

О. П. Бойко, О. М. Мартинюк, В. М. Пивоварчик^{1,2} (Південноукр. нац. пед. ун-т ім. К. Д. Ушинського, Одеса)

ВЕРХНЯ МЕЖА ДЛЯ ДІАМЕТРА ДЕРЕВА У КВАНТОВІЙ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

We study two Sturm–Liouville spectral problems on an equilateral tree with continuity and Kirchhoff conditions at internal vertices and Neumann conditions at pendant vertices (first problem) and with Dirichlet conditions at pendant vertices (second problem). The spectrum of each of these problems consists of infinitely many normal (isolated Fredholm) eigenvalues. It is shown that, knowing the asymptotics of the eigenvalues, it is possible to estimate the diameter of a tree from above for each of these problems.

Розглянуто дві спектральні задачі Штурма–Ліувілля на рівносторонньому дереві з умовами неперервності і Кірхгофа у внутрішніх вершинах та умовами Неймана у висячих вершинах і з умовами Діріхле у висячих вершинах відповідно. Спектр кожної з цих задач складається з нескінченної кількості нормальних (ізолюваних фредгольмових) власних значень. Показано, що знаючи асимптотики власних значень, можна оцінити зверху діаметр дерева для кожної з цих задач.

1. Вступ. У роботі досліджуються спектральні задачі Штурма–Ліувілля на рівносторонньому метричному дереві з умовами Неймана й умовами Діріхле на висячих вершинах та умовами неперервності та Кірхгофа у внутрішніх вершинах. Ця тема належить до так званої теорії квантових графів (див., наприклад, [1]). Ці задачі виникають при описі руху квантової частинки у тонкому хвильоводі, який має форму дерева.

Припускаємо, що потенціали рівнянь Штурма–Ліувілля на ребрах є дійсними L_2 -функціями. Кількість p вершин дерева скінченна. Спектр такої задачі складається з нескінченної послідовності нормальних (ізолюваних фредгольмових) власних значень, які прямують до нескінченності. Послідовність цих власних значень можна подати як об'єднання таких підпослідовностей, що перший (головний) член асимптотики залежить лише від довжини ребра та від кількості ребер. Відомо (див. [6–8]), що якщо потенціали на ребрах графа однакові і симетричні щодо середини ребра, то існує зв'язок між спектром задачі Штурма–Ліувілля на графі і спектром так званого дискретного лапласіана цього графа. Різні автори користуються різними означеннями дискретного лапласіана (див., наприклад, [5]). Ми використовуємо таке: дискретний лапласіан графа — це матриця $\tilde{A} = D^{-1/2}AD^{-1/2}$, де A — матриця суміжності графа, $D = \text{diag} \{d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_p)\}$ — матриця степенів вершин, $d(v_i)$ — степінь вершини v_i . Вищезгаданий зв'язок полягає в тому, що другі члени асимптотичного розвинення підпослідовностей безпосередньо однозначно пов'язані з власними значеннями дискретного лапласіана дерева. Умови однаковості потенціалів на ребрах і симетрії їх щодо середини ребра виконуються у так званому незбуреному випадку, тобто коли потенціали рівняння Штурма–Ліувілля на ребрах $q_j \equiv 0$ для всіх j . Отже, у цьому випадку такий зв'язок існує. Якщо потенціали на ребрах — довільні дійсні L_2 -функції, то згідно з результатами роботи [9] (теорема 5.4) перший і другий члени асимптотики власних значень не залежать від потенціалів, а залежать лише від

¹ Відповідальний за листування, e-mail: vpivovarchik@gmail.com.

² Підтримано Міністерством освіти і науки України за темою „Штучні матеріали як основа створення новітніх біосенсорів” (<https://mon.gov.ua/storage/app/uploads/public/61f944/3d1/61f9443d16f00443598040.pdf>).

форми дерева. Питання про можливість встановлення форми графа виходячи з асимптотики власних значень розглянуто у [10, 11]. Воно тісно пов'язане з питанням існування коспектральних (ізоспектральних) графів у класичній теорії графів (див., наприклад, [2]).

Оскільки існують коспектральні дерева і у квантовій теорії графів (див., наприклад, [14]), то з огляду на асимптотику власних значень не можна в деяких випадках однозначно встановити форму дерева. У даній роботі ми розглядаємо питання лише про знаходження верхньої межі для діаметра дерева.

У пункті 2 наведено опис двох задач Штурма–Ліувілля на рівносторонньому дереві з умовами неперервності і Кірхгофа у внутрішніх вершинах та умовами Неймана у висячих вершинах і умовами Діріхле у висячих вершинах відповідно.

У пункті 3 наведено асимптотичні розвинення для власних значень задач Неймана і Діріхле та показано зв'язок між коефіцієнтами других членів цих асимптотик з власними значеннями дискретного лапласіана, який відповідає розглянутому дереву.

У пункті 4 отримано верхні межі для діаметра дерева через кількість різних коефіцієнтів у других членів асимптотичних розвинень для власних значень задач Неймана та Діріхле.

У пункті 5 наведено приклади дерев, для яких отримані верхні межі збігаються з їхніми діаметрами, а також приклади, у яких не збігаються.

2. Спектральні задачі. Нехай T — метричне рівностороннє дерево з $g = p - 1$ ребром однакової довжини l . Позначимо через v_i вершини, через $d(v_i)$ степені вершин, через e_j ребра. Нехай $P = v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_Lv_{L+1}$ — найдовший простий ланцюг у T (або один із найдовших, якщо є кілька з найбільшою довжиною). Довжину L цього ланцюга називають комбінаторним діаметром дерева. Виберемо один із кінців P (вершину v_1) як корінь дерева. Спрямуємо всі ребра від кореня. Таким чином, степінь входу кожної вершини, окрім кореня, $d^+(v_i) = 1$, а степінь виходу $d^-(v_i) = d(v_i) - 1$. Степінь входу кореня дорівнює 0, а степінь виходу кореня — 1. Позначимо через $W^-(v_i)$ множину індексів $j_s, s = 1, 2, \dots, d^-(v_i)$, ребер, що виходять з v_i , а через j_i індекс ребра, що входить у v_i .

Локальні координати на ребрі e_j ототожнюємо з точками інтервалу $[0, l]$ таким чином, що координата зростає зі зростанням відстані від кореня. Це означає, що висячим вершинам (крім кореня) відповідає локальна координата l . Кореню відповідає локальна координата 0. Кожна внутрішня вершина має локальну координату l на вхідному ребрі та локальну координату 0 на кожному вихідному ребрі. Функція y_j на ребрі e_j задовольняє рівняння Штурма–Ліувілля

$$-y_j'' + q_j(x)y_j = \lambda y_j, \quad j = 1, 2, \dots, g, \tag{1}$$

де q_j — дійсна функція, що належить до $L_2(0, l)$. У кожній внутрішній вершині v_i з вихідними ребрами $e_j, j \in W^-(v_i)$, та вхідним ребром e_k накладаємо умови неперервності

$$y_j(0) = y_k(l), \quad j \in W^-(v_i), \tag{2}$$

й умову Кірхгофа

$$y_k'(l) = \sum_{j \in W^-(v_i)} y_j'(0). \tag{3}$$

Ми розглянемо дві спектральні задачі: задачу Неймана і задачу Діріхле.

Для задачі Неймана на кожній висячій вершині (крім кореня), інцидентній ребру e_j , накладаємо крайову умову Неймана

$$y'_j(l) = 0, \quad (4)$$

а у корені умова Неймана має вигляд

$$y'_1(0) = 0. \quad (5)$$

Для задачі Діріхле на кожній висячій вершині (крім кореня), інцидентній ребру e_j , накладаємо крайову умову Діріхле

$$y_j(l) = 0, \quad (6)$$

а у корені умова Діріхле має вигляд

$$y_1(0) = 0. \quad (7)$$

Позначимо через $s_j(\sqrt{\lambda}, x)$ розв'язок рівняння Штурма–Ліувілля (1) на ребрі e_j , який задовольняє умову $s_j(\sqrt{\lambda}, 0) = s'_j(\sqrt{\lambda}, 0) - 1 = 0$, а через $c_j(\sqrt{\lambda}, x)$ розв'язок, який задовольняє умову $c_j(\sqrt{\lambda}, 0) - 1 = c'_j(\sqrt{\lambda}, 0) = 0$. Тоді *характеристичну функцію*, тобто цілу функцію, множина коренів якої збігається зі спектром задачі (1)–(5) (цю функцію визначено з точністю до сталого множника), можна виразити через $s_j(\sqrt{\lambda}, l)$, $s'_j(\sqrt{\lambda}, l)$, $c_j(\sqrt{\lambda}, l)$ і $c'_j(\sqrt{\lambda}, l)$. Для цього розглянемо систему вектор-функцій $\psi_j(\lambda, x) = \text{col}\{0, 0, \dots, s_j(\sqrt{\lambda}, x), \dots, 0\}$ та $\psi_{j+g}(\lambda, x) = \text{col}\{0, 0, \dots, c_j(\sqrt{\lambda}, x), \dots, 0\}$ для $j = 1, 2, \dots, g$. Так, як і у [13] (теорема 3.3), позначимо через L_j , $j = 1, 2, \dots, 2g$, лінійні функціонали, що утворені відповідно до рівнянь (1)–(5). Тоді $\Phi_N(\lambda) = \|L_j(\psi_k(\lambda, x))\|_{j,k}^{2g}$ – *характеристична матриця*, що відповідає системі лінійних рівнянь, які описують умови неперервності і Кірхгофа у внутрішніх вершинах. Її визначник

$$\phi_N(\lambda) := \det(\Phi_N(\lambda))$$

є характеристичною функцією задачі (1)–(5).

Аналогічно визначається ϕ_D – характеристична функція задачі Діріхле (1)–(3), (6), (7).

3. Допоміжні результати. Для простого графа матриця $A = (A_{i,j})_{i,j=1}^p$, де $A_{i,i} = 0$ і для всіх $i = 1, 2, \dots, p$ і для всіх $j \neq i$

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } v_i \text{ і } v_j \text{ суміжні,} \\ 0, & \text{якщо не суміжні,} \end{cases}$$

називається *матрицею суміжності*. Позначимо через

$$D = \text{diag}\{d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_p)\}$$

матрицю степенів вершин. Тоді назвемо

$$\tilde{A} = D^{-1/2}AD^{-1/2} \quad (8)$$

дискретним лапласіаном, або зваженою матрицею суміжності.

Корені визначника лапласіана становлять спектр задачі, яка виникає в класичній спектральній теорії графів. Така задача тісно пов'язана зі скінченновимірними задачами, які описують коливання стільтьєсівських струн (див., наприклад, [4]). Зв'язок між задачею (1)–(5) та дискретним лапласіаном встановлює така теорема.

Теорема 1 (див. теорему 5.2 у [10]). Нехай T — дерево з $p \geq 2$ вершинами і $q_j \equiv 0$ для всіх j . Тоді спектр задачі (1)–(5) збігається з множиною коренів функції $\sqrt{\lambda}(\sin \sqrt{\lambda}l)^{-1}\phi_N(\cos \sqrt{\lambda}l)$.

Наслідок 1. Якщо $q_j \equiv 0$ для всіх $j = 1, \dots, g$, то власні значення задачі (1)–(5) можна подати як об'єднання підпоследовностей $\{\tilde{\lambda}_k\}_{k=1}^\infty = \bigcup_{i=1}^{2g} \{\tilde{\lambda}_k^{(i)}\}_{k=1}^\infty$, занумерованих так, що $\tilde{\lambda}_k^{(i)} \leq \tilde{\lambda}_{k+1}^{(i)}$

$$\sqrt{\tilde{\lambda}_k^{(i)}} = \frac{2\pi(k-1)}{l} \pm \frac{1}{l} \arccos \alpha_i \quad \text{для } i = 2, 3, \dots, p-1, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

$$\sqrt{\tilde{\lambda}_k^{(1)}} = \frac{\pi(k-1)}{l} \quad k = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Тут $\alpha_1 = 1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{p-1}, \alpha_p = -1$ — власні значення дискретного лапласіана \tilde{A} .

За теоремою 5.4 роботи [9], навіть якщо потенціали на ребрах різні та не симетричні щодо середин ребер, але належать простору $L_2(0, l)$, виконується нерівність $|\lambda_k^{(i)} - \tilde{\lambda}_k^{(i)}| \leq C < \infty$ для всіх i та k , де λ_k — власні значення задачі (1)–(5), а $\tilde{\lambda}_k$ — власні значення цієї ж задачі при $q_j \equiv 0$ для всіх j . З цього та наслідку 1 випливає наступний результат для загального випадку, тобто коли потенціали q_j не є тотожно нульовими.

Теорема 2 (теорема 5.3 з [10]). Нехай T — рівностороннє матричне дерево, а потенціали $q_j \in L_2(0, l)$ — дійсні функції. Тоді власні значення задачі (1)–(5) можна подати як об'єднання підпоследовностей $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty = \bigcup_{i=1}^{2g} \{\lambda_k^{(i)}\}_{k=1}^\infty$ з асимптотиками

$$\sqrt{\lambda_k^{(i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi(k-1)}{l} \pm \frac{1}{l} \arccos \alpha_i + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } i = 2, 3, \dots, p-1, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(1)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{\pi(k-1)}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Тепер перейдемо до опису спектра задачі (1)–(3), (6), (7). Тут нам будуть потрібні деякі поняття.

Нехай \hat{T} — дерево, отримане видаленням всіх висячих вершин дерева T разом із інцидентними з ними ребрами. Для зручності позначимо висячі вершини дерева T через $v_{p-r+1}, v_{p-r+2}, \dots, v_p$, а внутрішні вершини T , тобто вершини дерева \hat{T} , через v_1, v_2, \dots, v_{p-r} . Нехай \hat{A} — матриця суміжності дерева \hat{T} , а $\hat{D}_T = \text{diag} \{d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_{p-1})\}$, де $d(v_i)$ — степінь вершини v_i у дереві T . Розглянемо многочлен

$$P_{T, \hat{T}}(z) := \det(z\hat{D}_T - \hat{A}). \quad (13)$$

Наступна теорема є окремим випадком теореми 6.4.2 [12].

Теорема 3. Нехай T — рівностороннє дерево з принаймні двома ребрами довжини l . Потенціали на ребрах однакові та симетричні щодо середин ребер ($q(l-x) = q(x)$). Тоді спектр задачі (1)–(3), (6), (7) збігається з множиною коренів характеристичної функції

$$\phi_D(\lambda) = s^{r-1}(\sqrt{\lambda}, l) P_{T, \hat{T}}(c(\sqrt{\lambda}, l)),$$

де $P_{T,\hat{T}}$ – многочлен, означений рівнянням (13), $s(\sqrt{\lambda}, x)$ і $c(\sqrt{\lambda}, x)$ – розв’язки рівняння Штурма – Ліувілля на ребрі, які задовольняють умови $s(\sqrt{\lambda}, 0) = s'(\sqrt{\lambda}, 0) - 1 = 0$ і $c(\sqrt{\lambda}, 0) - 1 = c'(\sqrt{\lambda}, 0) = 0$.

Наслідок 2. Якщо $q_j \equiv 0$ для всіх j , то власні значення задачі (1)–(5), (6), (7) можна подати як об’єднання підпоследовностей $\{\tilde{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty} = \bigcup_{i=1}^{2g} \{\tilde{\lambda}_k^{(i)}\}_{k=1}^{\infty}$, занумерованих так, що $\tilde{\lambda}_k^{(i)} \leq \tilde{\lambda}_{k+1}^{(i)}$

$$\sqrt{\tilde{\lambda}_k^{(i)}} = \frac{2\pi(k-1)}{l} \pm \frac{1}{l} \arccos \alpha_i \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, p-r, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (14)$$

$$\sqrt{\tilde{\lambda}_k^{(i)}} = \frac{\pi(k-1)}{l}, \quad i = p-r+1, p-r+2, \dots, p, \quad r = 1, 2, \dots \quad (15)$$

Тут $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-r}$ – корені многочлена $P_{T,\hat{T}}(z)$.

Доведення. Якщо $q_j \equiv 0$, то $s(\sqrt{\lambda}, l) = \frac{\sin \sqrt{\lambda} l}{\sqrt{\lambda}}$, $c(\sqrt{\lambda}, l) = \cos \sqrt{\lambda} l$ і

$$\phi_D(\lambda) = \frac{\sin^{r-1} \sqrt{\lambda} l}{(\sqrt{\lambda})^{r-1}} P_{T,\hat{T}}(\cos \sqrt{\lambda} l).$$

Звідси випливають асимптотичні розвинення (14), (15).

Знову використовуючи теорему 5.4 [9], отримуємо таку теорему.

Теорема 4. Власні значення задачі (1)–(5), (6), (7) можна подати як об’єднання підпоследовностей $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} = \bigcup_{i=1}^{2g} \{\lambda_k^{(i)}\}_{k=1}^{\infty}$, занумерованих так, що $\lambda_k^{(i)} \leq \lambda_{k+1}^{(i)}$ і

$$\sqrt{\lambda_k^{(i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{2\pi(k-1)}{l} \pm \frac{1}{l} \arccos \alpha_i + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, p-r, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (16)$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(i)}} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{\pi(k-1)}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad i = p-r+1, p-r+2, \dots, p, \quad k = 1, 2, \dots \quad (17)$$

4. Основні результати. В цьому пункті ми знайдемо верхні межі для діаметра рівностороннього метричного дерева, які можна отримати використовуючи асимптотики власних значень задачі (1)–(5) та власних значень задачі (1)–(3), (6), (7). Як ми бачили у попередньому пункті, знаючи головні члени асимптотик (11), (12) або (16), (17), ми можемо знайти довжину ребра l та кількість p вершин дерева. Знаючи спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, ми можемо знайти всі коефіцієнти α_i – власні значення дискретного лапласіана цього дерева у випадку задачі (1)–(5) та власні значення модифікованого дискретного лапласіана $\hat{D}_T^{-\frac{1}{2}} \hat{A} \hat{D}_T^{-\frac{1}{2}}$ внутрішнього дерева у випадку задачі (1)–(3), (6), (7) як точки накопичення послідовності $\{\cos(\sqrt{\lambda_k})\}_{k=1}^{\infty}$.

У роботі [10] для задачі з умовами Неймана на висячих вершинах доведено, що якщо кількість вершин дерева не перевищує 8, то множина $\{\alpha_i\}$ однозначно визначає форму дерева. Проте вже у випадку кількості вершин 9 існують два неізометричних дерева з однаковими спектрами [14]. В цій же роботі наведено два приклади пар неізометричних дерев з кількістю вершин 10 з однаковими спектрами задачі з умовами Неймана на висячих вершинах (див. рис. 2 у роботі [14]). У кожному з цих двох випадків коспектральні дерева мають різні діаметри. Отже,

діаметр дерева є характеристикою, за якою можна, принаймні у деяких випадках, відрізнити коспектральні дерева. Таким чином, знаходження верхньої межі для діаметра дерева є важливим питанням.

Ми спочатку отримаємо оцінку діаметра дерева для випадку умов Неймана на висячих вершинах, тобто використовуючи спектр задачі (1)–(5).

Теорема 5. *Діаметр метричного рівностороннього дерева T не перевищує $l(m + 1)$, де m – кількість різних елементів у множині коефіцієнтів $\{\alpha_i\}_{i=2}^{p-1}$ у других членах асимптотичних розв'язків (11) власних значень задачі Неймана (1)–(5).*

Доведення. Скористаємося теоремою 2 [3]. З цієї теореми випливає, що кількість різних власних значень дискретного лапласіана \tilde{A} не менша, ніж кількість ребер у найдовшому простому ланцюгу в дереві плюс 1.

Нехай відомі асимптотики (11). Власні значення $\alpha_1 = 1$ та $\alpha_p = -1$ однократні (див. [5], лема 1.7, твердження (iv) та (v)), і, отже, кількість різних елементів у множині $\{\alpha_i\}_{i=2}^{p-1}$ дорівнює кількості різних власних значень матриці \tilde{A} мінус 2. Використовуючи теорему 2 [3], отримуємо твердження теореми 5.

Розглянемо тепер задачу Діріхле (1)–(3), (6), (7).

Теорема 6. *Метричний діаметр рівностороннього дерева T не перевищує $(\hat{m} + 1)l$, де \hat{m} – кількість різних коефіцієнтів серед α_i у розв'язках (16) для власних значень задачі Діріхле (1)–(3), (6), (7).*

Доведення. Скористаємося теоремою 3. Для внутрішнього дерева \hat{T} , отриманого з дерева T видаленням висячих вершин та інцидентних з ними ребер, матриця \hat{A} має розмір $(p-r) \times (p-r)$, де r – кількість висячих вершин у дерева T . Рівняння $(\lambda \hat{D}_T - \hat{A})Y = 0$ має нетривіальний розв'язок при тих λ , які є власними значеннями матриці $\hat{D}^{-1/2} \hat{A} \hat{D}^{-1/2}$. Ми знову скористаємося теоремою 2 [3], але вже для внутрішнього дерева. За цією теоремою кількість різних власних значень \hat{m} матриці $\hat{D}^{-1/2} \hat{A} \hat{D}^{-1/2}$ не менша, ніж комбінаторний діаметр дерева \hat{T} плюс 1. Кількість \hat{m} різних коефіцієнтів серед α_i у розв'язках (16) для власних значень задачі Діріхле (1)–(3), (6), (7) не менша, ніж комбінаторний діаметр дерева \hat{T} плюс 1.

Вочевидь, комбінаторний діаметр дерева T на 2 більший, ніж комбінаторний діаметр дерева \hat{T} . Отже, приходимо до висновку теореми.

Зауваження. Для багатьох графів знайдені верхні межі збігаються з діаметрами. Але наведені нижче приклади показують, що не для всіх.

5. Приклади. 1. Розглянемо задачу Неймана на рівнобічному графі P_4 (простий ланцюг з чотирма вершинами), діаметр якого дорівнює $3l$. У цьому випадку $D = \text{diag}\{1, 2, 2, 1\}$ і

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_3 = -\frac{1}{2}$, $\alpha_4 = -1$ і, отже, $m = 2$ і $(m + 1)l = 3l$. Таким чином, діаметр дерева дорівнює $(m + 1)l$.

2. Розглянемо задачу Діріхле на тому ж рівнобічному графі P_4 . У цьому випадку внутрішній підграф – це P_2 . В цьому випадку $\hat{D} = \text{diag}\{2, 2\}$ і

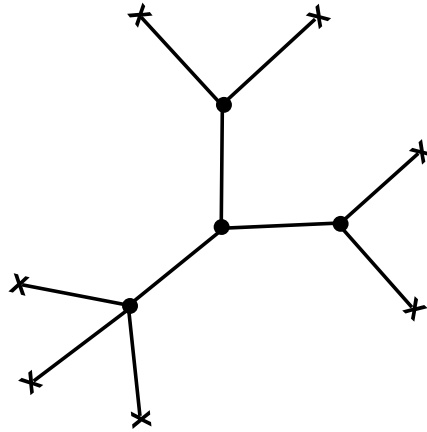


Рис. 1. Граф-сніжинка: × — умова Діріхле, • — умова Неймана або узагальнена умова Неймана.

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, многочлен, який фігурує у теоремі 3, має вигляд $P_{T, \hat{T}}(z) = 4z^2 - 1$. Він має корені $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$, $\hat{m} = 2$. Таким чином, $(\hat{m} + 1)l = 3l$, що дорівнює діаметру дерева.

3. Розглянемо задачу Діріхле на графі-сніжинці (див. рис. 1). Зазначимо, що скінченновимірну спектральну задачу на такому графі було розглянуто у [15]. Внутрішній підграф \hat{G} — це зірковий граф. Його матриця $\hat{D} = \{3, 3, 4, 3\}$, а його матриця суміжності

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

У цьому випадку многочлен, який фігурує у теоремі 3, має вигляд $P_{T, \hat{T}} = 108z^4 - 33z^2$. Отже, $\alpha_1 = \sqrt{\frac{11}{36}}$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = -\sqrt{\frac{11}{36}}$ і $\hat{m} = 3$, $(\hat{m} + 1)l = 4l$. Таким чином, діаметр дерева дорівнює $(\hat{m} + 1)l$.

4. Розглянемо задачу Неймана на рівнобічному H-графі (див. рис. 2). Діаметр графа дорівнює $3l$. У цьому випадку $D = \text{diag}\{1, 1, 1, 1, 3, 3\}$ і

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

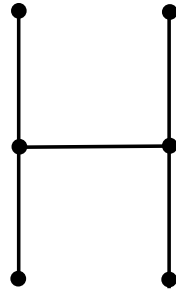


Рис. 2. H-граф з умовами Неймана у висячих вершинах і узагальненими умовами Неймана у внутрішніх вершинах.

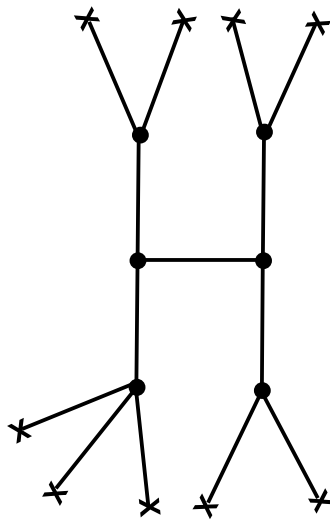


Рис. 3. Декорований H-граф.

Таким чином, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \frac{2}{3}$, $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$, $\alpha_5 = -\frac{2}{3}$, $\alpha_6 = -1$ і $m = 3$ і, отже, діаметр графа менший, ніж $(m + 1)l$.

5. Розглянемо задачу Діріхле на графі, зображеному на рис. 3. У цьому випадку $\hat{D} = \text{diag}\{3, 3, 3, 4, 3, 3\}$ і

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

а многочлен $P_{T, \hat{T}} = 972z^6 - 513z^4 + 42z^2$. Він має корені $\alpha_1 \approx -0,814$, $\alpha_2 \approx -0,577$, $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$, $\alpha_5 \approx 0,577$, $\alpha_6 \approx 0,814$ та $m = 5$ і, отже, діаметр графа $5l$ менший, ніж $(\hat{m} + 1)l = 6l$.

Література

1. G. Berkolaiko, P. Kuchment, *Introduction to quantum graphs*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (2013).
2. F. Barioli, S. Fallat, *On two conjectures regarding an inverse eigenvalue problem for acyclic symmetric matrices*, Electron. J. Linear Algebra, **11**, 41–50 (2004).
3. A. Leal Duarte, C. R. Johnson, *On the minimum number of distinct eigenvalues for a symmetric matrix whose graph is a given tree*, Math. Inequal. Appl., **5**, № 2, 175–180 (2002).
4. В. М. Пивоварчик, *Про мінімальну кількість різних власних значень в задачі на дереві зі стільтьєсівських струн*, Укр. мат. журн., **72**, № 1, 135–141 (2020).
5. Fan R. K. Chung, *Spectral graph theory*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1997).
6. C. Cattaneo, *The spectrum of the continuous Laplacian on a graph*, Monatsh. Math., **124**, № 3, 215–235 (1997).
7. P. Exner, *A duality between Schrödinger operators on graphs and certain Jacobi matrices*, Ann. Inst. H. Poincaré A, **66**, 359–371 (1997).
8. J. Friedman, J.-P. Tillich, *Wave equations for graphs and the edge-based Laplacian*, Pacific J. Math., **216**, № 2, 229–266 (2004).
9. R. Carlson, V. Pivovarchik, *Spectral asymptotics for quantum graphs with equal edge lengths*, J. Phys. A, **41**, Article 145202 (2008).
10. A. Chernyshenko, V. Pivovarchik, *Recovering the shape of a quantum graph*, Int. Equat. Oper. Theory, **92**, Article 23 (2020).
11. A. Chernyshenko, V. Pivovarchik, *Cospectral graphs* (2022); arXiv:2112.14235 [math-ph] 23 Mar 22.
12. M. Möller, V. Pivovarchik, *Direct and inverse finite-dimensional spectral problems on graphs*, Operator Theory: Adv. and Appl., **283**, Birkhäuser/Springer (2020); <https://www.springer.com/gp/book/9783030604837>.
13. Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев, А. В. Боровских, К. П. Лазарев, С. А. Шабров, *Дифференциальные уравнения на геометрических графах*, Физматлит, Москва (2005).
14. M.-E. Pistol, *Generating isospectral but not isomorphic quantum graphs*; arXiv: 2104.12885 [math. SP] 19 Sep 21.
15. V. Pivovarchik, *On multiplicities of eigenvalues of a boundary value problem on a snowflake graph*, Linear Algebra, Appl., **571**, 78–91 (2019).

Одержано 23.02.22