DOI: 10.37863/umzh.v74i6.7141

УДК 517.51

А. С. Романюк, С. Я. Янченко (Ін-т математики НАН України, Київ)

НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ТА БАГАТЬОХ ЗМІННИХ ІЗ ПРОСТОРІВ НІКОЛЬСЬКОГО – БЄСОВА ТА СОБОЛЄВА*

In this paper, we obtain exact-order estimates for the best orthogonal trigonometric approximations of the Nikol'skii – Besov classes $B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq \theta \leq \infty$, of periodic functions of one and many variables with dominating mixed smoothness in the space $B_{\infty,1}(\mathbb{T}^d)$. In the multidimensional case, $d \geq 2$, we establish exact-order estimates for approximations of the mentioned classes of functions by their step-hyperbolic Fourier sums and find the orthoprojection width orders in the same space. The behavior of corresponding approximation characteristics of the Sobolev classes $W^{\boldsymbol{r}}_{1,\boldsymbol{\alpha}}\left(\mathbb{T}^d\right)$ for $d \in \{1, 2\}$ is also studied.

Одержано точні за порядком оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів Нікольського – Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}\left(\mathbb{T}^d\right)$, $1 \leq \theta \leq \infty$, періодичних функцій однієї змінної та багатьох змінних з домінуючою мішаною похідною у просторі $B_{\infty,1}\left(\mathbb{T}^d\right)$. У багатовимірному випадку, $d \geq 2$, встановлено точні за порядком оцінки наближень згаданих класів функцій їхніми східчасто-гіперболічними сумами Фур'є, а також порядки ортопоперечників у цьому ж просторі. Досліджено поведінку відповідних апроксимаційних характеристик класів Соболєва $W^{\boldsymbol{r}}_{1,\boldsymbol{\alpha}}\left(\mathbb{T}^d\right)$ при $d \in \{1, 2\}$.

1. Вступ. У роботі продовжено дослідження апроксимаційних характеристик класів Нікольського – Бєсова $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}\left(\mathbb{T}^d\right)$ періодичних функцій однієї та багатьох змінних у просторі $B_{\infty,1}\left(\mathbb{T}^d\right)$, норма в якому є не слабшою, ніж $L_\infty\left(\mathbb{T}^d\right)$-норма. Нагадаємо, що деякі апроксимаційні характеристики функціональних класів у просторі $B_{\infty,1}\left(\mathbb{T}^d\right)$ вивчалися у роботах [1 – 5]. У згаданих роботах зазначалося, що мотивацією до дослідження відповідних характеристик саме у просторі $B_{\infty,1}\left(\mathbb{T}^d\right)$ була та обставина, що питання про їхні порядкові значення у просторі $L_\infty\left(\mathbb{T}^d\right)$ при $d > 2$ на даний час залишаються відкритими.

Основну частину роботи присвячено встановленню точних за порядком оцінок найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів $B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}\left(\mathbb{T}^d\right)$, $1 \leq \theta \leq \infty$, у просторі $B_{\infty,1}\left(\mathbb{T}^d\right)$, $d \geq 1$. Крім цього, при $d \geq 2$ з використанням одержаних результатів вдалося встановити точні за порядком оцінки наближень згаданих класів функцій їх східчасто-гіперболічними сумами Фур'є у просторі $B_{\infty,1}\left(\mathbb{T}^d\right)$, а також порядки ортопоперечників класів $B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}\left(\mathbb{T}^d\right)$, $d \geq 1$, у цьому ж просторі. У деяких випадках досліджено поведінку відповідних апроксимаційних характеристик класів Соболєва $W^{\boldsymbol{r}}_{1,\boldsymbol{\alpha}}\left(\mathbb{T}^d\right)$ при $d \in \{1, 2\}$. Зазначимо, що одержані оцінки розглянутих апроксимаційних характеристик доповнюють результати, встановлені у роботах [3, 5].

2. Означення класів функцій і апроксимаційних характеристик та допоміжні твердження. Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, — евклідів простір з елементами $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ і $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + \ldots + x_d y_d$. Через $L_p\left(\mathbb{T}^d\right)$, $\mathbb{T}^d = \prod_{j=1}^{d} [0, 2\pi)$, $1 \leq p \leq \infty$, позначимо простір функцій f, які є 2π-періодичними за кожною змінною зі скінченною нормою

* Виконано за часткової фінансової підтримки за проєктом „Інноваційні методи у теорії диференціальних рівнянь, обчислювальній математиці та математичному моделюванні" (номер державної реєстрації 0122U000670) в рамках програми „Підтримка пріоритетних для держави наукових досліджень і науково-технічних (експериментальних) розробок Відділення математики НАН України на 2022 – 2023 рр."

$$\|f\|_p := \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(\boldsymbol{x})|^p \, d\boldsymbol{x}\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{L_\infty(\mathbb{T}^d)} = \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{T}^d} |f(\boldsymbol{x})|.$$

Також будемо розглядати множину функцій $L_p^0\left(\mathbb{T}^d\right)$, яка визначається таким чином:

$$L_p^0\left(\mathbb{T}^d\right) := \left\{ f : f \in L_p\left(\mathbb{T}^d\right), \int\limits_0^{2\pi} f(\boldsymbol{x})\, dx_j = 0, \quad j = \overline{1,d}, \quad \text{майже скрізь} \right\}.$$

Далі, з метою спрощення записів, також будемо використовувати позначення L_p замість $L_p\left(\mathbb{T}^d\right)$ і відповідно L_p^0 замість $L_p^0\left(\mathbb{T}^d\right)$.

Тепер наведемо означення класів $B_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}}\left(\mathbb{T}^d\right)$ (зокрема, $H_p^{\boldsymbol{r}}\left(\mathbb{T}^d\right)$), які досліджуються в роботі. При цьому нам буде зручно користуватися означенням цих класів у термінах так званого декомпозиційного нормування (див., наприклад, [6, 7]).

Для векторів $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d),\ s_j \in \mathbb{N},\ \boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d),\ k_j \in \mathbb{Z},\ j = \overline{1,d}$, покладемо

$$\rho(\boldsymbol{s}) = \left\{\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d) : 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j},\ j = \overline{1,d}\right\}$$

і для $f \in L_p^0$ позначимо

$$\delta_{\boldsymbol{s}}(f) := \delta_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho(\boldsymbol{s})} \widehat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})},$$

де $\widehat{f}(\boldsymbol{k}) = \int_{\mathbb{T}^d} f(\boldsymbol{t})\, e^{-i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{t})} d\boldsymbol{t}$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

Нехай $1 < p < \infty,\ 1 \le \theta \le \infty,\ \boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_d),\ r_j > 0,\ j = \overline{1,d}$. Тоді класи $B_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}}\left(\mathbb{T}^d\right)$ можна означити таким чином [7]:

$$B_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}} := B_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}}\left(\mathbb{T}^d\right) := \left\{ f \in L_p^0 : \|f\|_{B_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}}} \le 1 \right\},$$

де

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}}} \asymp \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

при $1 \le \theta < \infty$ і

$$\|f\|_{B_{p,\infty}^{\boldsymbol{r}}} \equiv \|f\|_{H_p^{\boldsymbol{r}}} \asymp \sup_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p.$$

Тут і далі для додатних величин a і b використовуємо запис $a \asymp b$, який означає, що існують такі додатні сталі C_1 і C_2, які не залежать від одного істотного параметра у величинах a і b, що $C_1 a \le b$ (пишемо $a \ll b$) і $C_2 a \ge b$ (пишемо $a \gg b$). Всі сталі $C_i,\ i = 1, 2, \ldots$, які зустрічаються в роботі, можуть залежати лише від тих параметрів, що входять в означення класу, метрики, в якій оцінюється похибка наближення, та розмірності простору $\mathbb{R}^d$.

Зауважимо, що видозмінивши певним чином „блоки" $\delta_{\boldsymbol{s}}(f)$, наведене означення класів $B_{p,\theta}^{\boldsymbol{r}}$ можна поширити і на крайні значення $p = 1$ і $p = \infty$ (див., наприклад, [7], зауваження 2.1).

Нехай $V_l(t),\ t\in\mathbb{R},\ l\in\mathbb{N}$, позначає ядро Валле Пуссена вигляду

$$V_l(t)=1+2\sum_{k=1}^{l}\cos kt+2\sum_{k=l+1}^{2l-1}\left(1-\frac{k-l}{l}\right)\cos kt,$$

де при $l=1$ третій доданок вважаємо рівним нулеві. Поставимо у відповідність кожному вектору $\boldsymbol{s}=(s_1,\ldots,s_d),\ s_j\in\mathbb{N},\ j=\overline{1,d}$, поліном

$$A_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x})=\prod_{j=1}^{d}\left(V_{2^{s_j}}(x_j)-V_{2^{s_j-1}}(x_j)\right)$$

і для $f\in L_p^0,\ 1\le p\le\infty$, покладемо

$$A_{\boldsymbol{s}}(f):=A_{\boldsymbol{s}}\left(f,\boldsymbol{x}\right)=\left(f*A_{\boldsymbol{s}}\right)(\boldsymbol{x}),$$

де $*$ означає операцію згортки. Тоді при $1\le p\le\infty,\ \boldsymbol{r}=(r_1,\ldots,r_d),\ r_j>0,\ j=\overline{1,d}$, класи $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ можна означити таким чином:

$$B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}:=\left\{f\in L_p^0\colon \|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}}\le 1\right\},$$

де

$$\|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}}\asymp\left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d}2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta}\|A_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \tag{1}$$

при $1\le\theta<\infty$ і

$$\|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}}\equiv\|f\|_{H^{\boldsymbol{r}}_p}\asymp\sup_{s\in\mathbb{N}^d}2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})}\|A_{\boldsymbol{s}}(f)\|_p. \tag{2}$$

Зауважимо, що зі зростанням параметра θ класи $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ розширюються, тобто

$$B^{\boldsymbol{r}}_{p,1}\subset B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta_1}\subset B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta_2}\subset B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}\equiv H^{\boldsymbol{r}}_p,\quad 1\le\theta_1<\theta_2\le\infty.$$

Тепер нагадаємо означення класів $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$, які також досліджуються в роботі.

Нехай $F_{\boldsymbol{r}}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}\right)$ — багатовимірні аналоги ядер Бернуллі, тобто

$$F_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha})=2^d\sum_{\boldsymbol{k}}\prod_{j=1}^{d}k_j^{-r_j}\cos\left(k_jx_j-\frac{\alpha_j\pi}{2}\right),\quad r_j>0,\quad \alpha_j\in\mathbb{R},$$

і підсумовування проводиться за векторами $\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_d)$, для яких $k_j>0,\ j=\overline{1,d}$. Тоді через $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$ позначимо клас функцій f, які мають вигляд

$$f\left(\boldsymbol{x}\right)=\varphi\left(\boldsymbol{x}\right)*F_{\boldsymbol{r}}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}\right)=(2\pi)^{-d}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\varphi\left(\boldsymbol{y}\right)F_{\boldsymbol{r}}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha}\right)d\boldsymbol{y},$$

$$\varphi\in L_p,\quad \|\varphi\|_p\le 1.$$

Нагадаємо, що для введених класів справджуються такі вкладення:

$$B^{\boldsymbol{r}}_{p,p} \subset W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}} \subset B^{\boldsymbol{r}}_{p,2}, \quad 1 < p \leq 2,$$

$$B^{\boldsymbol{r}}_{p,2} \subset W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}} \subset B^{\boldsymbol{r}}_{p,p}, \quad 2 \leq p < \infty,$$

$$W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}} \subset B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty} \equiv H^{\boldsymbol{r}}_{p}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Зокрема, при $\theta = p = 2$

$$W^{\boldsymbol{r}}_{2,\boldsymbol{\alpha}} \subset B^{\boldsymbol{r}}_{2,2} \subset W^{\boldsymbol{r}}_{2,\boldsymbol{\alpha}}.$$

З історією дослідження апроксимаційних характеристик класів $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$, $H^{\boldsymbol{r}}_{p}$ і $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, $1 \leq \theta < \infty$, у просторах $L_q\left(\mathbb{T}^d\right)$, $1 \leq q \leq \infty$, можна ознайомитись у монографіях [13 – 15, 30] і, зокрема, у просторі $B_{\infty,1}\left(\mathbb{T}^d\right)$ — у роботах [1 – 5].

У подальших міркуваннях будемо вважати, що координати векторів $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_d)$, які входять в означення класів, впорядковано таким чином: $0 < r_1 = r_2 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \ldots \ldots \leq r_d$. Вектору $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_d)$ поставимо у відповідність вектор $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d)$, $\gamma_j = r_j/r_1$, $j = \overline{1,d}$, а вектору $\boldsymbol{\gamma}$, в свою чергу, — вектор $\boldsymbol{\gamma}' = (\gamma'_1, \ldots, \gamma'_d)$, де $\gamma'_j = \gamma_j$, якщо $j = \overline{1,\nu}$ і $1 < \gamma'_j < \gamma_j$, $j = \overline{\nu+1,d}$.

Тепер наведемо означення норми у підпросторі $B_{\infty,1}\left(\mathbb{T}^d\right)$ (далі пишемо $B_{\infty,1}$) функцій $f \in L_\infty$. Для тригонометричних поліномів t за кратною тригонометричною системою $\left\{e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\right\}_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ норма $\|t\|_{B_{\infty,1}}$ визначається згідно з формулою

$$\|t\|_{B_{\infty,1}} := \sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d} \|A_{\boldsymbol{s}}(t)\|_\infty.$$

Аналогічно означується норма $\|f\|_{B_{\infty,1}}$ для будь-якої функції $f \in L_\infty$ такої, що ряд

$$\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d} \|A_{\boldsymbol{s}}(f)\|_\infty$$

збігається. Зазначимо, що для $f \in B_{\infty,1}$ виконується співвідношення

$$\|f\|_\infty \ll \|f\|_{B_{\infty,1}}. \tag{3}$$

Далі наведемо означення апроксимаційної характеристики, яку будемо досліджувати, і сформулюємо допоміжні твердження.

Нехай $\mathscr{X}$ — деякий нормований функціональний простір із нормою $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$ і Ω_M — довільний набір із M d-вимірних векторів $\boldsymbol{k}^j = \left(k^j_1, \ldots, k^j_d\right)$, $j = \overline{1,M}$, з цілочисловими координатами. Для функції $f \in \mathscr{X}$ позначимо

$$S_{\Omega_M}(f) := S_{\Omega_M}(f, \boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{M} \widehat{f}\left(\boldsymbol{k}^j\right) e^{i\left(\boldsymbol{k}^j,\boldsymbol{x}\right)}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d,$$

де

$$\widehat{f}\left(\boldsymbol{k}^j\right) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} f(\boldsymbol{t})\, e^{-i\left(\boldsymbol{k}^j,\boldsymbol{t}\right)} d\boldsymbol{t}$$

— коефіцієнти Фур'є функції f, які відповідають набору векторів із Ω_M.

Розглянемо апроксимаційну характеристику

$$e_M^{\perp}(f)_{\mathscr{X}} = \inf_{\Omega_M} \|f - S_{\Omega_M}(f)\|_{\mathscr{X}}$$

і для функціонального класу $F \subset \mathscr{X}$ покладемо

$$e_M^{\perp}(F)_{\mathscr{X}} = \sup_{f \in F} e_M^{\perp}(f)_{\mathscr{X}}.$$

Величину $e_M^{\perp}(F)_{\mathscr{X}}$ називають найкращим ортогональним тригонометричним наближенням класу F у просторі $\mathscr{X}$.

Величини $e_M^{\perp}(F)_{\mathscr{X}}$ на класах $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$, $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ і $H^{\boldsymbol{r}}_p$ у просторах L_q, $1 \le q \le \infty$, і $B_{\infty,1}$ досліджували в роботах [8 – 12] (див. також [13]), де можна ознайомитися з детальною бібліографією.

Сформулюємо кілька відомих тверджень, необхідних для подальшого викладу.

Теорема А [12]**.** *Нехай* $1 \le p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $r_1 > \dfrac{1}{p}$. *Тоді справедливою є оцінка*

$$e_M^{\perp}\left(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}\right)_{\infty} \asymp \left(M^{-1}\log^{\nu-1} M\right)^{r_1-\frac{1}{p}} \left(\log^{\nu-1} M\right)^{1-\frac{1}{\theta}}.$$

Лема А [14, с. 11]**.** *Справджується співвідношення*

$$\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma}')\ge l} 2^{-\beta(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})} \asymp 2^{-\beta l} l^{\nu-1}, \quad \beta > 0.$$

Щоб сформулювати наступне твердження для $f \in L_1(\mathbb{T})$, позначимо

$$S_n(f) := S_n(f,x) = \sum_{s=1}^{n} \delta_s(f,x). \tag{4}$$

Якщо $F \subset \mathscr{X} \subset L_\infty(\mathbb{T})$ — деякий функціональний клас, то покладемо

$$\mathcal{E}_n(F)_{\mathscr{X}} = \sup_{f \in F} \|f - S_n(f)\|_{\mathscr{X}}.$$

Теорема Б [15] (гл.1, § 3)**.** *Нехай* $d = 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *і* $r_1 > 1$. *Тоді справедливою є оцінка*

$$\mathcal{E}_n\left(W^{r_1}_{1,\alpha}\right)_{\infty} \asymp 2^{-n(r_1-1)}.$$

3. Основні результати. Розглянемо спочатку одновимірний випадок.

Теорема 1. *Нехай* $d = 1$, $1 \le \theta \le \infty$ *і* $r_1 > 1$. *Тоді*

$$e_M^{\perp}\left(B^{r_1}_{1,\theta}\right)_{B_{\infty,1}} \asymp M^{-r_1+1}. \tag{5}$$

Доведення. Встановимо в (5) оцінку зверху. Попередньо зауважимо, що внаслідок вкладення $B^{r_1}_{1,\theta} \subset H^{r_1}_1$, $1 \le \theta < \infty$, її достатньо отримати при $\theta = \infty$, тобто для класів $H^{r_1}_1$.

Отже, нехай $M \in \mathbb{N}$ і $f \in H^{r_1}_1$. Розглянемо наближення функції f за допомогою поліномів вигляду (4), де число n пов'язане з M співвідношенням $2^n \le M \le 2^{n+1}$. Тоді згідно з означенням норми у просторі $B_{\infty,1}$, беручи до уваги властивість згортки, отримуємо

$$e_M^{\perp}(f)_{B_{\infty,1}} \ll \|f - S_n(f)\|_{B_{\infty,1}} = \left\| \sum_{s=n+1}^{\infty} \delta_s(f) \right\|_{B_{\infty,1}} =$$

$$= \sum_{s=n+1}^{\infty} \left\| A_s * \sum_{s'=s-1}^{s+1} \delta_{s'}(f) \right\|_{\infty} \le \sum_{s=n+1}^{\infty} \|A_s\|_1 \left\| \sum_{s'=s-1}^{s+1} \delta_{s'}(f) \right\|_{\infty} = J_1. \tag{6}$$

Для продовження оцінювання величини J_1 зазначимо, що згідно зі співвідношенням $\|V_{2^s}\|_1 \le \le C_3,\ C_3 > 0$ (див., наприклад, [15], гл. 1, § 1), маємо

$$\|A_s\|_1 = \|V_{2^s} - V_{2^{s-1}}\|_1 \le \|V_{2^s}\|_1 + \|V_{2^{s-1}}\|_1 \le C_4, \quad C_4 > 0.$$

Тому для величини J_1 одержуємо оцінку

$$J_1 \ll \sum_{s=n+1}^{\infty} \left\| \sum_{s'=s-1}^{s+1} \delta_{s'}(f) \right\|_{\infty} \le \sum_{s=n+1}^{\infty} \sum_{s'=s-1}^{s+1} \|\delta_{s'}(f)\|_{\infty} \ll$$

$$\ll \sum_{s=n}^{\infty} \|\delta_s(f)\|_{\infty} = \sum_{s=n}^{\infty} \left\| \delta_s \left(\sum_{s'=s-1}^{s+1} A_{s'}(f) \right) \right\|_{\infty} = J_2. \tag{7}$$

Далі, враховуючи, що норма оператора $\delta_s : \delta_s f = \delta_s(f)$, як оператора з $L_1(\mathbb{T})$ в $L_\infty(\mathbb{T})$, не перевищує за порядком 2^s, продовжуємо оцінювання величини J_2:

$$J_2 \ll \sum_{s=n}^{\infty} 2^s \left\| \sum_{s'=s-1}^{s+1} A_{s'}(f) \right\|_1 \le \sum_{s=n}^{\infty} 2^s \sum_{s'=s-1}^{s+1} \|A_{s'}(f)\|_1 = J_3.$$

Беручи до уваги, що для функції $f \in H_1^{r_1}$ виконується співвідношення (2) при $p = 1$, тобто $\|A_{s'}(f)\|_1 \ll 2^{-s' r_1}$, можемо записати

$$J_3 \ll \sum_{s=n}^{\infty} 2^s \sum_{s'=s-1}^{s+1} 2^{-s' r_1} \ll \sum_{s=n}^{\infty} 2^s 2^{-s r_1} = \sum_{s=n}^{\infty} 2^{-s(r_1-1)} \ll 2^{-n(r_1-1)}. \tag{8}$$

Отже, враховуючи (6) – (8), а також співвідношення між числами M і n, отримуємо оцінку

$$e_M^{\perp}\left(B_{1,\theta}^{r_1}\right)_{B_{\infty,1}} \ll M^{-r_1+1}.$$

Оцінку зверху встановлено.

Щодо оцінки знизу в (5) зауважимо, що вона є наслідком теореми А за умови $p = 1$ і $\nu = 1$, оскільки, згідно зі співвідношенням (3), можемо записати

$$e_M^{\perp}\left(B_{1,\theta}^{r_1}\right)_{B_{\infty,1}} \gg e_M^{\perp}\left(B_{1,\theta}^{r_1}\right)_{\infty} \asymp M^{-r_1+1}.$$

Теорему 1 доведено.

***Наслідок* 1.** *Нехай* $d = 1,\ 1 \le \theta \le \infty$ *і* $r_1 > 1$. *Тоді*

$$\mathcal{E}_n\left(B_{1,\theta}^{r_1}\right)_{B_{\infty,1}} \asymp 2^{-n(r_1-1)}. \tag{9}$$

Оцінку зверху в (9) встановлено при доведенні теореми 1. Відповідна оцінка знизу також є наслідком цієї теореми, оскільки при $2^n \le M \le 2^{n+1}$ маємо

$$\mathcal{E}_n\left(B^{r_1}_{1,\theta}\right)_{B_{\infty,1}} \gg e^{\perp}_M\left(B^{r_1}_{1,\theta}\right)_{B_{\infty,1}} \asymp 2^{-n(r_1-1)}.$$

***Зауваження* 1.** Проаналізувавши доведення теореми 1 і наслідку 1, можемо зробити висновок, що при $d=1,\ 1\le\theta\le\infty$ і $r_1>1$ справджуються співвідношення

$$e^{\perp}_M\left(B^{r_1}_{1,\theta}\right)_{B_{\infty,1}} \asymp e^{\perp}_M\left(B^{r_1}_{1,\theta}\right)_{\infty},$$

$$\mathcal{E}_n\left(B^{r_1}_{1,\theta}\right)_{B_{\infty,1}} \asymp \mathcal{E}_n\left(B^{r_1}_{1,\theta}\right)_{\infty}.$$

Далі встановимо аналогічні теоремі 1 та наслідку 1 твердження для класів $W^{r_1}_{1,\alpha}$.

Теорема 2. *Нехай* $d=1,\ \alpha\in\mathbb{R}$ *і* $r_1>1$. *Тоді*

$$e^{\perp}_M\left(W^{r_1}_{1,\alpha}\right)_{B_{\infty,1}} \asymp M^{-r_1+1}.$$

Доведення. Оцінка зверху випливає з теореми 1 згідно з вкладенням $W^{r_1}_{1,\alpha}\subset H^{r_1}_1$. Відповідна оцінка знизу є наслідком теореми Б за умови $2^n \le M \le 2^{n+1}$.

Теорему 2 доведено.

***Наслідок* 2.** *Нехай* $d=1,\ \alpha\in\mathbb{R}$ *і* $r_1>1$. *Тоді справджується співвідношення*

$$\mathcal{E}_n\left(W^{r_1}_{1,\alpha}\right)_{B_{\infty,1}} \asymp 2^{-n(r_1-1)}.$$

Оцінка зверху випливає з (9), оскільки $W^{r_1}_{1,\alpha}\subset H^{r_1}_1$, а відповідна оцінка знизу є наслідком теореми Б і співвідношення (3).

***Зауваження* 2.** Аналогічно, як і у випадку класів $B^{r_1}_{1,\theta}$, робимо висновок, що для класів $W^{r_1}_{1,\alpha}$ при $d=1,\ \alpha\in\mathbb{R}$ і $r_1>1$ справджуються співвідношення

$$e^{\perp}_M\left(W^{r_1}_{1,\alpha}\right)_{B_{\infty,1}} \asymp e^{\perp}_M\left(W^{r_1}_{1,\alpha}\right)_{\infty},$$

$$\mathcal{E}_n\left(W^{r_1}_{1,\alpha}\right)_{B_{\infty,1}} \asymp \mathcal{E}_n\left(W^{r_1}_{1,\alpha}\right)_{\infty}.$$

У наступному твердженні розглянемо багатовимірний випадок ($d\ge 2$).

Теорема 3. *Нехай* $d\ge2,\ 1\le\theta\le\infty$ *і* $r_1>1$. *Тоді справедливою є оцінка*

$$e^{\perp}_M\left(B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}\right)_{B_{\infty,1}} \asymp \left(M^{-1}\log^{\nu-1}M\right)^{r_1-1}\left(\log^{\nu-1}M\right)^{1-\frac{1}{\theta}}. \tag{10}$$

Доведення. Встановимо спочатку оцінку зверху. Нехай $f\in B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}$ і $\boldsymbol{\gamma}=(\gamma_1,\ldots,\gamma_d)$. Тоді, поклавши $\gamma(d)=\gamma_1+\ldots+\gamma_d$ і підібравши число $n=n(M)\in\mathbb{N}$ з умови $M\asymp 2^n n^{\nu-1}$ та скориставшись властивістю згортки, можемо записати

$$e^{\perp}_M(f)_{B_{\infty,1}} \ll \left\| f-\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})<n}\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\right\|_{B_{\infty,1}} = \left\|\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\ge n}\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\right\|_{B_{\infty,1}} =$$

$$= \sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d} \left\| A_{\boldsymbol{s}} * \sum_{\substack{\boldsymbol{s}'\in\mathbb{N}^d \\ (\boldsymbol{s}',\boldsymbol{\gamma})\geq n}} \delta_{\boldsymbol{s}'}(f) \right\|_\infty \leq \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\geq n-\gamma(d)} \left\| A_{\boldsymbol{s}} * \sum_{\substack{\boldsymbol{s}'\in\mathbb{N}^d \\ \|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty\leq 1}} \delta_{\boldsymbol{s}'}(f) \right\|_\infty \leq$$

$$\leq \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\geq n-\gamma(d)} \|A_{\boldsymbol{s}}\|_1 \left\| \sum_{\substack{\boldsymbol{s}'\in\mathbb{N}^d \\ \|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty\leq 1}} \delta_{\boldsymbol{s}'}(f) \right\|_\infty \ll \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\geq n-\gamma(d)} \sum_{\substack{\boldsymbol{s}'\in\mathbb{N}^d \\ \|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty\leq 1}} \|\delta_{\boldsymbol{s}'}(f)\|_\infty \ll$$

$$\ll \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\geq n-2\gamma(d)} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f)\|_\infty = \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\geq n-2\gamma(d)} \left\| \delta_{\boldsymbol{s}} \left(\sum_{\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty\leq 1} A_{\boldsymbol{s}'}(f) \right) \right\|_\infty = J_4. \qquad (11)$$

Далі, беручи до уваги, що норма оператора $\delta_{\boldsymbol{s}} : \delta_{\boldsymbol{s}} f = \delta_{\boldsymbol{s}}(f)$, як оператора з $L_1(\mathbb{T}^d)$ в $L_\infty(\mathbb{T}^d)$, не перевищує за порядком $2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})}$, де $\boldsymbol{1} = (1,\ldots,1) \in \mathbb{N}^d$, для величини J_4 одержуємо

$$J_4 \ll \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\geq n-2\gamma(d)} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})} \sum_{\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty\leq 1} \|A_{\boldsymbol{s}'}(f)\|_1 \ll \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\geq n-3\gamma(d)} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})} \|A_{\boldsymbol{s}}(f)\|_1 = J_5. \qquad (12)$$

Для продовження оцінювання величини J_5 розглянемо кілька випадків.

1. Нехай $1 < \theta < \infty$. Тоді, застосувавши до J_5 нерівність Гельдера з показником θ і врахувавши (1), можемо записати

$$J_5 \leq \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\geq n-3\gamma(d)} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|A_{\boldsymbol{s}}(f)\|_1^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\geq n-3\gamma(d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r}-\boldsymbol{1})\frac{\theta}{\theta-1}} \right)^{1-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\geq n-3\gamma(d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r}-\boldsymbol{1})\frac{\theta}{\theta-1}} \right)^{1-\frac{1}{\theta}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\geq n-3\gamma(d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\tilde{\boldsymbol{\gamma}})(r_1-1)\frac{\theta}{\theta-1}} \right)^{1-\frac{1}{\theta}} = J_6, \qquad (13)$$

де $\tilde{\boldsymbol{\gamma}} = (\tilde{\gamma}_1,\ldots,\tilde{\gamma}_d)$ — вектор з координатами $\tilde{\gamma}_j = \dfrac{r_j-1}{r_1-1}$, $j=\overline{1,d}$, а $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{1}$ позначає вектор з координатами $r_j - 1$, $j = \overline{1,d}$. Легко бачити, що $\tilde{\gamma}_j = \gamma_j = 1$, $j = \overline{1,\nu}$, і $1 < \gamma_j < \tilde{\gamma}_j$ при $j = \overline{\nu+1,d}$, а тому, використовуючи лему А при $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$, отримуємо

$$J_6 \ll 2^{-n(r_1-1)} n^{(\nu-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)} \asymp \left(M^{-1}\log^{\nu-1} M\right)^{r_1-1} \left(\log^{\nu-1} M\right)^{1-\frac{1}{\theta}}. \qquad (14)$$

Поєднуючи (11)–(14), приходимо до шуканої оцінки зверху величини $e^\perp_M\left(B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}\right)_{B_{\infty,1}}$ у випадку $1 < \theta < \infty$.

2. Нехай $\theta = 1$. Тоді J_5 оцінюємо таким чином:

$$J_5 = \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\geq n-3\gamma(d)} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \|A_{\boldsymbol{s}}(f)\|_1 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})} \ll$$

$$\ll \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\geq n-3\gamma(d)} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})}\|A_{\boldsymbol{s}}(f)\|_1 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})(r_1-1)} \leq$$

$$\leq \|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}} \sup_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\geq n-3\gamma(d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})(r_1-1)} \ll 2^{-n(r_1-1)} \asymp \left(M^{-1}\log^{\nu-1} M\right)^{r_1-1}. \tag{15}$$

Із (11), (12) і (15) випливає шукана оцінка зверху величини $e^{\perp}_M \left(B^{\boldsymbol{r}}_{1,1}\right)_{B_{\infty,1}}$.

3. У випадку $\theta = \infty$, враховуючи, що для $f \in B^{\boldsymbol{r}}_{1,\infty} \equiv H^{\boldsymbol{r}}_1$ згідно з (2) справджується співвідношення $\|A_{\boldsymbol{s}}(f)\|_1 \ll 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})}$, $\boldsymbol{s} \in \mathbb{N}^d$, маємо

$$J_5 \ll \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\geq n-3\gamma(d)} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})} 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \leq \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})\geq n-3\gamma(d)} 2^{-(\boldsymbol{s},\tilde{\boldsymbol{\gamma}})(r_1-1)} \ll$$

$$\ll 2^{-n(r_1-1)} n^{\nu-1} \asymp \left(M^{-1}\log^{\nu-1} M\right)^{r_1-1} \left(\log^{\nu-1} M\right). \tag{16}$$

Поєднуючи (11), (12) і (16), приходимо до шуканої оцінки зверху величини $e^{\perp}_M \left(B^{\boldsymbol{r}}_{1,\infty}\right)_{B_{\infty,1}}$.

Оцінка знизу в (10) є наслідком теореми А згідно зі співвідношенням (3).

Теорему 3 доведено.

Для того щоб навести наслідки теореми 3, а також відомих результатів, введемо необхідні позначення й означимо відповідні апроксимаційні характеристики.

При $d \geq 2$ через $Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n$, $n \in \mathbb{N}$, позначимо множину $Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n = \bigcup_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})<n} \rho(\boldsymbol{s})$, яку називають східчастим гіперболічним хрестом.

Для функції $f \in L_1\left(\mathbb{T}^d\right)$ через $S_{Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n}(f)$ будемо позначати її східчасто-гіперболічну суму Фур'є, тобто

$$S_{Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n}(f) := S_{Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n}(f,\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n} \widehat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})} = \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\gamma})<n} \delta_{\boldsymbol{s}}(f,\boldsymbol{x}).$$

Нехай, як і раніше, $\mathscr{X}$ — деякий нормований функціональний простір із нормою $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$, $\mathscr{X} \subset L_1\left(\mathbb{T}^d\right)$ і $F \subset \mathscr{X}$ — деякий функціональний клас. Тоді через $\mathcal{E}^{\boldsymbol{\gamma}}_n(F)_{\mathscr{X}}$ позначимо величину

$$\mathcal{E}^{\boldsymbol{\gamma}}_n\left(F\right)_{\mathscr{X}} := \mathcal{E}_{Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n}\left(F\right)_{\mathscr{X}} = \sup_{f\in F} \|f - S_{Q^{\boldsymbol{\gamma}}_n}(f)\|_{\mathscr{X}}.$$

Нагадаємо, що величини $\mathcal{E}^{\boldsymbol{\gamma}}_n\left(F\right)_{\mathscr{X}}$ для класів $F = B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ у просторах $\mathscr{X} = L_q$, $1 \leq q \leq \infty$, або $\mathscr{X} = B_{\infty,1}$ досліджували в роботах [3, 16 – 18].

Крім цього, далі, як наслідок оцінок величини $\mathcal{E}^{\boldsymbol{\gamma}}_n \left(B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}\right)_{B_{\infty,1}}$ і відомих результатів наближення цих класів у просторі L_∞, встановимо порядки ортопоперечників $d^{\perp}_M \left(B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}, B_{\infty,1}\right)$. Нагадаємо означення відповідної апроксимаційної характеристики.

Нехай $\{u_i\}_{i=1}^M$ — ортонормована у просторі L_2 система функцій $u_i \in L_\infty$, $i = \overline{1,M}$. Кожній функції $f \in \mathscr{X}$ поставимо у відповідність апроксимаційний агрегат вигляду $\sum_{i=1}^M (f,u_i)u_i$, тобто ортогональну проєкцію функції f на підпростір, породжений системою функцій $\{u_i\}_{i=1}^M$. Тут $(f,u_i) = (2\pi)^{-d}\displaystyle\int_{\mathbb{T}^d} f\left(\boldsymbol{x}\right) \overline{u}_i\left(\boldsymbol{x}\right)\, d\boldsymbol{x}$. Для $F \subset \mathscr{X}$ величина

$$d^{\perp}_M\left(F,\mathscr{X}\right) \inf_{\{u_i\}_{i=1}^M\subset L_\infty} \sup_{f\in F} \left\| f - \sum_{i=1}^M (f,u_i)u_i \right\|_{\mathscr{X}} \tag{17}$$

називається ортопоперечником (Фур'є-поперечником) класу F у просторі $\mathscr{X}$. Ортопоперечник $d_M^{\perp}(F, L_q)$ увів В. М. Темляков [19], і, зокрема, на класах $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$, $H^{\boldsymbol{r}}_p$ і $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ у просторах L_q, $1 \le q \le \infty$, $B_{p,1}$, $p \in \{1, \infty\}$, його досліджували в роботах [5, 20 – 29] (див. також монографії [13 – 15, 30]). У цих роботах можна ознайомитися з історією дослідження відповідних величин і на інших функціональних класах.

Наведемо один із результатів роботи [24], який будемо використовувати при одержанні порядкових оцінок величини $d_M^{\perp}\big(B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}, B_{\infty,1}\big)$.

Теорема B. *Нехай* $d \ge 1$, $1 \le p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$. *Тоді при* $r_1 > \dfrac{1}{p}$ *справджується порядкове співвідношення*

$$d_M^{\perp}\left(B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}, L_\infty\right) \asymp \left(M^{-1}\log^{\nu-1} M\right)^{r_1-\frac{1}{p}} \left(\log^{\nu-1} M\right)^{1-\frac{1}{\theta}}.$$

Зауважимо, що при $\theta = \infty$, тобто для класів $H^{\boldsymbol{r}}_p$, відповідну оцінку встановлено в [20].

***Наслідок* 3.** *Нехай* $d \ge 2$, $1 \le \theta \le \infty$ *і* $r_1 > 1$. *Тоді*

$$\mathcal{E}_n^{\gamma}\left(B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}\right)_{B_{\infty,1}} \asymp 2^{-n(r_1-1)} n^{(\nu-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{18}$$

Оцінку зверху в (18) встановлено при доведенні теореми 3. Відповідна оцінка знизу також є наслідком теореми 3, оскільки при $M \asymp 2^n n^{\nu-1}$ виконуються співвідношення

$$\mathcal{E}_n^{\gamma}\left(B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}\right)_{B_{\infty,1}} \gg e_M^{\perp}\left(B^{\boldsymbol{r}}_{1,\infty}\right)_{B_{\infty,1}} \asymp 2^{-n(r_1-1)} n^{(\nu-1)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Оцінка (18) доповнює відповідні результати для класів $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, $1 < p < \infty$ [3].

Наступний наслідок стосується ортопоперечників класів $B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}$ у просторі $B_{\infty,1}$.

***Наслідок* 4.** *Нехай* $d \ge 1$, $1 \le \theta \le \infty$. *Тоді при* $r_1 > 1$

$$d_M^{\perp}\left(B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}, B_{\infty,1}\right) \asymp M^{-r_1+1}\left(\log^{\nu-1} M\right)^{r_1-\frac{1}{\theta}}. \tag{19}$$

Оцінка зверху випливає з (9) і (18) при відповідному виборі чисел n, а оцінка знизу згідно з нерівністю (3) є наслідком теореми B при $p = 1$.

Зазначимо, що оцінка (19) доповнює відповідний результат для класів $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, $1 < p < \infty$, встановлений у [5].

Крім того, при дослідженні апроксимаційних характеристик класів $B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}$ виявлено, що в одновимірному випадку, на відміну від багатовимірного ($d \ge 2$), одержані результати не залежать від параметра θ.

Насамкінець наведемо два наслідки, які стосуються відповідних апроксимаційних характеристик класів Соболєва $W^{\boldsymbol{r}}_{1,\mathbf{0}}$. Для цього нам також необхідне допоміжне твердження.

Теорема Г [20]. *Нехай* $d = 2$, $\boldsymbol{r} = (r_1, r_1)$, $r_1 > 1$. *Тоді справедливою є оцінка*

$$d_M^{\perp}\left(W^{\boldsymbol{r}}_{1,\mathbf{0}}, L_\infty\right) \asymp M^{-r_1+1}(\log M)^{r_1}.$$

***Наслідок* 5.** *Нехай* $d = 2$, $\boldsymbol{r} = (r_1, r_1)$, $r_1 > 1$. *Тоді*

$$d_M^{\perp}\left(W^{\boldsymbol{r}}_{1,\mathbf{0}}, B_{\infty,1}\right) \asymp M^{-r_1+1}(\log M)^{r_1}. \tag{20}$$

Оцінка зверху випливає з (19) при $\theta = \infty$ внаслідок вкладення $W^{\boldsymbol{r}}_{1,\mathbf{0}} \subset H^{\boldsymbol{r}}_1$. Відповідна оцінка знизу в (20) одержується з теореми Г згідно зі співвідношенням (3).

***Наслідок* 6.** *Нехай* $d = 2,\ \boldsymbol{r} = (r_1, r_1),\ r_1 > 1$. *Тоді*

$$\mathcal{E}_n^{\mathbf{1}}\left(W^{\boldsymbol{r}}_{1,\mathbf{0}}\right)_\infty \asymp \mathcal{E}_n^{\mathbf{1}}\left(W^{\boldsymbol{r}}_{1,\mathbf{0}}\right)_{B_{\infty,1}} \asymp 2^{-n(r_1-1)}n. \tag{21}$$

Зауважимо, що оцінку зверху в (21) достатньо встановити для величини $\mathcal{E}_n^{\mathbf{1}}\left(W^{\boldsymbol{r}}_{1,\mathbf{0}}\right)_{B_{\infty,1}}$, а знизу — для $\mathcal{E}_n^{\mathbf{1}}\left(W^{\boldsymbol{r}}_{1,\mathbf{0}}\right)_\infty$.

Отже, оцінка зверху величини $\mathcal{E}_n^{\mathbf{1}}\left(W^{\boldsymbol{r}}_{1,\mathbf{0}}\right)_{B_{\infty,1}}$ випливає з наслідку 3 при умові $d = 2,\ \theta = \infty$ згідно з вкладенням $W^{\boldsymbol{r}}_{1,\mathbf{0}} \subset H^r_1$. Оцінка знизу величини $\mathcal{E}_n^{\mathbf{1}}\left(W^{\boldsymbol{r}}_{1,\mathbf{0}}\right)_\infty$ випливає з теореми Г при умові, що число $n \in \mathbb{N}$ підібрано по заданому M із співвідношення $M \asymp 2^n n$.

Література

1. E. S. Belinsky, *Estimates of entropy numbers and Gaussian measures for classes of functions with bounded mixed derivative*, J. Approx. Theory, **93**, 114 – 127 (1998).
2. А. С. Романюк, В. С. Романюк, *Апроксимаційні характеристики класів періодичних функцій багатьох змінних у просторі* $B_{\infty,1}$, Укр. мат. журн., **71**, № 2, 271 – 282 (2019).
3. А. С. Романюк, В. С. Романюк, *Оцінки деяких апроксимаційних характеристик класів періодичних функцій однієї та багатьох змінних*, Укр. мат. журн., **71**, № 8, 1102 – 1115 (2019).
4. M. V. Hembarskyi, S. B. Hembarska, K. V. Solich, *The best approximations and widths of the classes of periodical functions of one and several variables in the space* $B_{\infty,1}$, Mat. Stud., **51**, № 1, 74 – 85 (2019).
5. А. С. Романюк, В. С. Романюк, *Апроксимаційні характеристики і властивості операторів найкращого наближення класів функцій з просторів Соболєва та Нікольського – Бєсова*, Укр. мат. вісн., **17**, № 3, 372 – 395 (2020).
6. Т. И. Аманов, *Теоремы представления и вложения для функциональных пространств* $S^{(r)}_{p,\theta}B(\mathbb{R}_n)$ *и* $S^{(r)*}_{p,\theta}B$ $(0 \le x_j \le 2\pi;\ j = 1, \ldots, n)$, Тр. Мат. ин-та АН СССР, **77**, 5 – 34 (1965).
7. П. И. Лизоркин, С. М. Никольский, *Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения*, Тр. Мат. ин-та АН СССР, **187**, 143 – 161 (1989).
8. Э. С. Белинский, *Приближение „плавающей” системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной*, Исследования по теории функций многих вещественных переменных, Ярослав. ун-т, Ярославль (1988), с. 16 – 33.
9. А. С. Романюк, *Приближение классов функций многих переменных их ортогональными проекциями на подпространства тригонометрических полиномов*, Укр. мат. журн., **48**, № 1, 80 – 89 (1996).
10. А. С. Романюк, *Приближение классов периодических функций многих переменных*, Мат. заметки, **71**, № 1, 109 – 121 (2002).
11. А. С. Романюк, *Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова* $B^r_{p,\theta}$ *периодических функций многих переменных*, Изв. РАН. Сер. мат., **70**, № 2, 69 – 98 (2006).
12. А. С. Романюк, *Наилучшие тригонометрические приближения классов периодических функций многих переменных в равномерной метрике*, Мат. заметки, **82**, № 2, 247 – 261 (2007).
13. А. С. Романюк, *Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных*, Праці Ін-ту математики НАН України, **93** (2012).
14. В. Н. Темляков, *Приближение функций с ограниченной смешанной производной*, Тр. Мат. ин-та АН СССР, **178**, 1 – 112 (1986).
15. V. N. Temlyakov, *Approximation of periodic function*, Nova Sci. Publ., Inc., New York (1993).
16. Динь Зунг, *Приближение функций многих переменных на торе тригонометрическими полиномами*, Мат. сб., **131(173)**, № 2, 251 – 271 (1986).
17. А. С. Романюк, *Приближение классов Бесова периодических функций многих переменных в пространстве* L_q, Укр. мат. журн., **43**, № 10, 1398 – 1408 (1991).
18. А. С. Романюк, *Приближение классов* $B^r_{p,\theta}$ *периодических функций многих переменных линейными методами и наилучшие приближения*, Мат. сб., **195**, № 2, 91 – 116 (2004).
19. В. Н. Темляков, *Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных*, Докл. АН СССР, **267**, № 2, 314 – 317 (1982).

20. В. Н. Темляков, *Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью*, Тр. Мат. ин-та АН СССР, **189**, 138 – 168 (1989).

21. А. В. Андрианов, В. Н. Темляков, *О двух методах распространения свойств систем функций от одной переменной на их тензорное произведение*, Тр. Мат. ин-та РАН, **219**, 32 – 43 (1997).

22. Э. М. Галеев, *Приближение классов периодических функций нескольких переменных ядерными операторами*, Мат. заметки, **47**, № 3, 32 – 41 (1990).

23. А. С. Романюк, *Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций многих переменных*, Мат. сб., **199**, № 2, 93 – 114 (2008).

24. А. С. Романюк, *Поперечники и наилучшее приближение классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных*, Anal. Math., **37**, 181 – 213 (2011).

25. Д. Б. Базарханов, *Оценки поперечников Фурье классов типа Никольского – Бесова и Лизоркина – Трибеля периодических функций многих переменных*, Мат. заметки, **87**, № 2, 305 – 308 (2010).

26. Д. Б. Базарханов, *Приближение всплесками и поперечники Фурье классов периодических функций многих переменных. II*, Anal. Math., **38**, № 4, 249 – 289 (2012).

27. А. С. Романюк, *Оценки аппроксимативных характеристик классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q. I*, Укр. мат. журн., **53**, № 9, 1224 – 1231 (2001).

28. А. С. Романюк, *Оценки аппроксимативных характеристик классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q. II*, Укр. мат. журн., **53**, № 10, 1402 – 1408 (2001).

29. А. С. Романюк, С. Я. Янченко, *Оцінки апроксимаційних характеристик і властивості операторів найкращого наближення класів періодичних функцій у просторі $B_{1,1}$*, Укр. мат. журн., **73**, № 8, 1102 – 1119 (2021).

30. D. Dũng, V. N. Temlyakov, T. Ullrich, *Hyperbolic cross approximation*, Adv. Courses in Math., Birkhäuser/Springer, CRM Barcelona (2018).

Одержано 01.02.22