К О Р О Т К І   П О В І Д О М Л Е Н Н Я

DOI: 10.37863/umzh.v74i7.7159

УДК 511.7+517.5

М. П. Мороз (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЗАДАЧА ГАУССА – КУЗЬМІНА ДЛЯ РІЗНИЦЕВОГО ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ РЯДАМИ ЕНГЕЛЯ

Let $x = \Delta^{\overline{E}}_{g_1(x)\ldots g_n(x)\ldots}$ be the difference Engel-series representation of a real number $x \in (0;1]$ ($\overline{E}$-representation), where $\Delta^{\overline{E}}_{g_1\ldots g_n\ldots} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2+g_1)\ldots(2+g_1+\ldots+g_n)}$, $\omega^n(x) = \Delta^{\overline{E}}_{g_{n+1}(x)g_{n+2}(x)\ldots}$ is an n-fold operator of left shift of digits in the $\overline{E}$-representation of the number x. For a sequence of sets $E_n(a) = \{x : x \in (0;1), \omega^n(x) < a\}$, where a is a fixed parameter with $(0;1]$, it is proved that $\lim_{n\to\infty} \lambda(E_n(a)) = 1$, where $\lambda(\cdot)$ is a Lebesgue measure. This problem is similar to the classical Gauss – Kuzmin problem for elementary continued fractions. However, their solutions are noticeably different.

Нехай $x = \Delta^{\overline{E}}_{g_1(x)\ldots g_n(x)\ldots}$ — різницеве зображення числа $x \in (0;1]$ рядом Енгеля ($\overline{E}$-зображення), де $\Delta^{\overline{E}}_{g_1\ldots g_n\ldots} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2+g_1)\ldots(2+g_1+\ldots+g_n)}$, $\omega^n(x) = \Delta^{\overline{E}}_{g_{n+1}(x)g_{n+2}(x)\ldots}$ — n-кратний оператор лівостороннього зсуву цифр $\overline{E}$-зображення числа x. Для послідовності множин $E_n(a) = \{x : x \in (0;1), \omega^n(x) < a\}$, де a — фіксований параметр з $(0;1]$, доведено, що $\lim_{n\to\infty} \lambda(E_n(a)) = 1$, де $\lambda(\cdot)$ — міра Лебега. Дана задача є аналогом класичної задачі Гаусса – Кузьміна для елементарних ланцюгових дробів, проте їхні розв'язки суттєво відрізняються.

1. Вступ. Нехай $x = [0; a_1, a_2, \ldots]$ — зображення дійсного числа $x \in (0;1)$ у вигляді елементарного ланцюгового дробу, $\tau^n(x) = [0; a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots]$, множина

$$W_n(a) = \{x : x \in (0;1), \tau^n(x) < a\}.$$

Класична задача Гаусса – Кузьміна полягає в знаходженні границі $\lim_{n\to\infty} \lambda(W_n(a))$, де λ — міра Лебега.

Дану задачу вперше сформулював Гаусс в одному з листів до Лапласа [5, с. 90]. В ньому ж Гаусс стверджував (без доведення), що

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(W_n(a)) = \frac{\lg(1+a)}{\lg(2)}.$$

У 1928 році Р. О. Кузьмін [3] навів повне доведення цього твердження. У 1929 році, незалежно від Р. О. Кузьміна, цю задачу розв'язав П. Леві [6].

Аналогічна задача для $\tilde{Q}_\infty$-зображення чисел була розв'язана М. В. Працьовитим у роботі „Фрактальний підхід у дослідженні сингулярних розподілів” (Київ, 1998).

У даній статті ми розв'язуємо аналогічну задачу для різницевого зображення дійсних чисел рядами Енгеля.

2. Зображення чисел рядами Енгеля та їх різницеве зображення.

Означення 1. *Рядом Енгеля називається ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(p_1+1)\ldots(p_n+1)} = \frac{1}{p_1+1} + \frac{1}{(p_1+1)(p_2+1)} + \ldots, \tag{1}$$

де $p_n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} \geq p_n\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Теорема 1 ([4], лема 1)**.** *Сума кожного ряду Енгеля* (1) *є дійсним числом з* $(0;1]$. *Для будь-якого числа* x *з* $(0;1]$ *існує єдина неспадна послідовність натуральних чисел* $(p_n(x))$ *така, що*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(p_1(x)+1)\ldots(p_n(x)+1)} \equiv \Delta^E_{p_1(x)\ldots p_n(x)\ldots}. \tag{2}$$

Скорочений (символічний) запис $\Delta^E_{p_1(x)\ldots p_n(x)\ldots}$ ряду (2) і його суми x називається їх E-зображенням, при цьому натуральне число $p_n(x)$ називається n-ю цифрою цього зображення.

Теорема 2 [1]**.** *Для кожного ірраціонального числа* x *з інтервалу* $(0;1)$ *має місце рівність* $\lim_{n\to\infty} p_n(x) = +\infty$.

Означення 2. Δ^E*-циліндром* $\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m}$ *рангу* m *з основою* $(c_1c_2\ldots c_m)$ *називається множина всіх чисел вигляду* $\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}\ldots}$.

Відомо [4, c. 110] (властивість 7), що різні Δ^E-циліндри або не перетинаються, або один із них є власною підмножиною іншого. При цьому $\Delta^E_{a_1a_2\ldots a_m} \subset \Delta^E_{b_1b_2\ldots b_n}$ тоді й лише тоді, коли $n < m$ і $a_i = b_i,\ i = 1,\ldots,n$. Кожен циліндр $\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m}$ є піввідрізком, довжина (міра Лебега) якого обчислюється за формулою

$$\lambda\big(\Delta^E_{c_1c_2\ldots c_m}\big) = \frac{1}{(c_1+1)\ldots(c_m+1)c_m}.$$

Ряд Енгеля (1) можна записати таким чином:

$$\frac{1}{2+g_1} + \frac{1}{(2+g_1)(2+g_1+g_2)} + \frac{1}{(2+g_1)(2+g_1+g_2)(2+g_1+g_2+g_3)} + \ldots, \tag{3}$$

де $g_1 = p_1 - 1,\ g_{n+1} = p_{n+1} - p_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Вираз (3) називається різницевим зображенням ряду Енгеля. Тут (g_n) може бути довільною послідовністю цілих невід'ємних чисел. Скорочений запис $\Delta^{\overline{E}}_{g_1\ldots g_n\ldots}$ ряду (3) і його суми називається їх різницевим $\overline{E}$-зображенням.

Теорема 3 ([2], лема 1)**.** *Нерівність* $x < y$ *має місце тоді й лише тоді, коли існує число* $m \in \mathbb{N}$ *таке, що* $g_m(x) > g_m(y)$ *і* $g_j(x) = g_j(y)$ *для будь-якого* $j \in \{1,\ldots,m-1\}$. *В свою чергу числа* x *та* y *є рівними тоді й лише тоді, коли* $g_i(x) = g_i(y)$ *для будь-якого* $i \in \mathbb{N}$.

3. Аналог задачі Гаусса – Кузьміна для різницевого зображення дійсних чисел рядами Енгеля. Нехай $x = \Delta^{\overline{E}}_{g_1(x)g_2(x)\ldots}$. Функція ω, означена рівністю

$$\omega(x) = \omega\left(\Delta^{\overline{E}}_{g_1(x)g_2(x)\ldots}\right) = \Delta^{\overline{E}}_{g_2(x)g_3(x)\ldots},$$

називається оператором лівостороннього зсуву цифр $\overline{E}$-зображення чисел.

З означення функції ω та властивостей $\overline{E}$-зображення випливає, що функція ω є:

сюр'єктивною;

зростаючою на кожному $\Delta^{\overline{E}}$-циліндрі;

неперервною в усіх внутрішніх точках кожного $\Delta^{\overline{E}}$-циліндра.

Оператор n-кратного лівостороннього зсуву ω^n означується рівністю $\omega^n(x) \equiv \omega\left(\omega^{n-1}(x)\right)$, де $\omega^1(x) = \omega(x)$.

Множину $E_n(a)$ означимо рівністю

$$E_n(a) = \{x : x \in (0;1],\ \ \omega^n(x) < a\}.$$

Задача Гаусса – Кузьміна для різницевого зображення дійсних чисел рядами Енгеля полягає у знаходженні границі $\lim_{n\to\infty} \lambda(E_n(a))$, де $\lambda(\cdot)$ — міра Лебега.

Нехай

$$M_n^k = \bigcup_{\substack{p_{n-1} \le k \\ p_n > k}} \Delta^E_{p_1\ldots p_n}$$

— множина всіх тих чисел, у яких перші $n-1$ цифра не перевищують k, а n-на цифра більша за k. Тоді для кожного $x \in (0;1)\backslash\mathbb{Q}$ і кожного $k \in \mathbb{N}$ існує єдине $n = n(x) \in \mathbb{N}$ таке, що $x \in M_n^k$ (наслідок з теореми 2).

Очевидно, що для кожного k має місце рівність $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda\big(M_n^k\big) = 1$. Тоді справджуються рівності, які випливають із збіжності цього ряду:

$$\lim_{n\to\infty} \lambda\big(M_n^k\big) = 0,$$

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{n=r+1}^{\infty} \lambda\big(M_n^k\big) = 0,$$

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{n=1}^{r} \lambda\big(M_n^k\big) = 1.$$

Лема 1. *Для кожного $t \in \mathbb{N}$ має місце рівність*

$$\sum_{i=t}^{\infty} \lambda\left(\Delta^E_{p_1\ldots p_n[p_n+i]}\right) = \frac{p_n}{p_n+t}\,\lambda\big(\Delta^E_{p_1\ldots p_n}\big).$$

Доведення. Використовуючи формулу для міри Лебега циліндра, отримуємо

$$\sum_{i=t}^{\infty} \lambda\left(\Delta^E_{p_1\ldots p_n[p_n+i]}\right) = \sum_{i=t}^{\infty} \frac{1}{(p_1+1)\ldots(p_n+1)(p_n+i+1)(p_n+i)} =$$

$$= \frac{1}{(p_1+1)\ldots(p_n+1)} \sum_{i=t}^{\infty} \frac{1}{(p_n+i+1)(p_n+i)} =$$

$$= \frac{1}{(p_1+1)\ldots(p_n+1)}\,\frac{1}{p_n+t} =$$

$$= \frac{1}{(p_1+1)\ldots(p_n+1)p_n}\,\frac{p_n}{p_n+t} = \frac{p_n}{p_n+t}\,\lambda\big(\Delta^E_{p_1\ldots p_n}\big).$$

Лему доведено.

Теорема 4. *Для довільних* $\varepsilon \in (0;1)$ *і* $t \in \mathbb{N}$ *існує* $H = H(\varepsilon, t) \in \mathbb{N}$ *таке, що для всіх натуральних* $r > H$

$$\lambda\big(\big\{x : g_{r+1}(x) \geq t\big\}\big) > 1 - \varepsilon.$$

Доведення. Нехай $\varepsilon \in (0;1)$ — довільна фіксована як завгодно близька до нуля стала, t — довільне фіксоване натуральне число.

Оскільки $\lim_{p_n \to \infty} \dfrac{p_n}{p_n + t} = 1$, причому послідовність $\dfrac{p_n}{p_n + t}$ зростаюча, то існує натуральне число $N = N(\varepsilon, t)$ таке, що для всіх $p_n > N$ виконується нерівність

$$\frac{p_n}{p_n + t} > \frac{N}{N + t} > \sqrt{1 - \varepsilon}.$$

Оскільки $\lim_{r \to \infty} \sum_{n=1}^{r} \lambda\big(M_n^k\big) = 1$, то існує натуральне число $H = H(\varepsilon, t, N)$ таке, що для всіх $r > H$ виконується нерівність $\sum_{n=1}^{r} \lambda(M_n^N) > \sqrt{1 - \varepsilon}$.

Розіб'ємо множину $\bigcup\limits_{n=1}^{r} M_n^N = \{x : p_r(x) > N\}$ на циліндри $(r+1)$-го рангу та оцінимо сумарну міру Лебега $\lambda_t = \lambda(\varepsilon, t, N, r)$ тих циліндрів, для яких $p_{r+1} \geq p_r + t$ (тобто $g_{r+1} \geq t$):

$$\lambda_t = \sum_{\substack{1 \leq p_1 \leq \ldots \leq p_r \\ p_r > N}} \left(\sum_{i=t}^{\infty} \lambda \left(\Delta^E_{p_1 \ldots p_r [p_r + i]} \right) \right) = \sum_{\substack{1 \leq p_1 \leq \ldots \leq p_r \\ p_r > N}} \left(\frac{p_r}{p_r + t} \lambda \left(\Delta^E_{p_1 \ldots p_r} \right) \right) >$$

$$> \sum_{\substack{1 \leq p_1 \leq \ldots \leq p_r \\ p_r > N}} \left(\frac{N}{N + t} \lambda \left(\Delta^E_{p_1 \ldots p_r} \right) \right) = \frac{N}{N + t} \sum_{\substack{1 \leq p_1 \leq \ldots \leq p_r \\ p_r > N}} \lambda \left(\Delta^E_{p_1 \ldots p_r} \right) =$$

$$= \frac{N}{N + t} \lambda \left(\bigcup_{n=1}^{r} M_n^N \right) = \frac{N}{N + t} \sum_{n=1}^{r} \lambda \left(M_n^N \right) > \sqrt{1 - \varepsilon} \sqrt{1 - \varepsilon} = 1 - \varepsilon.$$

Далі, очевидно, що $\lambda\big(\big\{x : g_{r+1}(x) \geq t\big\}\big) \geq \lambda_t > 1 - \varepsilon$.

Теорему 4 доведено.

Теорема 5 (основний результат). *Для кожного* $a \in (0;1]$ *має місце рівність*

$$\lim_{n \to \infty} \lambda(E_n(a)) = 1.$$

Доведення. Достатньою умовою для того, щоб $x_1 < x_2$, є нерівність $g_1(x_1) > g_1(x_2)$. Тому $(0;1] \supset E_n(a) \supset \big\{x : g_{n+1}(x) > g_1(a)\big\}$. Звідси

$$1 = \lambda(0;1] \geq \lambda(E_n(a)) \geq \lambda\big(\big\{x : g_{n+1}(x) > g_1(a)\big\}\big).$$

З теореми 4 при $t = g_1(a)$ отримуємо, що для довільних $\varepsilon \in (0;1)$ і $a \in (0;1]$ існує таке $H = H(\varepsilon, a) \in \mathbb{N}$, що

$$\lambda\big(\big\{x : g_{r+1}(x) \geq g_1(a)\big\}\big) > 1 - \varepsilon$$

для всіх $r > H$. Тоді для кожного $r > H$ виконується нерівність

$$1 \geq \lambda(E_r(a)) \geq \lambda\big(\big\{x : g_{r+1}(x) > g_1(a)\big\}\big) > 1 - \varepsilon.$$

З останньої нерівності випливає, що $\lim_{n \to \infty} \lambda(E_n(a)) = 1$.

Теорему 5 доведено.

Література

1. Б. І. Гетьман, *Зображення чисел s-адичними рядами Енгеля*, Наук. часопис Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки, № 9, 212 – 224 (2008).
2. Б. І. Гетьман, *Метричні властивості множини чисел, визначених умовами на їх розклади в ряд Енгеля*, Наук. часопис Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки, № 10, 88 – 99 (2009).
3. Р. О. Кузьмин, *Об одной задаче Гаусса*, Докл. АН СССР, 375 – 380 (1928).
4. М. В. Працьовитий, Б. І. Гетьман, *Ряди Енгеля та їх застосування*, Наук. часопис Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки, № 7, 105 – 116 (2006).
5. А. Я. Хинчин, *Цепные дроби*, Наука, Москва (1978).
6. P. Levy, *Sur les lois de probabilité dont dépendent les quotients complets et incomplets d'une fraction continue*, Bull. Soc. Math. France, **57**, 178 – 194 (1929).

Одержано 10.02.22