DOI: 10.37863/umzh.v74i7.7167

УДК 517.925.51; 681.5.03

О. Г. Мазко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ОЦІНКА ТА ДОСЯГНЕННЯ ЗВАЖЕНИХ КРИТЕРІЇВ ЯКОСТІ У ДЕСКРИПТОРНИХ СИСТЕМАХ КЕРУВАННЯ*

We consider a class of linear descriptor control systems with bounded perturbations and establish a criterion and sufficient conditions for the existence of static controllers guaranteeing that the closed-loop system is admissible and satisifies a desired estimate for the weighted level of damping of the external and initial disturbances. We propose new methods for the synthesis of generalized state-feedback H_∞-controllers that are reduced to solving linear matrix inequalities without additional constraints. In order to illustrate the accumulated results, we present an example of descriptor system for the stabilization of an electric circuit.

Розглянуто клас лінійних дескрипторних систем керування з обмеженими збуреннями. Встановлено критерій та достатні умови існування статичних регуляторів, при яких замкнена система є допустимою і гарантується бажана оцінка зваженого рівня гасіння зовнішніх і початкових збурень. Запропоновано нові методи синтезу узагальнених H_∞-регуляторів за станом, що зводяться до розв'язання лінійних матричних нерівностей без додаткових обмежень. Для ілюстрації отриманих результатів наведено приклад дескрипторної системи стабілізації електричного кола.

1. Вступ. У сучасній теорії керування велика увага приділяється диференціально-алгебраїчним (дескрипторним) системам, які моделюють рух багатьох фізичних об'єктів із фазовими обмеженнями у просторі станів (див., наприклад, [1 – 6]). Рівняння руху, а також входів і виходів таких об'єктів можуть містити невизначені елементи (параметри, зовнішні збурення тощо), що спричиняє необхідність розв'язання проблем робастної стабілізації та мінімізації впливу обмежених збурень на якість перехідних процесів (H_∞-оптимізація).

У класичній теорії H_∞-керування критерієм якості системи з нульовим початковим станом є рівень гасіння зовнішніх (екзогенних) збурень, який характеризує максимальне значення відношення L_2-норм векторів керованого виходу і збурень. Для лінійної системи даний критерій якості збігається з H_∞-нормою її матричної передавальної функції [7, 8]. На практиці доцільно застосовувати узагальнені критерії якості керованих систем, які характеризують зважений рівень гасіння зовнішніх збурень, а також початкових збурень, обумовлених ненульовим початковим вектором [9 – 11]. За допомогою вагових коефіцієнтів у таких критеріях якості можна встановити пріоритети між компонентами керованого виходу і невизначених збурень у системі керування.

В даній роботі викладено нові результати щодо оцінки та застосування зважених критеріїв якості в задачі узагальненого H_∞-керування для класу лінійних дескрипторних систем. В термінах лінійних матричних нерівностей (ЛМН) встановлено новий критерій виконання заданої верхньої оцінки зваженого критерію якості дескрипторної системи. Аналогічні твердження в літературі відомі як „bounded real lemma” [12, 13]. Для дескрипторної системи керування сформульовано необхідні та достатні умови існування статичного регулятора за спостережуваним виходом, при якому замкнена система є допустимою і гарантується задана оцінка зваженого критерію якості. Практична реалізація даних умов у загальному випадку вимагає додаткових

* Виконано за часткової фінансової підтримки за проєктом „Інноваційні методи у теорії диференціальних рівнянь, обчислювальній математиці та математичному моделюванні”.

досліджень і розробку спеціальних обчислювальних процедур. Проте задачу синтезу статичних регуляторів за станом, що забезпечують дескрипторній системі вказані властивості, зведено до розв'язання системи ЛМН без додаткових обмежень.

Будемо використовувати такі позначення: I_n — одинична матриця порядку n; $0_{n\times m}$ — нульова матриця розміру $n \times m$; $X = X^\top > 0$ (≥ 0) — додатно (невід'ємно) визначена симетрична матриця X; $\sigma(A)$ — спектр матриці A; A^{-1} $(A^\top)$ — обернена (транспонована) матриця; $\operatorname{Ker} A$ — ядро матриці A; W_A — матриця, стовпці якої утворюють базис ядра $\operatorname{Ker} A$; $\|w\|_P$ — зважена L_2-норма вектор-функції $w(t)$,

$$\operatorname{Co}\{A_1,\ldots,A_\nu\} = \left\{\sum_{i=1}^{\nu} a_i A_i : a_i \geq 0,\ \ i=\overline{1,\nu},\ \ \sum_{i=1}^{\nu} a_i = 1\right\}$$

— опуклий багатогранник (політоп) з вершинами $A_1,\ldots,A_\nu$ у просторі матриць.

2. Означення і допоміжні твердження. Розглянемо дескрипторну систему з обмеженими збуреннями

$$E\dot{x} = Ax + Bw, \quad z = Cx + Dw, \quad x(0) = x_0, \tag{2.1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^k$ і $w \in \mathbb{R}^s$ — вектори відповідно стану, виходу і зовнішніх (екзогенних) збурень, E, A, B, C і D — сталі матриці відповідних розмірів, причому $\operatorname{rank} E = \rho < n$. Компонентами невизначених збурень можуть бути як зовнішні збурення, що діють на систему, так і похибки вимірюваного виходу.

Означення 2.1. *Система* (2.1) *називається допустимою, якщо пара матриць* (A,E) *регулярна, стійка і неімпульсна, тобто відповідно* $\det F(\lambda) = \det(A-\lambda E) \not\equiv 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, $i=\overline{1,\alpha}$ *і* $\alpha = \rho$, *де* $\Sigma = \{\lambda_1,\ldots,\lambda_\alpha\}$ *— скінченний спектр в'язки матриць* $F(\lambda) = A - \lambda E$ *(див., наприклад,* [3, *с.* 57 – 113]).

Відомо [14], що система (2.1) є допустимою тоді й лише тоді, коли існує матриця X, що задовольняє ЛМН $A^\top X + X^\top A < 0$ і додаткову умову

$$E^\top X = X^\top E \geq 0. \tag{2.2}$$

При цьому співвідношення (2.2) за рангової умови $\operatorname{rank}\left(E^\top X\right) = \rho$ еквівалентне зображенню матриці X у вигляді [10]

$$X = SE + W_{E^\top} G, \quad E_l^\top S E_l > 0, \quad S = S^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad G \in \mathbb{R}^{(n-\rho)\times n},$$

де $W_{E^\top}$ — матриця, стовпці якої утворюють базис ядра матриці $E^\top$, а E_l — матриця повного рангу ρ за стовпцями у скелетному розкладі $E = E_l E_r^\top$.

Розглянемо зважений критерій якості системи (2.1) вигляду [11]

$$J = \sup_{(w,x_0)\in\mathcal{W}} \frac{\|z\|_Q}{\sqrt{\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0}}, \tag{2.3}$$

де

$$\|z\|_Q^2 = \int_0^\infty z^\top Q z\, dt, \quad \|w\|_P^2 = \int_0^\infty w^\top P w\, dt,$$

$\mathcal{W}$ — множина допустимих пар (w, x_0) системи, для яких виконується нерівність $0 < \|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0 < \infty$, а $P = P^\top > 0$, $Q = Q^\top > 0$ і $X_0 = E^\top H E$, $H = H^\top > 0$, — задані вагові матриці. Значення J характеризує зважений рівень гасіння зовнішніх збурень, а також початкових збурень, обумовлених ненульовим початковим вектором. Застосування вагових коефіцієнтів у (2.3) дає можливість встановити пріоритети впливу відповідних компонент векторів w, z і x_0 на формування значення критерію якості J.

У випадку $x_0 \in \operatorname{Ker} E$ значення виразу J в (2.3) позначимо через J_0. Оскільки $H > 0$, то $x_0 \in \operatorname{Ker} E$ тоді й лише тоді, коли $x_0^\top X_0 x_0 = 0$. Очевидно, що $J_0 \leq J$, оскільки $\mathcal{W}_0 \subseteq \mathcal{W}$, де $\mathcal{W}_0$ — множина допустимих пар (w, x_0) в означенні виразу J_0. У випадку одиничних матриць $P = I_s$ і $Q = I_k$ вираз J_0 характеризує типовий критерій якості, що використовується в задачах H_∞-оптимізації систем, і його значення збігається з H_∞-нормою матричної передавальної функції системи (2.1):

$$\|G_{zw}\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sqrt{\lambda_{\max}(G^\top(-i\omega)G(i\omega))}, \qquad G(\lambda) = C(\lambda E - A)^{-1}B + D.$$

У даному випадку всі компоненти векторів збурень і виходу системи рівноцінні при формуванні значення критерію якості J_0.

Вектор збурення $w(t)$ і початковий вектор x_0 є *найгіршими* в системі (2.1) щодо критерію якості J, якщо на їхніх значеннях в (2.3) досягається супремум, тобто

$$\|z\|_Q^2 = J^2 \left(\|w\|_P^2 + x_0^\top X_0 x_0 \right).$$

Метод знаходження таких векторів для дескрипторних систем запропоновано в [15].

Лема 2.1 [16]**.** *Якщо існує невироджена матриця X, що задовольняє систему співвідношень*

$$\begin{bmatrix} A^\top X + X^\top A + C^\top Q C & X^\top B + C^\top Q D \\ B^\top X + D^\top Q C & D^\top Q D - \gamma^2 P \end{bmatrix} < 0, \tag{2.4}$$

$$0 \leq E^\top X = X^\top E \leq \gamma^2 X_0, \quad \operatorname{rank}\left(E^\top X - \gamma^2 X_0\right) = \rho, \tag{2.5}$$

де $\gamma > 0$, то система (2.1) *допустима і виконується оцінка $J < \gamma$. Зворотне твердження виконується за умови*

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} E^\top & C^\top Q D \end{bmatrix} = \rho. \tag{2.6}$$

Якщо в лемі 2.1 не використовувати співвідношення з ваговою матрицею X_0, тобто замість (2.5) взяти (2.2), то матимемо достатні та необхідні умови, при яких система (2.1) допустима і виконується оцінка $J_0 < \gamma$.

Лема 2.2 [17]**.** *Для невироджених матриць X і Y, пов'язаних рівністю*

$$XY = \gamma^2 I_n, \tag{2.7}$$

еквівалентні такі твердження:

(i) *виконується система співвідношень* (2.5);

(ii) *існують матриці* $S = S^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *і* $G \in \mathbb{R}^{(n-\rho)\times n}$, *при яких*

$$X = SE + W_{E^\top} G, \quad 0 < E_l^\top S E_l < \gamma^2 E_l^\top H E_l; \tag{2.8}$$

(iii) *існують матриці* $T = T^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *і* $F \in \mathbb{R}^{(n-\rho)\times n}$, *при яких*

$$Y = TE^\top + W_E F, \quad E_r^\top T E_r > \left(E_l^\top H E_l\right)^{-1}. \tag{2.9}$$

Лема 2.3. *Система* (2.1) *допустима і виконується оцінка* $J < \gamma$ *тоді й лише тоді, коли система ЛМН* (2.8) *і*

$$\Xi_\gamma = \begin{bmatrix} A^\top X + X^\top A + C^\top QC & X^\top B + A^\top W_{E^\top}\Lambda + C^\top QD \\ B^\top X + \Lambda^\top W_{E^\top}^\top A + D^\top QC & B^\top W_{E^\top}\Lambda + \Lambda^\top W_{E^\top}^\top B + D^\top QD - \gamma^2 P \end{bmatrix} < 0 \tag{2.10}$$

сумісна щодо $S = S^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $G \in \mathbb{R}^{(n-\rho)\times n}$ *і* $\Lambda \in \mathbb{R}^{(n-\rho)\times s}$.

Доведення. Запишемо систему (2.1) у вигляді

$$\widetilde{E}\dot{\widetilde{x}} = \widetilde{A}\widetilde{x} + \widetilde{B}w, \quad z = \widetilde{C}\widetilde{x}, \quad \widetilde{x}(0) = \widetilde{x}_0, \tag{2.11}$$

де

$$\widetilde{E} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix}, \quad \widetilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ -I_s \end{bmatrix}, \quad \widetilde{C} = \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix}, \quad \widetilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}.$$

Для даної системи виконується рангова умова (2.1), тобто $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \widetilde{E}^\top & \widetilde{C}^\top Q\widetilde{D} \end{bmatrix} = \rho$, де $\widetilde{D} = 0$. За лемою 2.1 система (2.11) допустима і виконується оцінка $J < \gamma$ тоді й лише тоді, коли для деякої матриці $\widetilde{X}$ виконуються співвідношення

$$\begin{bmatrix} \widetilde{A}^\top \widetilde{X} + \widetilde{X}^\top \widetilde{A} + \widetilde{C}^\top Q\widetilde{C} & \widetilde{X}^\top \widetilde{B} \\ \widetilde{B}^\top \widetilde{X} & -\gamma^2 P \end{bmatrix} < 0, \tag{2.12}$$

$$0 \le \widetilde{E}^\top \widetilde{X} = \widetilde{X}^\top \widetilde{E} \le \gamma^2 \widetilde{X}_0, \quad \operatorname{rank}\left(\widetilde{E}^\top \widetilde{X} - \gamma^2 \widetilde{X}_0\right) = \rho, \tag{2.13}$$

$$\widetilde{X}_0 = \widetilde{E}^\top \widetilde{H}\widetilde{E} = \begin{bmatrix} X_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{X} = \begin{bmatrix} X & X_3 \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix}.$$

Співвідношення (2.5) і (2.13) еквівалентні, причому $E^\top X_3 = 0$, тобто $X_3 = W_{E^\top}\Lambda$ для деякої матриці Λ. Матрична нерівність (2.12) має вигляд

$$\widetilde{\Xi} = \begin{bmatrix} A^\top X + X^\top A + C^\top QC & A^\top X_3 + X_1^\top + C^\top QD & X^\top B - X_1^\top \\ X_1 + X_3^\top A + D^\top QC & X_2 + X_2^\top + D^\top QD & X_3^\top B - X_2^\top \\ B^\top X - X_1 & B^\top X_3 - X_2 & -\gamma^2 P \end{bmatrix} < 0.$$

Звідси, зокрема, випливає, що матриця X повинна бути невиродженою. Інакше для деякого ненульового вектора $x \in \operatorname{Ker} X$ квадратична форма $x^\top \widetilde{\Xi}_{11} x \ge 0$, де $\widetilde{\Xi}_{11}$ — перший діагональний блок матриці $\widetilde{\Xi}$, що суперечить умові $\widetilde{\Xi} < 0$.

Виконаємо таке конгруентне перетворення матриці $\widetilde{\widetilde{\Xi}}$:

$$\Theta^\top \widetilde{\widetilde{\Xi}}\,\Theta = \left[\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{Ξ_γ}} & X^\top B - X_1^\top \\ & & X_3^\top B - \gamma^2 P - X_2^\top \\ \hline B^\top X - X_1 & B^\top X_3 - \gamma^2 P - X_2 & -\gamma^2 P \end{array}\right] < 0,$$

де

$$\Theta = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_s & 0 \\ 0 & I_s & I_s \end{bmatrix}.$$

Очевидно, що для виконання останньої нерівності необхідна умова (2.10). При цьому $\widetilde{\widetilde{\Xi}} < 0$, якщо, наприклад, $X_1 = B^\top X$ і $X_2 = X_3^\top B - \gamma^2 P$.

Оскільки матриця X невироджена, то можна скористатись еквівалентністю тверджень (i) та (ii) в лемі 2.2. Отже, співвідношення (2.8) і (2.10) необхідні й достатні для того, щоб система (2.1) була допустимою і виконувалась оцінка $J < \gamma$.

Лему 2.3 доведено.

***Зауваження* 2.1.** Твердження леми 2.3, на відміну від леми 2.1, сформульовано виключно в термінах строгих ЛМН без додаткових обмежень. Тому співвідношення (2.8) і (2.10) доцільно використовувати при обчисленні значення J, розв'язуючи оптимізаційну задачу

$$J = \inf\left\{\gamma : \Xi_\gamma < 0,\ \ 0 < E_l^\top S E_l < \gamma^2 E_l^\top H E_l\right\},$$

до того ж

$$J_0 = \inf\left\{\gamma : \Xi_\gamma < 0, E_l^\top S E_l > 0\right\}.$$

В задачах зваженої H_∞-оптимізації дескрипторних систем з невизначеними коефіцієнтами замість (2.10) можна використовувати еквівалентну матричну нерівність

$$\begin{bmatrix} A^\top X + X^\top A & X^\top B + A^\top W_{E^\top}\Lambda & C^\top \\ B^\top X + \Lambda^\top W_{E^\top}^\top A & B^\top W_{E^\top}\Lambda + \Lambda^\top W_{E^\top}^\top B - \gamma^2 P & D^\top \\ C & D & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0, \tag{2.14}$$

яка є лінійною щодо невідомих матриць X і Λ, а також вихідних матриць A, B, C і D системи (2.1). Еквівалентність співвідношень (2.10) і (2.14) є наслідком леми Шура для блочних матричних нерівностей (див., наприклад, [7, с. 7]).

3. Основні результати. Розглянемо дескрипторну систему керування

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u, \quad x(0) = x_0, \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u, \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u, \end{aligned} \tag{3.1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^s$, $z \in \mathbb{R}^k$ і $y \in \mathbb{R}^l$ — вектори відповідно стану, керування, зовнішніх збурень, керованого і спостережуваного виходів. Всі матричні коефіцієнти в (3.1) сталі, до того ж пара (E, A) регулярна і $\operatorname{rank} E = \rho \le n$. Нас цікавлять стабілізуючі закони керування, які гарантують бажану оцінку $J < \gamma$ критерію якості (2.3) замкненої системи щодо керованого виходу z. Статичні й динамічні регулятори, які мінімізують критерій якості J, називатимемо J-*оптимальними*. J_0-оптимальне керування у випадку одиничних вагових матриць P і Q є H_∞-*оптимальним*.

При дослідженні класу систем (3.1) використовуються поняття типу керованості та (двоїсті до них) спостережуваності. На відміну від звичайних систем дескрипторні системи мають кілька типів керованості та спостережуваності (див., наприклад, [3, 4, 18]). Для успішного розв'язання задач J-оптимізації за виходом для системи (3.1) необхідно, щоб дана система була стабілізовною та I-керованою, а також детектовною та I-спостережуваною. Критеріями I-керованості та I-спостережуваності системи (3.1) є відповідні рангові умови

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ A & E & B_2 \end{bmatrix} = n + \rho, \qquad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} E^\top & 0 & 0 \\ A^\top & E^\top & C_2^\top \end{bmatrix} = n + \rho.$$

Нехай керування у системі (3.1) виконує статичний регулятор за спостережуваним виходом

$$u = Ky, \quad K \in \mathbb{R}^{m\times l}. \tag{3.2}$$

Тоді за умови $\det(I_m - KD_{22}) \neq 0$ замкнена система має вигляд

$$E\dot{x} = A_* x + B_* w, \quad z = C_* x + D_* w, \tag{3.3}$$

де

$$\begin{bmatrix} A_* & B_* \\ C_* & D_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_1 & D_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12} \end{bmatrix} K_* \begin{bmatrix} C_2 & D_{21} \end{bmatrix}, \quad K_* = (I_m - KD_{22})^{-1} K.$$

Запишемо матричну нерівність (2.14) для системи (3.3) у вигляді

$$\begin{bmatrix} A_*^\top X + X^\top A_* & X^\top B_* + A_*^\top \Lambda_0 & C_*^\top \\ B_*^\top X + \Lambda_0^\top A_* & B_*^\top \Lambda_0 + \Lambda_0^\top B_* - \gamma^2 P & D_*^\top \\ C_* & D_* & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0,$$

де $\Lambda_0 = W_{E^\top}\Lambda$. Враховуючи лінійну залежність матричних коефіцієнтів системи $A_* = A + B_2K_*C_2$, $B_* = B_1 + B_2K_*D_{21}$, $C_* = C_1 + D_{12}K_*C_2$ і $D_* = D_{11} + D_{12}K_*D_{21}$ від K_*, останню нерівність можна записати у вигляді ЛМН щодо K_*:

$$\widetilde{L}^\top K_* \widetilde{R} + \widetilde{R}^\top K_*^\top \widetilde{L} + \Omega < 0, \tag{3.4}$$

де

$$\widetilde{L} = \begin{bmatrix} B_2^\top & D_{12}^\top & 0 \end{bmatrix}\Delta, \qquad \Delta = \begin{bmatrix} X & \Lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & I_k \\ 0 & I_s & 0 \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{R} = \begin{bmatrix} C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} A^\top X + X^\top A & X^\top B_1 + A^\top \Lambda_0 & C_1^\top \\ B_1^\top X + \Lambda_0^\top A & B_1^\top \Lambda_0 + \Lambda_0^\top B_1 - \gamma^2 P & D_{11}^\top \\ C_1 & D_{11} & -Q^{-1} \end{bmatrix}.$$

Також в цьому можна переконатися безпосередньо за допомогою блочно-матричних обчислень виразу (3.4).

Необхідні та достатні умови сумісності нерівності (3.4) мають вигляд [12]

$$W_{\widetilde{L}}^{\top}\Omega W_{\widetilde{L}} < 0, \quad W_{\widetilde{R}}^{\top}\Omega W_{\widetilde{R}} < 0. \tag{3.5}$$

Оскільки

$$W_{\widetilde{L}} = \Delta^{-1}\begin{bmatrix} W_L & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix}, \quad \Delta^{-1} = \begin{bmatrix} X^{-1} & 0 & -X^{-1}\Lambda_0 \\ 0 & 0 & I_s \\ 0 & I_k & 0 \end{bmatrix}, \quad W_{\widetilde{R}} = \begin{bmatrix} W_R & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix},$$

то умови (3.5) набирають вигляду

$$\begin{bmatrix} W_L^{\top} & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix}\left[\begin{array}{cc|c} AY + Y^{\top}A^{\top} & Y^{\top}C_1^{\top} & B_1 - A\Lambda_1 \\ C_1Y & -\gamma^2 Q^{-1} & D_{11} - C_1\Lambda_1 \\ \hline B_1^{\top} - \Lambda_1^{\top}A^{\top} & D_{11}^{\top} - \Lambda_1^{\top}C_1^{\top} & -P \end{array}\right]\begin{bmatrix} W_L & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix} < 0, \tag{3.6}$$

$$\begin{bmatrix} W_R^{\top} & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix}\left[\begin{array}{cc|c} A^{\top}X + X^{\top}A & X^{\top}B_1 + A^{\top}\Lambda_0 & C_1^{\top} \\ B_1^{\top}X + \Lambda_0^{\top}A & B_1^{\top}\Lambda_0 + \Lambda_0^{\top}B_1 - \gamma^2 P & D_{11}^{\top} \\ \hline C_1 & D_{11} & -Q^{-1} \end{array}\right]\begin{bmatrix} W_R & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix} < 0, \tag{3.7}$$

де

$$L = \begin{bmatrix} B_2^{\top} & D_{12}^{\top} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} C_2 & D_{21} \end{bmatrix}, \quad \Lambda_1 = \gamma^{-2}Y\Lambda_0,$$

а невироджені матриці X і Y пов'язані рівністю (2.7).

Отже, на основі лем 2.2, 2.3 і критерію (3.5) сумісності ЛМН (3.4) маємо такий результат.

Теорема 3.1. *Для системи* (3.1) *існує статичний регулятор* (3.2), *при якому замкнена система* (3.3) *допустима і виконується оцінка* $J < \gamma$, *тоді й лише тоді, коли система матричних співвідношень* (2.7), (2.8), (3.6) *і* (3.7) *сумісна щодо* $S = S^{\top}$, G, Y *і* Λ.

Побудова статичного регулятора за спостережуваним виходом на основі теореми 3.1 в загальному випадку є складною обчислювальною задачею. При застосуванні статичного регулятора за станом умови даної теореми суттєво спрощуються і зводяться до розв'язання системи ЛМН без додаткових обмежень.

Теорема 3.2. *Нехай виконуються умови*

$$C_2 = I_n, \quad D_{21} = 0, \quad D_{22} = 0, \tag{3.8}$$

$$\exists \beta \in \mathbb{R}: 2\beta B_1^{\top}W_{E^{\top}}W_{E^{\top}}^{\top}B_1 + D_{11}^{\top}QD_{11} - \gamma^2 P < 0. \tag{3.9}$$

Тоді існує статичний регулятор за станом $u = Kx$, *при якому замкнена система* (3.3) *допустима і виконується оцінка* $J < \gamma$, *якщо система ЛМН* (2.9) *і* (3.6), *де*

$$\Lambda_1 = \frac{\beta}{\gamma^2}W_E F W_{E^{\top}}W_{E^{\top}}^{\top}B_1, \tag{3.10}$$

сумісна щодо $T = T^{\top}$ *і* F.

Доведення. За умов (3.8) до системи (3.1) застосовуємо статичний регулятор (3.2) при $y = x$. При цьому $A_* = A + B_2 K$, $B_* = B_1$, $C_* = C_1 + D_{12} K$, $D_* = D_{11}$, $K_* = K$ і $W_R = \begin{bmatrix} 0 & I_s \end{bmatrix}^\top$. На підставі леми Шура умова (3.7) теореми 3.1 набирає вигляду

$$B_1^\top W_{E^\top} \Lambda + \Lambda^\top W_{E^\top}^\top B_1 + D_{11}^\top Q D_{11} - \gamma^2 P < 0.$$

Остання нерівність має розв'язок Λ тоді й лише тоді, коли виконується умова (3.9) [7]. Використовуючи один із розв'язків $\Lambda = \beta W_{E^\top}^\top B_1$, структуру матриці Y в (2.9) і вираз (3.10), отримуємо ЛМН (3.6) щодо $T = T^\top$ і F. Крім того, враховуючи еквівалентність тверджень (ii) та (iii) в лемі 2.2, замість (2.8) можна використати співвідношення (2.9). Отже, необхідні та достатні умови в теоремі 3.1 зводяться до двох ЛМН (2.9) і (3.6) з виразом (3.10) щодо $T = T^\top$ і F.

Теорему 3.2 доведено.

***Зауваження* 3.1.** При виконанні умов теореми 3.1 матрицю шуканого регулятора (3.2) можна побудувати у вигляді $K = K_*(I_l + D_{22} K_*)^{-1}$, де K_* — розв'язок ЛМН (3.4). Побудова статичного регулятора за станом на основі теореми 3.2 зводиться до розв'язання трьох ЛМН без додаткових обмежень.

Теорема 3.3. *Нехай виконуються умови*

$$C_2 = I_n, \quad D_{11} = 0, \quad D_{21} = 0, \quad D_{22} = 0. \tag{3.11}$$

Якщо матриці $T = T^\top$, F і Z задовольняють систему ЛМН (2.9) *і*

$$\begin{bmatrix} \gamma^2 \left(AY + Y^\top A^\top + B_1 P^{-1} B_1^\top + B_2 Z + Z^\top B_2^\top \right) & Y^\top C_1^\top + Z^\top D_{12}^\top \\ C_1 Y + D_{12} Z & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0, \tag{3.12}$$

то система (3.1) *зі статичним регулятором за станом*

$$u = Kx, \quad K = ZY^{-1}, \tag{3.13}$$

є допустимою і виконується оцінка $J < \gamma$. Навпаки, якщо для деякого регулятора $u = Kx$ замкнена система (3.3) *допустима і виконується оцінка $J < \gamma$, то система ЛМН* (2.9) *і* (3.12) *сумісна.*

Доведення. За умов (3.11) матриці замкненої системи $A_* = A + B_2 K$, $B_* = B_1$, $C_* = C_1 + D_{12} K$ і $D_* = 0$. За лемою 2.1 дана система допустима і $J < \gamma$ тоді й лише тоді, коли сумісна система співвідношень (2.5) і

$$\Omega_* = \begin{bmatrix} A_*^\top X + X^\top A_* & X^\top B_* & C_*^\top \\ B_*^\top X & -\gamma^2 P & 0 \\ C_* & 0 & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0.$$

При цьому за лемою 2.2 співвідношення (2.5), (2.8) і (2.9) еквівалентні. Застосуємо таке конгруентне перетворення матриці Ω_*:

$$\Gamma^\top \Omega_* \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma^2 \left(A_* Y + Y^\top A_*^\top + B_* P^{-1} B_*^\top \right) & 0 & Y^\top C_*^\top \\ 0 & -\gamma^2 P & 0 \\ C_* Y & 0 & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0,$$

де

$$\Gamma = \begin{bmatrix} Y & 0 & 0 \\ P^{-1}B_*^\top & I_s & 0 \\ 0 & 0 & I_k \end{bmatrix}, \quad Y = \gamma^2 X^{-1}.$$

Очевидно, що матричні нерівності $\Omega_* < 0$ і

$$\begin{bmatrix} \gamma^2 \left(A_* Y + Y^\top A_*^\top + B_* P^{-1} B_*^\top \right) & Y^\top C_*^\top \\ C_* Y & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

еквівалентні. На підставі (2.9) і (3.13) остання нерівність збігається з (3.12). Навпаки, якщо для деяких матриць K і X виконуються співвідношення (2.5) і $\Omega_* < 0$, то існує таке зображення матриці $Y = TE^\top + W_E F$, при якому система ЛМН (2.9) і (3.12) сумісна.

Теорему 3.3 доведено.

Теореми 3.1 – 3.3 можна поширити на відповідні класи систем (3.1) з поліедральною невизначеністю матричних коефіцієнтів. Для цього замість (3.6), (3.7) і (3.12) слід використати відповідні системи матричних нерівностей, сформованих для всіх можливих наборів вершин заданих політопів. Наведемо, наприклад, наслідок теореми 3.3.

***Наслідок* 3.1.** *Нехай виконуються умови* (3.11) *і*

$$A \in \operatorname{Co}\{A_1, \ldots, A_{\nu_1}\}, \quad B_1 \in \operatorname{Co}\left\{B_1^{(1)}, \ldots, B_1^{(\nu_2)}\right\}, \quad B_2 \in \operatorname{Co}\left\{B_2^{(1)}, \ldots, B_2^{(\nu_3)}\right\},$$
$$C_1 \in \operatorname{Co}\left\{C_1^{(1)}, \ldots, C_1^{(\nu_4)}\right\}, \quad D_{12} \in \operatorname{Co}\left\{D_{12}^{(1)}, \ldots, D_{12}^{(\nu_5)}\right\}. \tag{3.14}$$

Якщо матриці $T = T^\top$, F і Z задовольняють систему ЛМН (2.9) *і*

$$\begin{bmatrix} \gamma^2 \left(A_i Y + Y^\top A_i^\top + B_1^{(j)} P^{-1} B_1^{(j)\top} + B_2^{(p)} Z + Z^\top B_2^{(p)\top} \right) & Y^\top C_1^{(q)\top} + Z^\top D_{12}^{(r)\top} \\ C_1^{(q)} Y + D_{12}^{(r)} Z & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0,$$
$$i = \overline{1, \nu_1}, \quad j = \overline{1, \nu_2}, \quad p = \overline{1, \nu_3}, \quad q = \overline{1, \nu_4}, \quad r = \overline{1, \nu_5},$$

то система (3.1) *зі статичним регулятором за станом* (3.13) *є допустимою і виконується оцінка $J < \gamma$ при будь-яких значеннях коефіцієнтів* (3.14).

Зазначимо, що матричні інтервали й афінні множини можна описати у вигляді політопів. Наприклад, матричний інтервал

$$\mathcal{A} = \left\{ A \in \mathbb{R}^{n \times m} : \underline{A} \leq A \leq \overline{A} \right\}, \quad \underline{A} = \left\| \underline{a}_{ij} \right\|_{i,j=1}^{n,m}, \quad \overline{A} = \left\| \overline{a}_{ij} \right\|_{i,j=1}^{n,m},$$

де $\leq$ — знак нерівності щодо конуса невід'ємних матриць, описує політоп із $\nu = 2^{nm}$ вершинами

$$A_k = \left\| a_{ij}^k \right\|_{i,j=1}^{n,m}, \quad a_{ij}^k \in \left\{ \underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij} \right\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, \nu}.$$

4. Приклад. Розглянемо систему керування електричним колом, що описується у вигляді (3.1) з матрицями [19]

$$E = \begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -R_1 & -1 & 1 \\ 0 & -1/R_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = I_3, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix}, \quad D_{21} = D_{22} = 0_{3\times 1},$$

де

$$x = \begin{bmatrix} i & v_2 & v_1 \end{bmatrix}^\top, \quad z = \begin{bmatrix} v_2 & v_1 + dw + u \end{bmatrix}^\top, \quad y = x,$$

$L = 3$ — індуктивність, $C = 2$ — ємність, $R_1 = 2$ і $R_2 = 1$ — опори, i — струм, v_1 і v_2 — напруги, u — керуючий сигнал джерела струму з обмеженим збуренням w, d — параметр. У даній системі пара матриць (E, A) імпульсна, а (E, A, B_2) і (E, A, C_2) — відповідно I-керована та I-спостережувана трійки матриць.

Виберемо вагові матриці критерію якості (2.3) $P = 1$, $Q = I_2$, $X_0 = E^\top E$ $(H = I_n)$ і наведемо результати розрахунків у двох випадках.

Випадок $d = 1$. Із застосуванням теореми 3.2 і комп'ютерної системи Matlab знайдено матриці

$$T = \begin{bmatrix} 2,65967 & -0,78874 & -11,44372 \\ -0,78874 & 0,50223 & -28,01395 \\ -11,44372 & -28,01395 & 0,00000 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 26,05397 & 57,67267 & -0,06316 \end{bmatrix},$$

що задовольняють ЛМН (2.9) і (3.6) при $\beta = -1$ і $\gamma = 0,5$. Знайдено також матрицю статичного регулятора за станом (див. зауваження 3.1)

$$K = \begin{bmatrix} -3,87730 & -0,38656 & -4,62514 \end{bmatrix},$$

при якому замкнена система (3.3) допустима, має скінченний спектр $\{-0,75909 \pm 0,33685\, i\}$ і виконується оцінка $J < \gamma$. При цьому значення критеріїв якості $J = 0,46428$ і $J_0 = 0,21620$ обчислено на основі зауваження 2.1.

Випадок $d = 0$. У цьому випадку виконуються умови (3.11). На основі теореми 3.3 наближено знайдено матрицю J-оптимального статичного регулятора за станом

$$K = \begin{bmatrix} -0,04618 & -0,08759 & -1,00000 \end{bmatrix},$$

при якому замкнена система допустима і має мінімально можливе значення критерію якості $J \approx \gamma = 0,47134$ і скінченний спектр $\{-0,75770 \pm 0,33891\, i\}$.

Для демонстрації наслідку 3.1 введено інтервальну невизначеність опорів

$$\underline{R}_1 = 1,5 \le R_1 \le 2,5 = \overline{R}_1, \quad \underline{R}_2 = 0,5 \le R_2 \le 1,5 = \overline{R}_2 \tag{4.1}$$

і при $\gamma = 0,6$ знайдено матриці

$$T = \begin{bmatrix} 1,30369 & -0,43438 & -0,67369 \\ -0,43438 & 0,40919 & 0,38024 \\ -0,67369 & 0,38024 & 0,00000 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} -2,09845 & 0,95984 & -0,85585 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 4,11648 & -2,07990 & 1,21632 \end{bmatrix},$$

що задовольняють систему п'яти ЛМН, сформовану згідно з (2.9) і (3.12) при таких значеннях пари $(R_1, R_2)\colon (\underline{R}_1, \underline{R}_2),\ (\underline{R}_1, \overline{R}_2),\ (\overline{R}_1, \underline{R}_2),\ (\overline{R}_1, \overline{R}_2)$. Замкнена система (3.3) з матрицею робастного регулятора (3.13)

$$K = \begin{bmatrix} -0,45769 & -0,03989 & -1,42118 \end{bmatrix}$$

є допустимою і виконується оцінка $J < \gamma$ при будь-яких значеннях опорів R_1 і R_2 з відповідних інтервалів (4.1).

Література

1. L. Dai, *Singular control systems*, Springer, New York (1989).
2. R. Riaza, *Differential-algebraic systems. Analytical aspects and circuit applications*, World Sci., Singapore (2008).
3. Guang-Ren Duan, *Analysis and design of descriptor linear systems*, Springer, New York etc. (2010).
4. Yu Feng, Mohamed Yagoubi, *Robust control of linear descriptor systems*, Springer Nature, Singapore (2017).
5. S. Campbell, A. Ilchmann, V. Mehrmann, T. Reis (Eds.), *Applications of differential-algebraic equations: examples and benchmarks*, Differential-Algebraic Equations Forum, Springer Nature, Switzerland AG (2019).
6. А. А. Белов, А. П. Курдюков, *Дескрипторные системы и задачи управления*, Физматлит, Москва (2015).
7. S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishman, *Linear matrix inequalities in system and control theory*, SIAM Stud. Appl. Math., **15** (1994).
8. Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков, *Робастная устойчивость и управление*, Наука, Москва (2002).
9. Д. В. Баландин, М. М. Коган, *Обобщенное H_∞-оптимальное управление как компромисс между H_∞-оптимальным и γ-оптимальным управлениями*, Автоматика и телемеханика, № 6, 20 – 38 (2010).
10. Z. Feng, J. Lam, S. Xu, S. Zhou, *H_∞ control with transients for singular systems*, Asian J. Control, **18**, № 3, 817 – 827 (2016).
11. А. Г. Мазко, *Робастная устойчивость и стабилизация динамических систем. Методы матричных и конусных неравенств*, Пр. Ін-ту математики НАН України, **102** (2016).
12. P. Gahinet, P. Apkarian, *A linear matrix inequality approach to H_∞ control*, Intern. J. Robust and Nonlinear Control, **4**, 421 – 448 (1994).
13. M. Chadli, P. Shi, Z. Feng, J. Lam, *New bounded real lemma formulation and H_∞ control for continuous-time descriptor systems*, Asian J. Control, **20**, № 1, 1 – 7 (2018).
14. I. Masubushi, Y. Kamitane, A. Ohara, N. Suda, *H_∞ Control for descriptor systems: a matrix inequalities approach*, Automatica, **33**, № 4, 669 – 673 (1997).
15. О. Г. Мазко, *Зважена оцінка і пониження рівня впливу обмежених збурень у дескрипторних системах керування*, Укр. мат. журн., **72**, № 11, 1510 – 1523 (2020).
16. О. Г. Мазко, *Оцінка зваженого рівня гасіння обмежених збурень у дескрипторних системах*, Укр. мат. журн., **70**, № 11, 1541 – 1552 (2018).
17. О. Г. Мазко, *Зважене гасіння зовнішніх і початкових збурень у дескрипторних системах керування*, Укр. мат. журн., **73**, № 10, 1377 – 1390 (2021).
18. D. Cobb, *Robust controllability, observability and duality in singular systems*, IEEE Trans. Automat. Control, **29**, 1076 – 1082 (1984).
19. K. Takaba, *Robust H^2 control of descriptor system with time-varying uncertainty*, Intern. J. Robust and Nonlinear Control, **71**, № 4, 559 – 579 (1998).

Одержано 17.02.22