DOI: 10.37863/umzh.v74i10.7156

УДК 519.1

О. Л. Ребенко[1] (Ін-т математики НАН України, Київ)

НОВЕ НАЙПРОСТІШЕ ДОВЕДЕННЯ ФОРМУЛИ КЕЛІ ТА ЗВ'ЯЗОК ІЗ РІВНЯННЯМИ КІРКВУДА – ЗАЛЬЦБУРГА

A new very simple proof of the formula for the number of labeled root forest-graphs with a given number of vertices is proposed. As a partial case of this formula, we obtain Cayley's formula.

Наведено нове найпростіше доведення формули для кількості помічених корінних графів-лісів із заданою кількістю вершин. Частковим випадком цієї формули є формула Келі.

1. Вступ. Існує багато способів довести формулу Келі (див., наприклад, [1, 4]; щодо останніх публікацій див. [2]). Дуже близьке за стилем доведення міститься в роботі [6]. У цьому повідомленні ми продемонструємо інший спосіб виведення цієї формули. Точніше, буде встановлено кількість корінних помічених графів-лісів (тобто графів, зв'язними компонентами яких є графи-дерева) з фіксованим числом і положеннями коренів їхніх зв'язних компонент (графів-дерев). Частковим випадком цієї формули є формула Келі. Важливо зазначити її зв'язок з кластерними розкладами в статистичній механіці. Хоча формулу для лісів було отримано в статті [5] таким же способом, тут ми виведемо її лише в контексті теорії графів. Це свідчить про те, що ідеї статистичної механіки можуть надати нові інструменти для інших розділів математики.

2. Конфігураційний простір і графи-ліси. Нехай $\mathbb{R}^d$ — d-вимірний евклідів простір. Розглянемо набір координат $\gamma = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ точок, який є локально скінченною підмножиною в $\mathbb{R}^d$, а множина всіх таких підмножин утворює конфігураційний простір Γ. Ми будемо розглядати лише скінченні графи, тому через Γ_0 позначимо множину всіх скінченних конфігурацій. Простір скінченних конфігурацій в $\mathbb{R}^d$ можна записати як диз'юнктивне об'єднання множин з фіксованою кількістю точок:

$$\Gamma_0 := \coprod_{n=0}^{\infty} \Gamma^{(n)}, \qquad \Gamma^{(n)} := \big\{\gamma \in \Gamma \;\big|\; |\gamma| = n,\;\; n \in \mathbb{N}\big\}, \quad \Gamma^{(0)} := \varnothing.$$

На кожній конфігурації можна побудувати граф, з'єднавши певні точки (вершини) конфігурації лініями (ребрами). Окрему точку конфігурації будемо також вважати графом, що складається з однієї вершини. Якщо є граф f на конфігурації $\gamma \in \Gamma^{(n)}$, то його порядок визначається потужністю конфігурації $|f| = |\gamma| = n$. Через $E(f)$ позначимо множину ребер графа f.

Розглянемо m-зв'язний граф $(m \geq 1)$, кожна зв'язна складова якого є поміченим корінним графом-деревом. Корені відповідних зв'язних компонент цього графа утворюють конфігурацію $\eta = \{x_1, \ldots, x_m\} \in \Gamma^{(m)}$. Усі інші вершини утворюють деяку конфігурацію $\gamma = \{y_1, \ldots, y_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$. Будь-яка підмножина точок з γ, які належать одному дереву з коренем x_k, не може належати іншому дереву з коренем x_l, $l \neq k$. Випадок $n = 0$ означає, що m-зв'язний

[1] e-mail: rebenkoo@ukr.net.

граф f складається з m точок-вершин. У випадку $m = 1$ граф f є поміченим графом-деревом з $(n+1)$-ю вершиною і з n ребрами. Такі графи називаються *поміченими кореневими лісовими графами* (*rooted labeled graph-forest*). Множину всіх таких лісів із заданою конфігурацією коренів η і вершин γ позначимо $\mathfrak{F}_{\eta;\gamma}$. Топологічно, графи, які відрізняються довжинами своїх ребер і можуть бути зведені один до одного евклідовими перетвореннями координат їхніх вершин, вважаються однаковими.

Важливим елементом цього розгляду будуть аналітичні внески графів, які ми введемо таким чином. Кожній вершині припишемо деяку сталу h, а кожному ребру, яке з'єднує точки x і y, — деяку функцію $\nu(x-y)$. Якщо такі графи зустрічаються в конкретній задачі, то на ці функції необхідно накласти відповідні умови.

Аналітичним внеском довільного графа з множини $f \in \mathfrak{F}_{\eta,\gamma}$ буде вираз

$$G(f) = h^{|\eta|+|\gamma|} \prod_{(x,y)\in E(f)} \nu(x-y). \tag{2.1}$$

Основний результат базується на такій тотожності.

Пропозиція 2.1. *Для довільного $x \in \eta$ позначимо $\eta^{\hat{x}} := \eta \setminus \{x\}$. Тоді*

$$\sum_{f\in\mathfrak{F}_{\eta;\gamma}} \prod_{(x',y')\in E(f)} \nu(x'-y') = \sum_{\xi\subseteq\gamma} \prod_{(y\in\xi)} \nu(x-y) \sum_{f\in\mathfrak{F}_{\eta^{\hat{x}}\cup\xi;\gamma\setminus\xi}} \prod_{(x',y')\in E(f)} \nu(x'-y'). \tag{2.2}$$

Доведення. Ліва частина рівняння (2.2) є сумою внесків усіх граф-лісів множини $\mathfrak{F}_{\eta;\gamma}$. Права частина — це та сама сума, в якій записано її члени в такому порядку. Спочатку запишемо суму внесків усіх графів, у яких вершина x не пов'язана з жодною іншою вершиною. З правого боку це сума всіх внесків графів з $\mathfrak{F}_{\eta^{\hat{x}};\gamma}$, тобто $\xi = \varnothing$. Наступна група членів включає графи, у яких вершина x з'єднана однією лінією з вершинами $y \in \gamma$. Отже, всі ξ є одноточковими множинами з γ. Решта груп сум відповідають графам, у яких вершина x приєднана до точок підмножини ξ з γ за допомогою $|\xi|$ ребер.

3. Відтворююче ядро. Для заданих η, γ і факторів h, ν введемо ядро $Q_{h,\nu}(\eta \mid \gamma)$, яке однозначно визначається таким рекурентним співвідношенням для будь-якого $x \in \eta$:

$$Q_{h,\nu}(\eta \mid \gamma) = h \sum_{\xi\subseteq\gamma} K_\nu(x;\xi) Q_{h,\nu}(\eta^{\hat{x}} \cup \xi | \gamma \setminus \xi), \quad |\eta| \geq 1, \tag{3.1}$$

де

$$K_\nu(x;\xi) := \begin{cases} \prod_{y\in\xi} \nu(x-y), \\ 1, \quad \xi = \varnothing, \end{cases} \tag{3.2}$$

та початковими умовами

$$Q_{h,\nu}(\varnothing \mid \varnothing) = 1, \quad Q_{h,\nu}(\varnothing \mid \gamma) = 0, \quad \text{якщо} \quad \gamma \neq \varnothing,$$

і

$$Q_{h,\nu}(\eta \mid \gamma) = 0, \quad \text{якщо} \quad \eta \cap \gamma \neq \varnothing.$$

Лема 3.1. *Розв'язок рівняння* (3.1) *можна записати у вигляді*

$$Q_{h,\nu}(\eta \mid \gamma) = \sum_{f \in \mathfrak{F}_{\eta,\gamma}} G(f), \tag{3.3}$$

де $G(f)$ *визначено в* (2.1).

Доведення. Легко бачити, що (3.3) збігається з лівою частиною рівності (2.2), а рекурентне рівняння (3.1), (3.2) є в точності правою частиною (2.2).

Тепер ми можемо знайти кількість цих графів для заданих η, γ з $|\eta| = m$ і $|\gamma| = n$. Справедливою є така лема (див. також [5]).

Лема 3.2 [5]. *Число графів-лісів у сумі* (3.3), *яка є розв'язком рівняння* (3.1) *із заданими* $n = |\gamma|$ *і* $m = |\eta|$, *виражається формулою*

$$N(m \mid n) = m(n+m)^{n-1}. \tag{3.4}$$

Доведення. Якщо покласти $h = \nu = 1$ у виразі (3.3), то $Q_{1,1}(\eta \,|\, \gamma) = N(m \mid n)$ і задовольняє рівняння

$$N(m \mid n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N(m+k-1 \mid n-k). \tag{3.5}$$

За індукцією по $n+m$ припустимо, що формула (3.4) справедлива для $N(m+k-1 \mid n-k)$ при $k = 0, 1, \ldots, n$. Тоді, підставивши $N(m+k-1 \mid n-k) = (m+k-1)(m+n-1)^{n-k-1}$ у праву частину рівняння (3.5), отримаємо рівність

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (m+k-1)(m+n-1)^{n-k-1} = M_1 \; + \; M_2,$$

де

$$M_1 := m \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (m+n-1)^{n-k-1} =$$

$$= m(m+n-1)^{-1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (m+n-1)^{n-k} = m(m+n-1)^{-1}(m+n)^n$$

і

$$M_2 := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k-1)(m+n-1)^{n-k-1} =$$

$$= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} (m+n-1)^{n-k-1} - (m+n-1)^{-1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (m+n-1)^{n-k} =$$

$$= n(m+n-1)^{-1}(m+n)^{n-1} - (m+n-1)^{-1}(m+n)^n =$$

$$= -m(m+n-1)^{-1}(m+n)^{n-1}.$$

Отже, $M_1 + M_2 = m(m+n)^{n-1}$, що і завершує доведення леми.

4. Висновок: формула Келі. Отже, для $m = 1$ рівняння (3.4) є формулою Келі. Основним елементом цього простого доведення є рекурентне рівняння (3.1) для ядра $Q_{h,\nu}(\eta \mid \gamma)$. Це рівняння було наведено в роботі [3] як технічний елемент для зображення розв'язку рівнянь Кірквуда – Зальцбурга (докладніше див. [5]).

Література

1. M. Aigner, G. M. Ziegler, *Proofs from the book*, 4th ed., Springer-Verlag, Berlin (2010).
2. S. Guo, V. J. W. Guo, *A recursive algorithm for trees and forests*, Discrete Math., **340**, 695 – 703 (2017).
3. R. A. Minlos, S. K. Poghosyan, *Estimates of Ursell functions, group functions, and their derivatives*, Theor. Math. Phys., **31**, № 2, 408 – 418 (1977).
4. J. W. Moon, *Various proofs of Cayley's formula for counting trees*, A Seminar on Graph Theory (Ed. F. Harary), Holt, Rinehart, and Winston, New York (1967), p. 70 – 78.
5. O. L. Rebenko, *On the connection of some approaches to solving the Kirkwood – Salzburg equations*, Ukr. Math. J., **73**, № 3, 93 – 106 (2021).
6. Lajos Takacs, *On Cayley's formula for counting forests*, J. Combin. Theory, Ser. A, **53**, 321 – 323 (1990).

Одержано 09.02.22