 0, \tag{45}$$

де $X^k(t,t_0)$ — фундаментальна система розв'язків системи рівнянь (42).

Якщо $\|z^k\|_0 \leq \nu_1$, $\|\theta^k\|_0 \leq \nu_1$, то ітерація $\theta^{k+1}(t)$ задовольняє оцінку

$$\|\theta^{k+1}(t)\| \leq \int\limits_t^\infty M_1 e^{\varepsilon\beta_1(s-t)}\|a_2\|_0 K_1 e^{-\alpha_1 s}\|z_0\|ds + \sum_{\tau_j^0 \geq t} M_1 e^{\varepsilon\beta_1(\tau_j^0 - t)}\|b_2\|_0 K_1 e^{-\alpha_1\tau_j^0}\|z_0\| \leq$$

$$\leq K_1 M_1\left(\frac{\|a_2\|_0}{\alpha_1 - \varepsilon\beta_1} + \frac{\varepsilon\|b_2\|_0}{1 - e^{-(\alpha_1 - \varepsilon\beta_1)\theta}}\right)e^{-(\alpha_1 - \varepsilon\beta_1)t}\|z_0\| = K_4 e^{-\alpha_4 t}\|z_0\|. \tag{46}$$

Вибираємо $\|z_0\| \leq \nu_1 \min\{1/M_2, 1/K_1\}$, тоді $\|z^{k+1}\|_0 \leq \nu_1$, $\|\theta^{k+1}\|_0 \leq \nu_1$.

Доведемо збіжність послідовностей $\{z^k\}$ і $\{\theta^k\}$. Різниця $z^{k+1} - z^k$ задовольняє систему

$$\frac{d(z^{k+1} - z^k)}{dt} = A(z^k, \theta^k, \psi, \varepsilon)(z^{k+1} - z^k) + \Big(A(z^k, \theta^k, \psi, \varepsilon) - A(z^{k-1}, \theta^{k-1}, \psi, \varepsilon)\Big)z^k,$$

$$\Delta(z^{k+1} - z^k)\big|_{t=\tau_j^0} = \varepsilon B(z^k(\tau_j^0), \theta^k(\tau_j^0), \omega\tau_j, \varepsilon)(z^{k+1}(\tau_j^0) - z^k(\tau_j^0)) +$$

$$+ \varepsilon\Big(B(z^k(\tau_j^0), \theta^k(\tau_j^0), \omega\tau_j, \varepsilon) - B(z^{k-1}(\tau_j^0), \theta^{k-1}(\tau_j^0), \omega\tau_j, \varepsilon)\Big)z^k(\tau_j^0),$$

тому

$$z^{k+1}(t) - z^k(t) = \int\limits_0^t X^k(t,s)\Big(A(z^k(s), \theta^k(s), \psi(s), \varepsilon) -$$

$$-\,A\left(z^{k-1}(s),\theta^{k-1}(s),\psi(s),\varepsilon\right)\Big)z^k(s)ds+$$

$$+\sum_{0\le\tau_j^0<t}\varepsilon X^k(t,\tau_j^0+0)\Big(B(z^k(\tau_j^0),\theta^k(\tau_j^0),\omega\tau_j,\varepsilon)-$$

$$-\,B\left(z^{k-1}(\tau_j^0),\theta^{k-1}(\tau_j^0),\omega\tau_j,\varepsilon\right)\Big)z^k(\tau_j^0), \tag{47}$$

$$\theta^{k+1}(t)-\theta^k(t)=-\int\limits_t^\infty V^k(t,s)a_2(z^k(s),\theta^k(s),\psi(s),\varepsilon)\left(z^{k+1}(s)-z^k(s)\right)ds-$$

$$-\int\limits_t^\infty V^k(t,s)\Big(a_2(z^k(s),\theta^k(s),\psi(s),\varepsilon)-a_2(z^{k-1}(s),\theta^{k-1}(s),\psi(s),\varepsilon)\Big)z^k(s)ds-$$

$$-\int\limits_t^\infty\left(V^k(t,s)-V^{k-1}(t,s)\right)a_2(z^{k-1}(s),\theta^{k-1}(s),\psi(s),\varepsilon)z^k(s)ds-$$

$$-\,\varepsilon\sum_{t\le\tau_j^0}V^k(t,\tau_j^0)b_2(z^k(\tau_j^0),\theta^k(\tau_j^0),\omega\tau_j,\varepsilon)\left(z^{k+1}(\tau_j^0)-z^k(\tau_j^0)\right)-$$

$$-\,\varepsilon\sum_{t\le\tau_j^0}V^k(t,\tau_j^0)\Big(b_2(z^k(\tau_j^0),\theta^k(\tau_j^0),\omega\tau_j,\varepsilon)-b_2(z^{k-1}(\tau_j^0),\theta^{k-1}(\tau_j^0),\omega\tau_j,\varepsilon)\Big)z^k(\tau_j^0)-$$

$$-\,\varepsilon\sum_{t\le\tau_j^0}\left(V^k(t,\tau_j^0)-V^{k-1}(t,\tau_j^0)\right)b_2(z^{k-1}(\tau_j^0),\theta^{k-1}(\tau_j^0),\omega\tau_j,\varepsilon)z^k(\tau_j^0). \tag{48}$$

З (47) отримуємо

$$\|z^{k+1}(t)-z^k(t)\|\le\int\limits_0^t K_1^2e^{-\alpha_1(t-s)}\mathcal{L}_{(h,\theta)}A\Big(\|z^k-z^{k-1}\|_0+\|\theta^k-\theta^{k-1}\|_0\Big)e^{-\alpha_1 s}\|z_0\|ds+$$

$$+\sum_{0\le\tau_j^0<t}\varepsilon K_1^2e^{-\alpha_1(t-\tau_j^0)}\mathcal{L}_{(h,\theta)}B\Big(\|z^k-z^{k-1}\|_0+\|\theta^k-\theta^{k-1}\|_0\Big)e^{-\alpha_1\tau_j^0}\|z_0\|\le$$

$$\le K_1^2e^{-\alpha_1 t}\left(t\mathcal{L}_{(h,\theta)}A+(t/\theta+1)\mathcal{L}_{(h,\theta)}B\right)\Big(\|z^k-z^{k-1}\|_0+\|\theta^k-\theta^{k-1}\|_0\Big)\|z_0\|\le$$

$$\le K_5e^{-\alpha_5 t}\Big(\|z^k-z^{k-1}\|_0+\|\theta^k-\theta^{k-1}\|_0\Big)\|z_0\|, \tag{49}$$

де $\alpha_5=\alpha_1-\epsilon>0$ з малим додатним числом ϵ, $K_5=K_5(\epsilon)$.

Оскільки $V^{k+1}(s,s)-V^k(s,s)=0$, різниця $V^{k+1}(t,s)-V^k(t,s)$ задовольняє рівняння

$$V^{k+1}(t,s)-V^k(t,s)=\int\limits_s^t V^k(t,\tau)\left(a_1(\theta^k(\tau),\psi(\tau),\varepsilon)-a_1(\theta^{k-1}(\tau),\psi(\tau),\varepsilon)\right)V^k(\tau,s)d\tau+$$

$$+\;\varepsilon\sum_{s\le\tau_j^0<t}V^k(t,\tau_j^0)\left(b_1(\theta^k(\tau_j^0),\omega\tau_j,\varepsilon)-b_1(\theta^{k-1}(\tau_j^0),\omega\tau_j,\varepsilon)\right)V^k(\tau_j^0,s),\quad t>s,$$

$$V^{k+1}(t,s) - V^k(t,s) = V^k(t,s)\left(V^{k+1}(s,t) - V^k(s,t)\right)V^{k+1}(t,s), \quad s > t.$$

З останніх рівностей отримуємо

$$\left\|V^{k+1}(t,s) - V^k(t,s)\right\| \le N_2 e^{\varepsilon\beta_2|t-s|}\left\|\theta^k - \theta^{k-1}\right\|_0, \quad s,t \in \mathbb{R},$$

де $\beta_2 = \beta_1 + \epsilon$ з малим додатним числом ϵ, $N_2 = N_2(\epsilon)$. Виберемо ϵ так, щоб $\alpha_1 - \varepsilon\beta_2 > 0$. Тоді з (48) випливає, що

$$\left\|\theta^{k+1}(t) - \theta^k(t)\right\| \le \left(\frac{M_1K_4\|a_2\|_0}{\alpha_1 - \varepsilon\beta_1} + \frac{M_1K_4\|b_2\|_0}{1 - e^{-(\alpha_1-\varepsilon\beta_1)\theta}}\right)\left(\|\theta^k - \theta^{k-1}\|_0 + \|z^k - z^{k-1}\|_0\right)\|z_0\| +$$
$$+ \left(\frac{M_1K_1\mathcal{L}_{(h,\theta)}a_2}{\alpha_1 - \varepsilon\beta_1} + \frac{M_1K_1\mathcal{L}_{(h,\theta)}b_2}{1 - e^{-(\alpha_1-\varepsilon\beta_1)\theta}}\right)\left(\|\theta^k - \theta^{k-1}\|_0 + \|z^k - z^{k-1}\|_0\right)\|z_0\| +$$
$$+ \left(\frac{N_2K_1\|a_2\|_0}{\alpha_1 - \varepsilon\beta_2} + \frac{N_2K_1\|b_2\|_0}{1 - e^{-(\alpha_1-\varepsilon\beta_2)\theta}}\right)\|\theta^k - \theta^{k-1}\|_0\|z_0\| \le$$
$$\le M_3\left(\|z^k - z^{k-1}\|_0 + \|\theta^k - \theta^{k-1}\|_0\right)\|z_0\|. \tag{50}$$

З (43), (45), (46), (49) і (50) випливає, що при

$$\|z_0\| \le \nu_2 < \min\left\{\nu_1/K_1, \nu_1/M_1, 1/K_4, 1/M_3\right\} \tag{51}$$

виконується нерівність

$$\|z^{k+1} - z^k\|_0 + \|\theta^{k+1} - \theta^k\|_0 \le M_4\left(\|z^k - z^{k-1}\|_0 + \|\theta^k - \theta^{k-1}\|_0\right)$$

зі сталою $M_4 < 1$. З останнього випливає збіжність

$$z^k(t) \to \tilde{z}(t), \qquad \theta^k(t) \to \tilde{\theta}(t), \quad k \to \infty,$$

рівномірно щодо $t \in [0,\infty)$. Граничні функції $\tilde{z}(t)$ і $\tilde{\theta}(t)$ задовольняють систему рівнянь (41). З нерівностей (45) і (46) випливають оцінки

$$\|\tilde{z}(t)\| \le K_1 e^{-\alpha_1 t}\|z_0\|, \quad \|\tilde{\theta}(t)\| \le N_4 e^{-\alpha_4 t}\|z_0\|, \quad t \ge 0. \tag{52}$$

Система рівнянь (19) має розв'язок $(h(t), \varphi(t), \psi(t))$ з початковими значеннями

$$h(0) = z_0 + \varepsilon u_*(\bar{\varphi}_*, \psi, \varepsilon), \qquad \varphi(0) = \bar{\varphi}_* + \tilde{\theta}(0, z_0, \bar{\varphi}_*, \psi, \varepsilon),$$

який задовольняє нерівності

$$\|h(t) - \varepsilon u_*(\varphi(t), \psi(t), \varepsilon)\| \le K_1 e^{-\alpha_1 t}\|z_0\|, \qquad \|\varphi(t) - \varphi_*(t)\| \le N_4 e^{-\alpha_4 t}\|z_0\|, \quad t \ge 0.$$

Як і в роботі [19], покажемо, що для заданих φ_0 і h_0 існує $\bar{\varphi}_*$, яке задовольняє рівняння

$$\varphi_0 = \bar{\varphi}_* + \tilde{\theta}\big(0, h_0 - \varepsilon u_*(\varphi_0, \psi, \varepsilon), \bar{\varphi}_*, \psi, \varepsilon\big).$$

Введемо нову змінну $\vartheta = \varphi_0 - \bar{\varphi}_*$ і запишемо рівняння у вигляді

$$\vartheta = \tilde{\theta}\big(0, h_0 - \varepsilon u_*(\varphi_0, \psi, \varepsilon), \varphi_0 - \vartheta, \psi, \varepsilon\big). \tag{53}$$

За формулами (52) $\left\|\tilde{\theta}(0, h_0 - \varepsilon u_*(\varphi_0, \psi, \varepsilon), \varphi_0 - \vartheta, \psi, \varepsilon)\right\| \leq M_2\|z_0\|$. Тому для ϑ з області $\|\vartheta\| \leq$ $\leq M_2\|z_0\|$ права частина рівняння (53) задає оператор, який переводить кулю $\|\vartheta\| \leq M_2\|z_0\|$ в себе. Цей оператор неперервний по ϑ і за теоремою Брауера має нерухому точку. Тобто рівняння (53) має розв'язок $\vartheta_0 = \vartheta_0(h_0, \varphi_0, \varepsilon)$, який задовольняє нерівність $\|\vartheta_0\| \leq M_2\|z_0\|$.

Як наслідок для кожних (h_0, φ_0, ψ) з $\|h_0 - \varepsilon u_*(\varphi_0, \psi, \varepsilon)\| \leq \nu_2$ існує таке $\varphi_1 = \varphi_0 -$ $- \vartheta_0(h_0, \varphi_0, \varepsilon)$, що виконується оцінка (20). Оскільки ν_2 не залежить від ε, існує таке $\nu > 0$, що при $\|h_0\| \leq \nu$ і $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ виконується $\|h_0 - \varepsilon u_*(\varphi_0, \psi, \varepsilon)\| \leq \nu_2$.

4. Дослідження системи на многовиді. Підставивши вираз для інваріантного многовиду $\varepsilon u_*(\varphi, \psi, \varepsilon)$ у систему (19), отримаємо рівняння на многовиді

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \omega_0 + \varepsilon y_*^T(\varphi) g(x_*(\varphi), \omega t) + Q_2(\varepsilon u_*(\varphi, \omega t, \varepsilon), \varphi, \omega t, \varepsilon), \\ \Delta\varphi\big|_{t=\tau_k} &= \varepsilon y_*^T(\varphi) g_k(x_*(\varphi)) + \varepsilon R_2(\varepsilon u_*(\varphi, \omega\tau_k, \varepsilon), \varphi, \omega\tau_k, \varepsilon), \end{aligned} \tag{54}$$

$\varphi_k = \varphi(\tau_k),\ \Delta\varphi_k = \varphi(\tau_k + 0) - \varphi(\tau_k)$.

Тепер скористаємося близькістю частот ω_0 і ω, а саме, $\omega - \omega_0 = \varepsilon\Delta$. Введемо нову змінну φ_1 за формулою

$$\varphi = \omega t + \varphi_1 \tag{55}$$

і отримаємо рівняння

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dt} &= -\varepsilon\Delta + \varepsilon y_*^T(\varphi_1 + \omega t) g(x_*(\varphi_1 + \omega t), \omega t) + \varepsilon^2 \tilde{Q}_2(\varphi_1, \omega t, \varepsilon), \\ \Delta\varphi_1\big|_{t=\tau_k} &= \varepsilon y_*^T(\varphi_1 + \omega\tau_k) g_k(x_*(\varphi_1 + \omega\tau_k)) + \varepsilon^2 \tilde{R}_{2k}(\varphi_1, \omega t_k, \varepsilon), \end{aligned} \tag{56}$$

де

$$\varepsilon^2 \tilde{Q}_2(\varphi_1, \omega t, \varepsilon) = Q_{20}(\varepsilon u_*(\varphi_1 + \omega t, \omega t, \varepsilon), \varphi_1 + \omega t, \omega t, \varepsilon),$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \tilde{R}_2(\varphi_1, \omega t_k, \varepsilon) &= \varepsilon R_{21}(\varepsilon u_*(\varphi_1 + \omega\tau_k, \omega\tau_k, \varepsilon), \varphi_1 + \omega\tau_k, \omega\tau_k) + \\ &+ \varepsilon^2 R_{22}(\varepsilon u_*(\varphi_1 + \omega\tau_k, \omega\tau_k, \varepsilon), \varphi_1 + \omega\tau_k, \omega\tau_k, \varepsilon). \end{aligned}$$

У відповідності з методом усереднення для систем з імпульсною дією [18, с. 341], у рівнянні (56) виконаємо усереднене перетворення щодо ωt:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2 + \frac{\varepsilon}{\omega} \int\limits_0^{\omega t} [y_*^T(\xi + \varphi_1) g(x_*(\xi + \varphi_1), \xi) - G_1(\varphi_1)] d\xi + \\ &+ \frac{\varepsilon}{\omega} \sum_{k=1}^{m} y_*^T(\varphi_1 + \omega\tau_k) g_k(x_*(\varphi_1 + \omega\tau_k)) \left\{ \frac{1}{2} - \omega(t - \tau_k) \right\}, \end{aligned} \tag{57}$$

де

$$G_1(\varphi_1) = \int\limits_0^1 x^T(\xi + \omega\tau_k) g(x_*(\xi + \varphi_1), \xi) d\xi$$

і 1-періодична функція $\left\{\dfrac{1}{2} - \xi + \omega\tau_k\right\}$ визначається на її періоді через

$$\left\{\frac{1}{2} - \xi + \omega\tau_k\right\} = \frac{1}{2} - \xi + \omega\tau_k, \quad \omega\tau_k < \xi \le \omega\tau_k + 1.$$

Після заміни змінних (57) рівняння (56) набере вигляду

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = -\varepsilon\Delta + \varepsilon G(\varphi_2) + \varepsilon^2 S_3(\varphi_2, \omega t, \varepsilon), \qquad \Delta\varphi_2\big|_{t=\tau_k} = \varepsilon^2 R_3(\varphi_2, \omega\tau_k, \varepsilon), \tag{58}$$

де функції у правій частині C^1-гладкі й 1-періодичні по φ_2 і ωt, функція $G(\varphi_2)$ означена у (5).

Відповідне усереднене рівняння

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \varepsilon\big(-\Delta + G(\varphi_2)\big)$$

має нерухомі точки, які визначаються з рівняння

$$\Delta = G(\xi). \tag{59}$$

Ці нерухомі точки існують, якщо

$$\Delta = \frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon} \in [G_-, G_+],$$

де G_- і G_+ визначено у (6).

Якщо $\Delta \in [G_-, G_+]$ є регулярним значенням функції G, то існує парне число розв'язків $\xi = \vartheta_j^0$, $j = 1, \ldots, 2\tilde{N}$, рівняння (59) таких, що $G'(\vartheta_j^0) \ne 0$. Загалом $\tilde{N}$ залежить від Δ. Легко бачити, що знаки кожних двох послідовних значень $G'(\vartheta_j^0)$ і $G'(\vartheta_{j+1}^0)$ протилежні. Кожній із цих нерухомих точок ϑ_j^0 відповідає періодичний розв'язок рівняння (58).

Лема 1. *Нехай* $\Delta \in [G_-, G_+]$, *рівняння* (59) *має* $2\tilde{N}$ *невироджених розв'язків* $\xi = \vartheta_j^0$, $j = 1, \ldots, 2\tilde{N}$ *і* $G'(\vartheta_{2q}^0) < 0$, $G'(\vartheta_{2q-1}^0) > 0$, $q = 1, \ldots, \tilde{N}$.

Тоді існує таке $\varepsilon_1 > 0$, *що для всіх* $0 < \varepsilon \le \varepsilon_1$ *рівняння* (58) *має* $2\tilde{N}$ *періодичних розв'язків*

$$\varphi_2^j(\omega t, \varepsilon) = \vartheta_j^0 + \varepsilon v_j(\omega t, \varepsilon), \quad t \in \mathbb{R},$$

з C^1*-гладкими при* $t \ne \tau_k$, *періодичними по* ωt *функціями* v_j *такими, що* $\|v_j\|_{C^1} \le M_3$ *з додатною сталою* M_3, *яка не залежить від* ε.

Розв'язки φ_2^{2q}, $q = 1, \ldots, \tilde{N}$, *експоненціально стійкі*: *існує таке* δ_0, *що при* $\left|\varphi_0 - \varepsilon\vartheta_{2q}^0\right| \le \delta_0$ *виконується нерівність*

$$\left|\varphi_2(t, t_0, \varphi_0) - \vartheta_{2q}^0 - \varepsilon v_{2q}(\omega t, \varepsilon)\right| \le L_5 e^{-\varepsilon\kappa_5(t - t_0)}\left|\varphi_0 - \vartheta_{2q}^0 - \varepsilon v_{2q}(\omega t_0, \varepsilon)\right|, \quad t \ge t_0,$$

де $L_5 \ge 1$ *і* $\kappa_5 > 0$ *не залежать від* ε.

Розв'язки φ_2^{2q-1}, $k = 1, \ldots, \tilde{N}$, *експоненціально нестійкі*: *існує таке* δ_0, *що при* $|\varphi_0 - \vartheta_{2q-1}^0| \le \delta_0$ *виконується нерівність*

$$|\varphi_2(t, t_0, \varphi_0) - \vartheta_{2q-1}^0 - \varepsilon v_{2q-1}(\omega t, \varepsilon)| \le L_6 e^{\varepsilon\kappa_6(t - t_0)}|\varphi_0 - \vartheta_{2q-1}^0 - \varepsilon v_{2q-1}(\omega t_0, \varepsilon)|, \quad t \le t_0,$$

де $L_6 \ge 1$ *і* $\kappa_6 > 0$ *не залежать від* ε.

Доведення. Розглянемо рівняння (58) в околі точки $\psi_2 = \vartheta_j^0$. Після заміни змінних $\varphi_2 = \vartheta_j^0 + b_1$ у рівнянні (58) отримаємо

$$\frac{db_1}{dt} = \varepsilon G'(\vartheta_j^0)b_1 + \varepsilon\tilde{G}_j(b_1)b_1^2 + \varepsilon^2 S_3(\vartheta_j^0 + b_1, \omega t, \varepsilon),$$
$$b_1(\tau_k + 0) = b_1(\tau_k) + \varepsilon^2 R_3(\vartheta_j^0 + b_1(\tau_k), \omega\tau_k, \varepsilon), \tag{60}$$

де $\tilde{G}_j(b_1)b_1^2 = G(\vartheta_j^0 + b_1) - G'(\vartheta_j^0)b_1$, а функції у правій частині рівняння C^1-гладкі і періодичні по b_1 і ωt для $t \neq \tau_k$.

Періодичний розв'язок рівняння (60) визначається з інтегрального рівняння

$$b_1(\omega t) = \omega\int\limits_{-\infty}^{t} e^{\varepsilon G'(\vartheta_{2q}^0)(t-s)}\Big(\varepsilon\tilde{G}(b_1(\omega s))b_1^2(\omega s) + \varepsilon^2 S_3(\vartheta_{2q}^0 + b_1(\omega s), \omega s, \varepsilon)\Big)ds +$$
$$+ \sum_{\tau_k < t} e^{\varepsilon G'(\vartheta_{2q}^0)(t-\tau_k)}\varepsilon^2 R_3(\vartheta_{2q}^0 + b_1(\omega\tau_k), \omega\tau_k, \varepsilon)$$

при $j = 2q$ і з інтегрального рівняння

$$b_1(\omega t) = -\omega\int\limits_{t}^{\infty} e^{\varepsilon G'(\vartheta_{2q-1}^0)(t-s)}\Big(\varepsilon\tilde{G}(b_1(\omega s))b_1^2(\omega s) + \varepsilon^2 S_3(\vartheta_{2q-1}^0 + b_1(\omega s), \omega s, \varepsilon)\Big)ds -$$
$$- \sum_{\tau_k \geq t} e^{\varepsilon G'(\vartheta_{2q-1}^0)(t-\tau_k)}\varepsilon^2 R_3(\vartheta_{2q-1}^0 + b_1(\omega\tau_k), \omega\tau_k, \varepsilon)$$

при $j = 2q + 1$. Перевіряємо, що існує таке $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, що при $\varepsilon \leq \varepsilon_1$ праві частини цих інтегральних рівнянь задають відображення стиску на множині періодичних функцій. Відображення мають нерухомі точки, які визначають періодичні розв'язки рівняння (60).

5. Доведення теореми 1. У теоремі 3 стверджується, що всі розв'язки з деякого околу циклу $\mathcal{T}_1$ притягуються до збуреного інтегрального многовиду $\mathfrak{M}_\varepsilon$. Тому досить розглянути рівняння на многовиді. Оскільки за умовою теореми φ_0 є невиродженим розв'язком рівняння (59) при $\Delta \in [G_-, G_+]$, можна скористатися доведенням леми 1.

Розглянемо рівняння (58) в околі точки $\varphi_2 = \varphi_0$. Після заміни змінних $\varphi_2 = \varphi_0 + b_1$ у рівнянні (58) отримаємо рівняння вигляду (60) із φ_0 замість ϑ_j^0. Це рівняння має періодичний розв'язок вигляду $\varphi_2(\omega t, \varepsilon) = \varphi_0 + \varepsilon\tilde{v}(\omega t, \varepsilon)$. Враховуючи заміни змінних (57), (55) і (12), отримуємо періодичний розв'язок (7).

6. Доведення теореми 2. Зафіксуємо довільне додатне ν_1. Для множини S критичних значень відображення G означимо дві множини:

$$\mathcal{B}(\nu_1) = \Big\{g \in [G_-, G_+] : \operatorname{dist}(g, S) \geq \nu_1\Big\}, \qquad \mathcal{A}(\nu_1) = \Big\{\theta \in [0, 1] : G(\theta) \in \mathcal{B}(\nu_1)\Big\}.$$

Враховуючи, що множини $\mathcal{B}(\nu_1)$ і $\mathcal{A}(\nu_1)$ компактні, легко довести, що існує така додатна стала ς, що

$$\left|\frac{dG(\theta)}{d\theta}\right| \geq \varsigma \quad \text{для всіх} \quad \theta \in \mathcal{A}(\nu_1). \tag{61}$$

Розглянемо імпульсне рівняння (58). Для ω і ε, які задовольняють нерівності (8), існує скінченна множина точок ϑ_j^0, $j = 1, \ldots, 2N$ (розв'язків рівняння $\omega - \omega_0 = \varepsilon G(\theta)$), які визначають періодичні розв'язки $\varphi_2^j(\omega t, \varepsilon)$, $j = 1, \ldots, 2N$, рівняння (54). Зазначимо, що число N залежить від параметрів ω і ε. Враховуючи рівномірну оцінку (61), сталі L_5, κ_5, L_6, κ_6 і ε_1 у лемі 2 можна вибрати однаковими для всіх $\theta \in \mathcal{A}(\nu_1)$.

Всі періодичні розв'язки φ_2^{2q} асимптотично стійкі, а періодичні розв'язки φ_2^{2q-1}, $1 \leq q \leq N$, асимптотично нестійкі. Тому якщо початкове значення φ_{20} при $t = t_0$ задовольняє умову $\left|\varphi_{20} - \vartheta_{2q-1}^0\right| < \delta_0$ і не належить траєкторії розв'язку φ_2^{2q-1}, то

$$\left|\varphi_2(t, t_0, \varphi_{20}) - \vartheta_{2q-1}^0 - \varepsilon v_{2q-1}(\omega t, \varepsilon)\right| \geq L_7 e^{\varepsilon\kappa_7(t-t_0)}\left|\varphi_{20} - \vartheta_{2q-1}^0 - \varepsilon v_{2q-1}(\omega t_0, \varepsilon)\right| \tag{62}$$

при $t \geq t_0$, де L_7 і κ_7 — додатні сталі.

З (62) випливає, що за скінченний час T, який залежить від φ_{20}, ν і ε, розв'язок $\varphi_2(t)$ рівняння (54) з початковим значенням $\varphi_2(t_0)$ при $t = t_0$, яке не належить траєкторії розв'язку φ_2^{2q-1}, тобто

$$\varphi_2(t_0) \neq \vartheta_{2q-1}^0 + \varepsilon v_{2q-1}(\omega t_0, \varepsilon) \tag{63}$$

і $\left|\varphi_2(t_0) - \vartheta_{2q-1}^0\right| < \delta_0$, досягає границі δ_0-околу нерухомої точки ϑ_{2q-1}^0, точніше, значення $\varphi_2(t_1) = \vartheta_{2q-1}^0 - \delta_0$ або $\varphi_2(t_2) = \vartheta_{2q-1}^0 + \delta_0$.

Тепер покажемо, що розв'язки рівняння (58) мають такі властивості:

(i) якщо розв'язок $\varphi_2(t)$ в деякий момент часу $t = t_0$ має значення $\varphi_2(t_0) = \vartheta_{2q-1}^0 + \delta_0$, то він досягає значення $\varphi_2(t_0 + T) = \vartheta_{2q}^0 - \delta_0$ за скінченний проміжок часу $T = T(\delta_0, \varepsilon)$;

(ii) якщо розв'язок $\varphi_2(t)$ в деякий момент часу $t = t_0$ має значення $\varphi_2(t_0) = \vartheta_{2q-1}^0 - \delta_0$, то він досягає значення $\varphi_2(t_0 + T) = \vartheta_{2q-2}^0 + \delta_0$ за скінченний проміжок часу $T = T(\delta_0, \varepsilon)$. (Тут ми ідентифікуємо ϑ_{2N+1}^0 з ϑ_1^0 і ϑ_0^0 з ϑ_{2N}^0.)

Справді, розглянемо інтервал $\left(\vartheta_{2q-1}^0, \vartheta_{2q}^0\right)$ (інтервал $\left(\vartheta_{2q-2}^0, \vartheta_{2q-1}^0\right)$ розглядається аналогічно). Позначимо

$$r_0 = \min_{\xi \in [\vartheta_{2q-1}^0 + \delta_0, \vartheta_{2q}^0 - \delta_0]} (G(\xi) - \Delta) > 0.$$

Розв'язок рівняння (58) оцінюється так:

$$\varphi_2(t) = \varphi_2(t_0) + \varepsilon \int\limits_{t_0}^{t} \Big((G(\varphi_2) - \Delta) +$$

$$+ \ \varepsilon S_3(\varphi_2(s), \omega s, \varepsilon)\Big) ds + \varepsilon^2 \sum_{t_0 \leq \tau_k < t} R_3(\varphi_2(\tau_k), \omega\tau_k, \varepsilon) \geq$$

$$\geq \varphi_2(t_0) + \varepsilon r_0(t - t_0) - \varepsilon^2(r_1 + m r_2)(t - t_0),$$

де $r_1 = \sup|S_3|$, $r_2 = \sup|R_3|$. При досить малих ε виконується $\varepsilon(r_1 + \omega m r_2) < r_0$. Тому

$$t - t_0 \leq \frac{\varphi_2(t) - \varphi_2(t_0)}{\varepsilon(r_0 - \varepsilon(r_1 + \omega m r_2))} \leq \frac{\vartheta_{2q}^0 - \vartheta_{2q-1}^0}{\varepsilon(r_0 - \varepsilon(r_1 + \omega m r_2))} \leq \frac{1}{\varepsilon(r_0 - \varepsilon(r_1 + \omega m r_2))} = T(\delta, \varepsilon).$$

Отже, кожний розв'язок з початковим значенням $\varphi_2(t_0)$, яке задовольняє умову (63), досягає δ_0-околу нерухомої точки ϑ_{2q-2}^0 або, відповідно, δ_0-околу нерухомої точки ϑ_{2q}^0 за скінченний час. Далі при зростанні часу t розв'язок досягає одного зі стійких періодичних розв'язків φ_2^{2q-2} чи φ_2^{2q}.

Література

1. M. V. Bartuccelli, J. H. B. Deane, G. Gentile, *Frequency locking in an injection-locked frequency divider equation*, Proc. Roy. Soc. A: Math., Phys. and Eng. Sci., **465**, № 2101, 283 – 306 (2008).
2. C. Chicone, *Ordinary differential equations with applications*, second ed., Springer, New York (2006).
3. J. K. Hale, P. Z. Táboas, *Interaction of damping and forcing in a second order equation*, Nonlinear Anal., **2**, № 1, 77 – 84 (1978).
4. N. Levinson, *Small periodic perturbations of an autonomous system with a stable orbit*, Ann. Math., **52**, № 3, 727 – 738 (1950).
5. W. S. Loud, *Periodic solutions of a perturbed autonomous system*, Ann. Math., **52**, № 3, 490 – 529 (1959).
6. M. B. H. Rhouma, C. Chicone, *On the continuation of periodic orbits*, Methods and Appl. Anal., **7**, № 1, 85 – 104 (2000).
7. A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths, *Synchronization. A universal concept in nonlinear sciences*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2001).
8. L. Recke, *Forced frequency locking for differential equations with distributional forcings*, Ukr. Math. J., **70**, № 1, 124 – 141 (2018).
9. A. M. Samoilenko, L. Recke, *Conditions for synchronization of one oscillation system*, Ukr. Math. J., **57**, № 7, 1089 – 1119 (2005).
10. L. Recke, A. Samoilenko, A. Teplinsky, V. Tkachenko, S. Yanchuk, *Frequency locking of modulated waves*, Discrete and Contin. Dyn. Syst., **31**, № 3, 847 – 875 (2011).
11. L. Recke, A. Samoilenko, V. Tkachenko, S. Yanchuk, *Frequency locking by external forcing in systems with rotational symmetry*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst., **11**, № 3, 771 – 800 (2012).
12. V. I. Tkachenko, *The Green function and conditions for the existence of invariant sets of impulse systems*, Ukr. Math. J., **41**, № 10, 1187 – 1190 (1989).
13. V. I. Tkachenko, *On exponential dichotomy and invariant sets of impulsive systems*, Communications in Difference Equations: Proc. Fourth Int. Conf. Difference Equat., Poznan, Poland, August 27 – 31, **1998**, CRC Press (2000), p. 367 – 378.
14. M. O. Perestyuk, P. V. Feketa, *Invariant manifolds of a class of systems of differential equations with impulse perturbation*, Nonlinear Oscillations, **13**, № 2, 260 – 273 (2010).
15. J. K. Hale, *Ordinary differential equations,* second ed., Robert E. Krieger Publ. Co., Inc., Huntington, N. Y. (1980).
16. A. M. Samoilenko, *Some problems in the theory of perturbations of smooth invariant tori of dynamical systems*, Ukr. Math. J., **46**, № 12, 1848 – 1889 (1996).
17. D. Husemoller, *Fibre bundles*, McGraw-Hill, New York (1966).
18. A. M. Samoilenko, N. A. Perestyuk, *Impulsive differential equations*, World Sci. Publ., Singapore (1995).
19. A. M. Samoilenko, *Elements of the mathematical theory of multi-frequency oscillations*, Kluwer Acad. Publ. Group, Dordrecht (1991).
20. A. V. Dvornyk, V. I. Tkachenko, *Almost periodic solutions for systems with delay and nonfixed times of impulsive actions*, Ukr. Math. J., **68**, № 11, 1673 – 1693 (2017).

Одержано 31.01.22