DOI: 10.37863/umzh.v74i5.7147

УДК 517.5

С. Б. Вакарчук (Університет імені А. Нобеля, Дніпро)

ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАСІВ ФУНКЦІЙ У ВАГОВОМУ ПРОСТОРІ $L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$, $\gamma = \exp(-x^2)$

In the space $L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$, we study approximating characteristics of optimization for the classes $W_2^r(\Omega_{m,\gamma},\varphi,\Psi;\mathbb{R}) := \left\{ f\in L^r_{2,\gamma}(D,\mathbb{R}):\ \int_0^t \Omega_{m,\gamma}(D^r f,u)\varphi(u)du \le \Psi(t)\ \ \forall t\in(0,1)\right\}$, where $r\in\mathbb{Z}_+$, $m\in\mathbb{N}$, $\Omega_{m,\gamma}$ is the generalized modulus of continuity of order m, φ is a weight function, Ψ is a majorant, $D := -\dfrac{d^2}{dx^2}+2x\dfrac{d}{dx}$ is a differential operator, $D^r f = D(D^{r-1}f)$ $(r\in\mathbb{N})$, $D^0 f\equiv f$; $L^0_{2,\gamma}(D,\mathbb{R})\equiv L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$. We obtain lower and upper estimates for widths of the indicated classes in $L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$ and find the conditions on the majorant under which their exact values can be computed. Some specific exact results are also given.

У просторі $L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$ досліджуються апроксимаційні характеристики оптимізаційного змісту для класів функцій $W_2^r(\Omega_{m,\gamma},\varphi,\Psi;\mathbb{R}) := \left\{ f\in L^r_{2,\gamma}(D,\mathbb{R}):\ \int_0^t \Omega_{m,\gamma}(D^r f,u)\varphi(u)du \le \Psi(t)\ \ \forall t\in(0,1)\right\}$, де $r\in\mathbb{Z}_+$, $m\in\mathbb{N}$, $\Omega_{m,\gamma}$ — узагальнений модуль неперервності m-го порядку, φ — вагова функція, Ψ — мажоранта, $D := -\dfrac{d^2}{dx^2}+2x\dfrac{d}{dx}$ — диференціальний оператор, $D^r f = D(D^{r-1}f)$ $(r\in\mathbb{N})$, $D^0 f\equiv f$; $L^0_{2,\gamma}(D,\mathbb{R})\equiv L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$. Для вказаних класів знайдено оцінки знизу та зверху низки різних поперечників у $L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$ і вказано умову на мажоранту, при виконанні якої вдається обчислити їхні точні значення. Наведено кілька конкретизацій точних результатів.

1. Вступ. *1.1.* Питаннями наближення функцій алгебраїчними поліномами в середньому на дійсній осі з вагою Чебишова – Ерміта в різний час займались В. А. Абілов, С. З. Рафальсон, Г. Фройд, H. N. Mhaskar та інші [1 – 9]. Під $L_2(\mathbb{R})$, де $\mathbb{R} = \{x:\ -\infty < x < \infty\}$, розуміємо простір вимірних на $\mathbb{R}$ дійсних функцій, які є сумовними з квадратом на $\mathbb{R}$. Через $L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$, де $\gamma(x) := \exp(-x^2)$, позначимо множину функцій $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для яких $\gamma^{1/2}f\in L_2(\mathbb{R})$. Лінійна множина $L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$ стає гільбертовим простором після введення в ній скалярного добутку

$$(g,\psi)_\gamma := \int_{\mathbb{R}} \gamma(x)g(x)\psi(x)dx; \quad g,\psi\in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}).$$

При цьому норма функції $g\in L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$ дорівнює $\|g\|_{2,\gamma} := \|g\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R})} = (g,g)_\gamma^{1/2}$.

Розглянемо узагальнений оператор зсуву

$$\mathcal{T}_h f(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x\sqrt{1-h^2}+h\tau)\gamma(\tau)d\tau, \quad h\in(0,1),$$

введений С. З. Рафальсоном [1], де $f\in L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$. За допомогою $\mathcal{T}_h f$ В. А. Абіловим та Ф. В. Абіловою в [5] було введено узагальнені скінченні різниці першого та вищих порядків, які майже скрізь на $\mathbb{R}$ мають вигляд

$$\Delta_h^1(f,x) := \mathcal{T}_h f(x) - f(x) = (\mathcal{T}_h - \mathbb{I})f(x),$$

$$\Delta_h^m(f,x) := \Delta_h^1(\Delta_h^{m-1}(f),x) = (\mathcal{T}_h - \mathbb{I})^m f(x) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}\mathcal{T}_h^k f(x), \quad m = 2,3,\ldots,$$

де $\mathcal{T}_h^k f(x) := \mathcal{T}_h(\mathcal{T}_h^{k-1}f)(x),\ k = \overline{1,m},\ \mathcal{T}_h^0 f(x) \equiv f(x)$; $\mathbb{I}$ — одиничний оператор у просторі $L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$. Величину

$$\Omega_{m,\gamma}(f,t) := \sup_{0<h\le t}\|\Delta_h^m(f)\|_{2,\gamma}, \quad t \in (0,1), \tag{1}$$

де $m \in \mathbb{N}$, називають узагальненим модулем неперервності m-го порядку функції $f \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$ [5]. Вона задовольняє такі умови: $\lim_{t\to 0+0}\Omega_{m,\gamma}(f,t) = 0,\ \Omega_{m,\gamma}(f_1 + f_2, t) \le \Omega_{m,\gamma}(f_1,t) + \Omega_{m,\gamma}(f_2,t)$. Покладаючи $\Omega_{m,\gamma}(f,0) = 0$, одержуємо неспадну неперервну на множині $[0,1)$ функцію $\Omega_{m,\gamma}(f)$.

Символом $L_{2,\gamma}^s(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{N}$, позначимо множину функцій $f \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$, у яких похідні $(s-1)$-го порядку $f^{(s-1)}$ абсолютно неперервні на будь-якому скінченному інтервалі, а похідні s-го порядку $f^{(s)}$ належать $L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$. Символом D позначимо диференціальний оператор

$$D := -\frac{d^2}{dx^2} + 2x\frac{d}{dx},$$

який у 1984 році розглянув В. М. Федоров при введенні певних класів функцій у просторі $L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$ [9]. Нехай функція f належить класу $L_{2,\gamma}^{2r}(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{Z}_+$; $L_{2,\gamma}^0(\mathbb{R}) \equiv L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$. Покладемо $D^r f := D(D^{r-1}f)$, $r \in \mathbb{N}$; $D^0 f \equiv f$. Через $L_{2,\gamma}^{2r}(D,\mathbb{R})$ позначимо клас функцій $f \in L_{2,\gamma}^{2r}(\mathbb{R})$, для яких $D^r f \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$.

Нехай $\Psi(t)$, де $t \in [0,1]$, є монотонно зростаючою та неперервною функцією, такою, що $\Psi(0) = 0$. Скрізь далі будемо називати її мажорантою. Символом φ позначимо означену на відрізку $[0,1]$ додатну обмежену та неперервну майже скрізь функцію, яку будемо називати ваговою. Згідно з теоремою Лебега [10] (гл. V, § 4) функція φ є інтегровною за Ріманом. Символом $W_2^r(\Omega_{m,\gamma},\varphi,\Psi;\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{Z}_+$, позначимо клас функцій $f \in L_{2,\gamma}^{2r}(D,\mathbb{R})$, для яких нерівність $\int_0^t \Omega_{m,\gamma}(D^r f,u)\varphi(u)du \le \Psi(t)$ виконується для будь-яких значень $t \in (0,1)$. У випадку $r = 0$ покладаємо $W_2(\Omega_{m,\gamma},\varphi,\Psi;\mathbb{R}) := W_2^0(\Omega_{m,\gamma},\varphi,\Psi;\mathbb{R})$. Зазначимо, що дещо подібні варіанти усереднення інших характеристик гладкості використовувались раніше, наприклад, при розв'язанні низки екстремальних задач теорії апроксимації у просторі 2π-періодичних функцій L_2 (див., наприклад, [11 – 17]).

1.2. Через $\mathcal{P}_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, позначимо підпростір алгебраїчних поліномів степеня, що не перевищує $n-1$, а під символом $E_{n-1}(f)_{2,\gamma}$ будемо розуміти найкраще наближення функції $f \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$ поліномами з підпростору $\mathcal{P}_{n-1}$ в $L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$, тобто

$$E_{n-1}(f)_{2,\gamma} := \inf\{\|f - p_{n-1}\|_{2,\gamma} : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\}. \tag{2}$$

Також для множини $\mathfrak{M} \subset L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$ покладаємо

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_{2,\gamma} := \sup\{E_{n-1}(f)_{2,\gamma} : f \in \mathfrak{M}\}. \tag{3}$$

Через

$$H_n(x) := \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n\sqrt{\pi}n!}}\, e^{x^2}\frac{d^n(e^{-x^2})}{dx^n}, \quad n\in\mathbb{Z}_+,$$

позначимо ортонормовану систему поліномів Ерміта у просторі $L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$. Для функції $f \in$ $\in L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$ запишемо співвідношення

$$f(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} c_j(f)H_j(x), \tag{4}$$

де рівність розуміється у сенсі збіжності у метриці простору $L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$, а (4) є розвиненням f у ряд Фур'є – Ерміта. Тут числа

$$c_j(f) := \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)H_j(x)\gamma(x)dx,\ j\in\mathbb{Z}_+,$$

є коефіцієнтами Фур'є – Ерміта функції f. Символом $S_{n-1}(f)$ позначимо частинну суму $(n-1)$-го порядку ряду Фур'є – Ерміта (4), тобто

$$S_{n-1}(f,x) := \sum_{j=0}^{n-1} c_j(f)H_j(x).$$

Для апроксимаційної характеристики (2) маємо

$$E_{n-1}(f)_{2,\gamma} = \|f - S_{n-1}(f)\|_{2,\gamma} = \left\{\sum_{j\geq n(j\in\mathbb{N})} c_j^2(f)\right\}^{1/2}, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{5}$$

Наведемо означення поперечників, які будемо використовувати далі. Нехай $\mathbb{B}$ — одинична куля у просторі $L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$, $\mathcal{L}_n \subset L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$ — n-вимірний підпростір; $\mathcal{L}^n \subset L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$ — підпростір ковимірності n, $\Lambda\colon L_{2,\gamma}(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}_n$ — неперервний лінійний оператор, $\Lambda^{\perp}\colon L_{2,\gamma}(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}_n$ — неперервний оператор лінійного проєктування, $\mathfrak{M}$ — опукла центрально-симетрична підмножина з $L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$. Тоді величини

$$b_n(\mathfrak{M}, L_{2,\gamma}(\mathbb{R})) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon>0\colon\ \varepsilon\mathbb{B}\cap\mathcal{L}_{n+1}\subset\mathfrak{M}\right\}:\ \mathcal{L}_{n+1}\subset L_{2,\gamma}(\mathbb{R})\right\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, L_{2,\gamma}(\mathbb{R})) = \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f-g\|_{2,\gamma}\colon g\subset\mathcal{L}_n\right\}:\ f\in\mathfrak{M}\right\}:\ \mathcal{L}_n\subset L_{2,\gamma}(\mathbb{R})\right\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, L_{2,\gamma}(\mathbb{R})) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f-\Lambda(f)\|_{2,\gamma}\colon f\in\mathfrak{M}\right\}:\ \Lambda L_{2,\gamma}(\mathbb{R})\subset\mathcal{L}_n\right\}:\ \mathcal{L}_n\subset L_{2,\gamma}(\mathbb{R})\right\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, L_{2,\gamma}(\mathbb{R})) = \inf\left\{\sup\left\{\|f\|_{2,\gamma}\colon f\in\mathfrak{M}\cap\mathcal{L}^n\right\}:\ \mathcal{L}^n\subset L_{2,\gamma}(\mathbb{R})\right\},$$

$$\Pi_n(\mathfrak{M}, L_{2,\gamma}(\mathbb{R})) =$$

$$= \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f-\Lambda^{\perp}(f)\|_{2,\gamma}\colon f\in\mathfrak{M}\right\}:\ \Lambda^{\perp}L_{2,\gamma}(\mathbb{R})\subset\mathcal{L}_n\right\}:\ \mathcal{L}_n\subset L_{2,\gamma}(\mathbb{R})\right\}$$

називають відповідно бернштейнівським, колмогоровським, лінійним, гельфандівським та проєкційним поперечниками множини $\mathfrak{M}$ у просторі $L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$. Оскільки $L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$ із введеним в ньому скалярним добутком є гільбертовим простором, то між зазначеними екстремальними характеристиками мають місце такі співвідношення:

$$b_n(\mathfrak{M},L_{2,\gamma}(\mathbb{R}))\le d^n(\mathfrak{M},L_{2,\gamma}(\mathbb{R}))\le\delta_n(\mathfrak{M},L_{2,\gamma}(\mathbb{R}))=\Pi_n(\mathfrak{M},L_{2,\gamma}(\mathbb{R}))=$$
$$=d_n(\mathfrak{M},L_{2,\gamma}(\mathbb{R}))\le E_{n-1}(\mathfrak{M})_{2,\gamma}. \tag{6}$$

2. Оцінки значень поперечників класів функцій $W_2^r(\Omega_{m,\gamma},\varphi,\Psi;\mathbb{R})$, де $r\in\mathbb{Z}_+$, $m\in\in\mathbb{N}$, у просторі $L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$. Позначимо

$$w_m(t):=\frac{t^{2m}}{(1+(1-t^2)^{1/2})^m},\quad m\in\mathbb{N},\quad t\in[0,1]. \tag{7}$$

Теорема 1. *Нехай $n,m\in\mathbb{N}$, функція Ψ є мажорантою, а φ — ваговою функцією. Тоді справджується співідношення*

$$\frac{1}{2^rn^{r+m}}\inf_{0<t<1}\frac{\Psi(t)}{\displaystyle\int_0^t w_m(u)\varphi(u)du}\le q_n(W_2^r(\Omega_{m,\gamma},\varphi,\Psi;\mathbb{R}),L_{2,\gamma}(\mathbb{R}))\le$$
$$\le E_{n-1}(W_2^r(\Omega_{m,\gamma},\varphi,\Psi;\mathbb{R}))_{2,\gamma}\le\frac{1}{2^rn^{r+m}}\overline{\lim_{t\to0+0}}\frac{\Psi(t)}{\displaystyle\int_0^t w_m(u)\varphi(u)du}, \tag{8}$$

де $q_n(W_2^r(\Omega_{m,\gamma},\varphi,\Psi;\mathbb{R}),L_{2,\gamma}(\mathbb{R}))$ — будь-який із розглянутих поперечників.

Доведення. В [1] зазначено, що у сенсі збіжності у просторі $L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$ для його довільного елемента f має місце таке зображення узагальненого оператора зсуву:

$$\mathcal{T}_hf(x)=\sum_{j\in\mathbb{Z}_+}(1-h^2)^{j/2}c_j(f)H_j(x),\quad 0<h<1.$$

Тоді, у тому ж сенсі, правильним є зображення

$$\Delta_h^1(f,x)=\mathcal{T}_hf(x)-f(x)=\sum_{j\in\mathbb{N}}\Big((1-h^2)^{j/2}-1\Big)c_j(f)H_j(x). \tag{9}$$

Використовуючи (9) та метод математичної індукції, для $m=2,3,\ldots$ маємо

$$\Delta_h^m(f,x)=\Delta_h^1(\Delta_h^{m-1}(f),x)=\sum_{j\in\mathbb{N}}\Big((1-h^2)^{j/2}-1\Big)^mc_j(f)H_j(x).$$

Звідси отримуємо

$$\|\Delta_h^m(f)\|_{2,\gamma}^2=\sum_{j\in\mathbb{N}}\Big(1-(1-h^2)^{j/2}\Big)^{2m}c_j^2(f)$$

і, використовуючи (1), записуємо

$$\Omega_{m,\gamma}(f,t) = \left\{ \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(1-(1-t^2)^{j/2}\right)^{2m} c_j^2(f) \right\}^{1/2}. \tag{10}$$

Для довільної функції $f \in L_{2,\gamma}^{2r}(D,\mathbb{R}),\ r\in\mathbb{N}$, у відповідності з [5], її коефіцієнти Фур'є – Ерміта задовольняють сввівдношення

$$c_j(f) = (-1)^{r+1}\frac{1}{(2j)^r}\, c_j(D^r f), \quad j\in\mathbb{N}. \tag{11}$$

Тоді з (5) і (11) для $n\in\mathbb{N}$ маємо

$$E_{n-1}(f)_{2,\gamma} \le \frac{1}{(2n)^r}\left\{\sum_{j\ge n (j\in\mathbb{N})} (2j)^{2r} c_j^2(f)\right\}^{1/2} = \frac{1}{(2n)^r} E_{n-1}(D^r f)_{2,\gamma}. \tag{12}$$

З формули (5), де f замінено на $D^r f \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R})$, випливає, що для кожного числа $k\in\mathbb{Z}_+$ існує єдине невід'ємне число $\mu_{k,f}$, яке залежить від k і f, таке, що

$$E_{n-1}^2(D^r f)_{2,\gamma} = \sum_{j=n}^{n+k} c_j^2(D^r f) + \mu_{k,f}. \tag{13}$$

Нехай f не є алгебраїчним поліномом, тобто при жодному $n\in\mathbb{Z}_+$ функція $D^r f$ не належить підпростору $\mathcal{P}_n$. Тоді з формули (5) для $E_{n-1}(D^r f)_{2,\gamma}$ та з рівності (13) маємо

$$\lim_{k\to\infty} \mu_{k,f} = 0. \tag{14}$$

При цьому $\mu_{k,f} \ge \mu_{k+1,f} > 0\ \forall k\in\mathbb{Z}_+$. Якщо ж при деякому натуральному числі $l\ge n,\ n\in\mathbb{N}$, f належить $\mathcal{P}_l$ і коефіцієнт Фур'є – Ерміта $a_l(D^r f)\ne 0$, то числова послідовність $\{\mu_{k,f}\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ буде мати нульові елементи $\mu_{k,f}=0$ для всіх $k\ge l-n$.

Нехай $u\in(0,1)$ є довільним числом. Використовуючи (10), записуємо оцінку зверху для суми у правій частині формули (13):

$$\sum_{j=n}^{n+k} c_j^2(D^r f) \le \frac{1}{(1-(1-u^2)^{n/2})^{2m}} \sum_{j=n}^{n+k} (1-(1-u^2)^{j/2})^{2m} c_j^2(D^r f) \le$$

$$\le \frac{1}{(1-(1-u^2)^{n/2})^{2m}}\ \Omega_{m,\gamma}^2(D^r f, u).$$

Звідси отримуємо

$$(1-(1-u^2)^{n/2})^m \left\{\sum_{j=n}^{n+k} c_j^2(D^r f)\right\}^{1/2} \le \Omega_{m,\gamma}(D^r f, u). \tag{15}$$

Розглянемо довільну числову послідовність $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$, елементи якої задовольняють такі умови: $\tau_k\in(0,1/(n+k)]$ і $\tau_k>\tau_{k+1}$ для довільного $k\in\mathbb{Z}_+$. Очевидно, що

$$\lim_{k\to\infty} \tau_k = 0. \tag{16}$$

Над обома частинами нерівності (15) виконаємо такі дії: помножимо на вагову функцію $\varphi(u)$ і зінтегруємо по змінній u в межах від 0 до τ_k. В результаті отримаємо співвідношення

$$\sum_{j=n}^{n+k} c_j^2(D^r f) \leq \left\{ \frac{\displaystyle\int_0^{\tau_k} \Omega_{m,\gamma}(D^r f, u)\varphi(u)du}{\displaystyle\int_0^{\tau_k} (1-(1-u^2)^{n/2})^m \varphi(u)du} \right\}^2. \tag{17}$$

Нехай f — довільна функція із класу $W_2^r(\Omega_{m,\gamma}, \varphi, \Psi; \mathbb{R})$. Тоді з (13) і (17) маємо

$$E_{n-1}(D^r f)_{2,\gamma} \leq \frac{\Psi(\tau_k)}{\displaystyle\int_0^{\tau_k} (1-(1-u^2)^{n/2})^m \varphi(u)du} + \sqrt{\mu_{k,f}}\,. \tag{18}$$

Для будь-якого $k \in \mathbb{Z}_+$ з (12), (13) і (18) одержуємо нерівність

$$E_{n-1}(f)_{2,\gamma} \leq \frac{1}{(2n)^r} \left\{ \frac{\Psi(\tau_k)}{\displaystyle\int_0^{\tau_k} (1-(1-u^2)^{n/2})^m \varphi(u)du} + \sqrt{\mu_{k,f}} \right\}. \tag{19}$$

Ліва частина нерівності (19) не залежить від k. Використовуючи означення та певні властивості верхньої межі числової послідовності, при $k \to \infty$ для довільної функції $f \in W_2^r(\Omega_{m,\gamma}, \varphi, \Psi; \mathbb{R})$ з (19) та (14), (16) отримуємо

$$E_{n-1}(f)_{2,\gamma} \leq \frac{1}{(2n)^r} \varlimsup_{k\to\infty} \frac{\Psi(\tau_k)}{\displaystyle\int_0^{\tau_k} (1-(1-u^2)^{n/2})^m \varphi(u)du} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(2n)^r} \varlimsup_{t\to 0+0} \frac{\Psi(t)}{\displaystyle\int_0^{t} (1-(1-u^2)^{n/2})^m \varphi(u)du}. \tag{20}$$

Запишемо в дещо іншому вигляді знаменник у правій частині співвідношення (20). Для цього скористаємося рівністю

$$1-\beta^n = (1-\beta)\lambda_n(\beta), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \beta \in (0,1),$$

де $\lambda_n(\beta) := \sum_{j=0}^{n-1} \beta^j$. Покладаючи $\beta := (1-u^2)^{1/2}$, де $u \in (0,1)$, звідси, з урахуванням (7), маємо

$$(1-(1-u^2)^{n/2})^m = \frac{u^{2m}\lambda_n^m((1-u^2)^{1/2})}{(1+(1-u^2)^{1/2})^m} = w_m(u)\lambda_n^m((1-u^2)^{1/2}). \tag{21}$$

Згідно з (20), (21) отримуємо нерівність

$$E_{n-1}(f)_{2,\gamma} \leq \frac{1}{(2n)^r} \varlimsup_{t\to 0+0} \frac{\Psi(t)}{\displaystyle\int_0^{t} \lambda_n^m((1-u^2)^{1/2}) w_m(u)\varphi(u)du}. \tag{22}$$

Оскільки підінтегральна функція у знаменнику правої частини формули (22) є інтегровною за Ріманом і виконуються умови теореми про середнє значення для означеного інтеграла, то з (22) маємо

$$E_{n-1}(f)_{2,\gamma} \leq \frac{1}{(2n)^r} \lim_{t\to 0+0} \frac{1}{\lambda_n^m((1-\xi_t^2)^{1/2})} \overline{\lim_{t\to 0+0}} \frac{\Psi(t)}{\int\limits_0^t w_m(u)\varphi(u)du},$$

де значення $\xi_t \in (0,t)$ залежить від t. Зважаючи на те, що $\lambda_n((1-\xi_t^2)^{1/2}) = \sum_{j=0}^{n-1}(1-\xi_t^2)^{j/2}$, і враховуючи, що f — довільна функція з класу $W_2^r(\Omega_{m,\gamma},\varphi,\Psi;\mathbb{R})$, з останньої нерівності та з (3) одержуємо оцінку зверху

$$E_{n-1}(W_2^r(\Omega_{m,\gamma},\varphi,\Psi;\mathbb{R}))_{2,\gamma} \leq \frac{1}{2^r n^{r+m}} \overline{\lim_{t\to 0+0}} \frac{\Psi(t)}{\int\limits_0^t w_m(u)\varphi(u)du}. \tag{23}$$

Отримаємо оцінку знизу досліджуваних апроксимаційних характеристик оптимізаційного змісту. Для цього у підпросторі алгебраїчних поліномів $\mathcal{P}_n$ розглянемо кулю

$$\sigma_{n+1}(\varepsilon_*) := \varepsilon_*\mathbb{B} \cap \mathcal{P}_n = \{p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\|_{2,\gamma} \leq \varepsilon_*\},$$

де

$$\varepsilon_* := \frac{1}{2^r n^{r+m}} \inf_{0<t<1} \frac{\Psi(t)}{\int\limits_0^t w_m(u)\varphi(u)du}, \tag{24}$$

і покажемо, що вона належить класу $W_2^r(\Omega_{m,\gamma},\varphi,\Psi;\mathbb{R})$.

Для будь-якого полінома $p_n \in \mathcal{P}_n$ та довільного значення $u \in (0,1)$ згідно з (10), (11) запишемо

$$\Omega_{m,\gamma}(D^r p_n, u) = \left\{\sum_{j=1}^n (1-(1-u^2)^{j/2})^{2m}(2j)^{2r}c_j^2(p_n)\right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq (1-(1-u^2)^{n/2})^m (2n)^r \|p_n\|_{2,\gamma}, \quad r \in \mathbb{Z}_+. \tag{25}$$

Над лівою і правою частинами співвідношення (25) виконаємо такі дії: помножимо на вагову функцію $\varphi(u)$ і зінтегруємо по змінній u в межах від 0 до τ, де $\tau \in (0,1)$. В результаті одержимо нерівність

$$\int\limits_0^\tau \Omega_{m,\gamma}(D^r p_n, u)\varphi(u)du \leq (2n)^r \|p_n\|_{2,\gamma} \int\limits_0^\tau (1-(1-u^2)^{n/2})^m \varphi(u)du. \tag{26}$$

Тоді для довільного полінома $p_n \in \sigma_{n+1}(\varepsilon_*)$ з урахуванням формул (21), (24) і (26) маємо

$$\int\limits_0^\tau \Omega_{m,\gamma}(D^r p_n, u)\varphi(u)du \leq 2^r n^{r+m}\|p_n\|_{2,\gamma} \int\limits_0^\tau w_m(u)\varphi(u)du \leq$$

$$\leq \int\limits_0^\tau w_m(u)\varphi(u)du \inf_{0<t<1} \frac{\Psi(t)}{\int_0^t w_m(u)\varphi(u)du}. \tag{27}$$

З огляду на означення точної нижньої межі, покладаючи у правій частині співвідношення (27) замість t значення τ, записуємо нерівність

$$\int\limits_0^\tau \Omega_{m,\gamma}(D^r p_n, u)\varphi(u)du \leq \Psi(\tau) \quad \forall \tau \in (0,1),$$

тобто $\sigma_{n+1}(\varepsilon_*) \subset W_2^r(\Omega_{m,\gamma}, \varphi, \Psi; \mathbb{R})$.

Використовуючи означення бернштейнівського поперечника та (24), одержуємо оцінку знизу

$$b_n(W_2^r(\Omega_{m,\gamma}, \varphi, \Psi; \mathbb{R}), L_{2,\gamma}(\mathbb{R})) \geq \sup\{\varepsilon > 0 \colon \varepsilon\mathbb{B} \cap \mathcal{P}_n \subset W_2^r(\Omega_{m,\gamma}, \varphi, \Psi; \mathbb{R})\} \geq$$
$$\geq \varepsilon_* = \frac{1}{2^r n^{r+m}} \inf_{0<t<1} \frac{\Psi(t)}{\int_0^t w_m(u)\varphi(u)du}. \tag{28}$$

Співвідношення (8) отримуємо зі співвідношень (23), (28) і (6).

Теорему 1 доведено.

***Наслідок* 1.** *Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ і мажоранта Ψ задовольняє умову*

$$\inf_{0<t<1} \frac{\Psi(t)}{\int_0^t w_m(u)\varphi(u)du} = \overline{\lim_{t\to 0+0}} \frac{\Psi(t)}{\int_0^t w_m(u)\varphi(u)du}, \tag{29}$$

де функція $w_m(u)$ визначається формулою (7). *Тоді справджуються рівності*

$$q_n(W_2^r(\Omega_{m,\gamma}, \varphi, \Psi; \mathbb{R}), L_{2,\gamma}(\mathbb{R})) = E_{n-1}(W_2^r(\Omega_{m,\gamma}, \varphi, \Psi; \mathbb{R}))_{2,\gamma} =$$
$$= \frac{1}{2^r n^{r+m}} \overline{\lim_{t\to 0+0}} \frac{\Psi(t)}{\int_0^t w_m(u)\varphi(u)du}, \tag{30}$$

где $q_n(W_2^r(\Omega_{m,\gamma}, \varphi, \Psi; \mathbb{R}), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}))$ — будь-який із розглянутих поперечників.

3. Конкретизація точних результатів щодо наближення класів $W_2^r(\Omega_{m,\gamma}, \varphi, \Psi; \mathbb{R})$, де $r \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$. Певний вибір вагових функцій φ та мажорант Ψ, які задіяні у формуванні класів $W_2^r(\Omega_{m,\gamma}, \varphi, \Psi; \mathbb{R})$, дозволяє завдяки наслідку 1 отримувати точні значення різних поперечників зазначених класів та величин їх найкращих поліноміальних наближень. Продемонструємо це на кількох конкретних прикладах.

Нехай ваговими функціями є, наприклад,

$$\varphi_1(x) := (1 + (1 - x^2)^{1/2})^m x^{sm-1}$$

і

$$\varphi_2(x) := (1 + (1 - x^2)^{1/2})^m \cos(x^{2m+1}),$$

де $m \in \mathbb{N},\ s \in (1,\infty)$. Тоді, враховуючи (7), записуємо

$$\int\limits_0^t w_m(u)\varphi_i(u)du = \begin{cases} t^{(2+s)m}/((2+s)m), & \text{якщо } i=1, \\ \\ \sin(t^{2m+1})/(2m+1), & \text{якщо } i=2. \end{cases} \tag{31}$$

Через $C_+([0,1])$ позначимо клас неперервних на відрізку $[0,1]$ функцій, які є неспадними і набувають додатних значень на вказаній точковій множині. Виходячи з (29), (31) і використовуючи певну інформацію щодо еквівалентних нескінченно малих функцій при $t \to 0$, розглянемо мажоранти

$$\Psi_1(\mu,t) := \left(a^{t^{2+s}} - 1\right)^m \mu(t), \tag{32}$$

$$\Psi_2(\mu,t) := t^{2m+1}\mu(t), \tag{33}$$

$$\Psi_3(\mu,t) := \left((1+t^{2+s})^k - 1\right)^m \mu(t), \tag{34}$$

де $\mu \in C_+([0,1])$ — довільна функція, $m \in \mathbb{N},\ s,a \in (1,\infty),\ k \in (0,\infty)$. Використовуючи мажоранти (32)–(34) і зазначені вагові функції, можна переконатись у виконанні умови (29) у таких випадках:

$$(\varphi_1, \Psi_1(\mu)):\ \inf_{0<t<1} \frac{\Psi_1(\mu,t)}{t^{(2+s)m}} = \overline{\lim_{t\to 0+0}} \frac{\Psi_1(\mu,t)}{t^{(2+s)m}} = \ln^m(a)\mu(0), \tag{35}$$

$$(\varphi_2, \Psi_2(\mu)):\ \inf_{0<t<1} \frac{\Psi_2(\mu,t)}{\sin(t^{2m+1})} = \overline{\lim_{t\to 0+0}} \frac{\Psi_2(\mu,t)}{\sin(t^{2m+1})} = \mu(0), \tag{36}$$

$$(\varphi_1, \Psi_3(\mu)):\ \inf_{0<t<1} \frac{\Psi_3(\mu,t)}{t^{(2+s)m}} = \overline{\lim_{t\to 0+0}} \frac{\Psi_3(\mu,t)}{t^{(2+s)m}} = k^m\mu(0). \tag{37}$$

Виходячи з (29)–(37), записуємо точні значення поперечників і найкращих поліноміальних наближень низки утворених зазначеним чином класів:

$$q_n(W_2^r(\Omega_{m,\gamma},\varphi_1,\Psi_1(\mu);\mathbb{R}),L_{2,\gamma}(\mathbb{R})) = E_{n-1}(W_2^r(\Omega_{m,\gamma},\varphi_1,\Psi_1(\mu);\mathbb{R}))_{2,\gamma} = \frac{(2+s)m\ln^m(a)\mu(0)}{2^r n^{r+m}},$$

$$q_n(W_2^r(\Omega_{m,\gamma},\varphi_2,\Psi_2(\mu);\mathbb{R}),L_{2,\gamma}(\mathbb{R})) = E_{n-1}(W_2^r(\Omega_{m,\gamma},\varphi_2,\Psi_2(\mu);\mathbb{R}))_{2,\gamma} = \frac{(2m+1)\mu(0)}{2^r n^{r+m}},$$

$$q_n(W_2^r(\Omega_{m,\gamma},\varphi_1,\Psi_3(\mu);\mathbb{R}),L_{2,\gamma}(\mathbb{R})) = E_{n-1}(W_2^r(\Omega_{m,\gamma},\varphi_1,\Psi_3(\mu);\mathbb{R}))_{2,\gamma} = \frac{(2+s)mk^m\mu(0)}{2^r n^{r+m}},$$

де $q_n(\mathfrak{M}, L_{2,\gamma}(\mathbb{R}))$ — будь-який із розглянутих поперечників, $r \in \mathbb{Z}_+,\ n,m \in \mathbb{N},\ s,a \in (1,\infty),$ $k \in (0,\infty),\ \mu \in C_+([0,1])$.

Література

1. С. З. Рафальсон, *О приближении функций в среднем суммами Фурье–Эрмита*, Изв. вузов. Математика, № 7, 78–84 (1968).
2. Г. Фройд, *Об аппроксимации с весом алгебраическими многочленами на действительной оси*, Докл. АН СССР, **191**, № 2, 293–294 (1970).
3. В. А. Абилов, *О порядке приближения непрерывных функций арифметическими средними частных сумм ряда Фурье–Эрмита*, Изв. вузов. Математика, № 3, 3–9 (1972).

4. H. N. Mhaskar, *Weighted polynomial approximation*, J. Approx. Theory, **46**, № 1, 100 – 110 (1986).
5. V. A. Abilov, F. A. Abilova, *Some problems of the approximation of functions by Fourier – Hermite sums in the space* $L_2(\mathbb{R},e^{-x^2})$, Russian Math., **50**, № 1, 1 – 10 (2006).
6. S. B. Vakarchuk, *Mean approximation of functions on the real axis by algebraic polynomials with Chebyhev – Hermite weight and widths of function classes*, Math. Notes, **95**, № 5-6, 599 – 614 (2014).
7. S. B. Vakarchuk, A. V. Shvachko, *On the best approximation in the mean by algebraic polynomials with weight and exact values of widths for the classes of functions*, Ukr. Math. J., **65**, № 12, 1774 – 1792 (2014).
8. К. Тухлиев, А. М. Туйчиев, *Среднеквадратическое приближение функций на всей оси с весом Чебышева – Эрмита алгебраическими полиномами*, Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, **26**, № 2, 270 – 277 (2020).
9. V. M. Fedorov, *Approximation by algebraic polynomials with Chebyshev – Hermitian weight*, Soviet Math., **28**, № 6, 70 – 79 (1984).
10. И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, Наука, Москва (1974).
11. L. V. Taikov, *Inequalities containing best approximations and the modulus of continuity of functions in* L_2, Math. Notes, **20**, № 3, 797 – 800 (1976).
12. L. V. Taikov, *Best approximations of differentiable functions in the metric of the space* L_2, Math. Notes, **22**, № 4, 789 – 794 (1977).
13. A. A. Ligun, *Some inequalities between best approximations and moduli of continuity in an* L_2 *space*, Math. Notes, **24**, № 6, 917 – 921 (1978).
14. S. B. Vakarchuk, *Jackson-type inequalities and widths of function classes in* L_2, Math. Notes, **80**, № 1, 11 – 18 (2006).
15. M. Sh. Shabozov, G. A. Yusupov, *Best polynomial approximations in* L_2 *of classes of* 2π*-periodic functions and exact values of their widths*, Math. Notes, **90**, № 5, 748 – 757 (2011).
16. S. B. Vakarchuk, *Jackson-type inequalities with generalized modulus of continuity and exact values of the* n*-widths of the classes of* (ψ,β)*-differentiable functions in* L_2*. I*, Ukr. Math. J., **68**, № 6, 823 – 848 (2016).
17. S. B. Vakarchuk, *Jackson-type inequalities with generalized modulus of continuity and exact values of the* n*-widths of the classes of* (ψ,β)*-differentiable functions in* L_2*. II*, Ukr. Math. J., **68**, № 8, 1165 – 1183 (2017).

Одержано 05.02.22