DOI: 10.37863/umzh.v74i8.7217

УДК 517.5

Ю. А. Максименкова, Т. Ф. Михайлова[1] (Укр. держ. ун-т науки і технологій, Дніпро)

ПРО ОДНУ ВЛАСТИВІСТЬ МОДУЛІВ НЕПЕРЕРВНОСТІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

For the moduli of continuity of 2π-periodic functions $\omega_k(f,h)$ of order $k=1,2,\ldots,$ we prove the inequalities

$$\omega_k(f,\pi)\le \frac{2^k}{C_k^{[\frac{k}{2}]}}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\omega_k(f,h)dh,$$

for even k. The inequalities are exact in the spaces $C_{2\pi}$ and $L_1[-\pi,\pi]$.

Для модулів неперервності 2π-періодичних функцій $\omega_k(f,h)$ порядку $k=1,2,\ldots$ доведено нерівності

$$\omega_k(f,\pi)\le \frac{2^k}{C_k^{[\frac{k}{2}]}}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\omega_k(f,h)dh,$$

які для парних k є точними у просторах $C_{2\pi}$ і $L_1[-\pi,\pi]$.

Для функцій f простору $C_{2\pi}$, 2π-періодичних, неперервних на R із нормою $\|f\|=\max\{|f(x)|;\ x\in R\}$, розглянемо властивості функції $\omega_k(f,h),\ k\in N,\ h\ge 0,$ її модуля неперервності порядку k:

$$\omega_k(f,h)=\sup_{|t|\le h}\|\triangle_t^k f\|,\qquad \triangle_t f(x)=f(x+t)-f(x),$$

$$\triangle_t^k f(x)=\triangle_t^{k-1}(\triangle_t f(x))=\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{k-\nu}C_k^{\nu}f(x+\nu t).$$

При $k=1$ повний опис класу модулів неперервності наведено в [1], а при $k>1$ такого опису немає.

Нехай деяка функція $\omega(h), h\in[0,\pi]$, має такі основні властивості модуля неперервності порядку $k,\ k>1$:

1) $\omega(0)=0$;

2) $\omega(h)$ неперервна та неспадна;

3) $\omega(nh)\le n^k\omega(h)$, $n\in N$.

Сукупність відомих властивостей ще не гарантує існування функції f такої, що $\omega_k(f,h)=$ $=\omega(h)$ для всіх $h\in[0,\pi]$. Тому виникає необхідність в дослідженні додаткових властивостей модулів неперервності вищих порядків.

Нехай $e_0(f)=\inf\{\|f-c\|;c\in R\}$ — найкраще наближення f сталою.

[1] Відповідальна за листування, e-mail: mcsimenkoffa@gmail.com.

Теорема 1. 1. *Для будь-якої функції* $f \in C_{2\pi},\ k \in N$, *виконується нерівність*

$$e_0(f) \leq \frac{1}{C_k^{[\frac{k}{2}]}} \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi \omega_k(f,h)dh. \tag{1}$$

У випадку парного k *нерівність* (1) *є точною*:

$$\sup_{f \in C_{2\pi}, f \neq \mathrm{const}} \frac{e_0(f)}{\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \omega_{2k}(f,h)dh} = \frac{1}{C_{2k}^k}. \tag{2}$$

2. *Для всіх* $k \in N$ *і* $f \in C_{2\pi}$ *виконується нерівність*

$$\omega_k(f,\pi) \leq \frac{2^k}{C_k^{[\frac{k}{2}]}} \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi \omega_k(f,h)dh. \tag{3}$$

При парних k *нерівність* (3) *є точною*:

$$\sup_{f \in C_{2\pi}, f \neq \mathrm{const}} \frac{\omega_{2k}(f,\pi)}{\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \omega_{2k}(f,h)dh} = \frac{2^{2k}}{C_{2k}^k}. \tag{4}$$

Зокрема, з нерівності (3) випливає, що степенева функція $h^\alpha,\ \alpha > 0,\ h \in [0,\pi]$, не є модулем неперервності порядку k при $\alpha > \dfrac{2^k}{C_k^{[\frac{k}{2}]}} - 1$.

Ідея доведення нерівностей вигляду (3), яка заснована на точних оцінках вигляду (2) величини $e_0(f)$, з'явилася в роботі [2] у випадку $k=1$ в метриці $L_2[-\pi,\pi]$. Подальші результати для $k=1$ в метриці $L_p[-\pi,\pi],\ p \in [1,\infty)$, отримано в [3, 4].

Доведення теореми. За співвідношенням двоїстості

$$e_0(f) = \sup\left\{\langle f,g\rangle; g \in H_1^0\right\}, \quad \text{де} \quad \langle f,g\rangle = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx,$$

$$H_1^0 = \left\{ g \in L_1[-\pi,\pi],\ \|g\|_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(x)|dx = 1,\ g \perp 1 \right\}.$$

Нехай $g \in H_1^0$. Розглянемо величину

$$I = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left\langle \triangle_t^k f(x), g\left(x + \left[\frac{k}{2}\right]t\right)\right\rangle dt.$$

Оскільки $g \perp 1$, то при $\nu \neq \left[\dfrac{k}{2}\right]$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+\nu t) g\left(x + \left[\frac{k}{2}\right]t\right)dt = 0,$$

а при $\nu = \left[\dfrac{k}{2}\right]$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(x + \left[\frac{k}{2}\right]t\right) g\left(x + \left[\frac{k}{2}\right]t\right) dt = \frac{1}{2\pi}\langle f, g\rangle.$$

Тому

$$I = (-1)^{k-[\frac{k}{2}]} C_k^{[\frac{k}{2}]} \langle f, g\rangle,$$

$$e_0(f) \le \frac{1}{C_k^{[\frac{k}{2}]}} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \|\triangle_t^k f\| dt \le \frac{1}{C_k^{[\frac{k}{2}]}} \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \omega_k(f, t) dt.$$

Нерівність (1) доведено.

Для доведення рівності (2) покладемо $f(x) = \sin x$. Тоді $\|\triangle_h^{2k} \sin x\| = \left(2\sin\dfrac{h}{2}\right)^{2k}$ і $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \left(2\sin\frac{h}{2}\right)^{2k} dh = C_{2k}^k$ [5, с. 175].

Оскільки $\omega_k(f, \pi) = \omega_k(f - c, \pi) \le 2^k \|f - c\|$ для будь-якої сталої c, то з (1) випливає (3). Функція $f(x) = \sin x$ у (4) є екстремальною.

Теорему доведено.

Наведемо доповнення та зауваження до теореми.

1. Для непарних k функція $\sin x$ в (1), (3) не є екстремальною. У нас є гіпотеза, що для всіх $k \in N$ екстремальною в (1), (3) буде функція $\varphi_1(x) = |x| - \dfrac{\pi}{2}$, $x \in [-\pi, \pi]$, і $\varphi_1(x + 2\pi) = \varphi_1(x)$.

Зрозуміло, що $\omega_k(\varphi_1, h)$ для $h \le \pi$ — кусково-лінійна функція. В результаті обчислень $\omega_k(\varphi_1, h)$ для невеликих значень k гіпотеза підтвердилась:

$$\omega_1(\varphi_1, h) = h, \quad \omega_2(\varphi_1, h) = 2h,$$

вузли

$$\omega_3(\varphi_1, h) - \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), (\pi, 4\pi),$$

$$\omega_4(\varphi_1, h) - \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right), (\pi, 8\pi),$$

$$\omega_5(\varphi_1, h) - \left(\frac{\pi}{3}, 2\pi\right), \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right), \left(\frac{2\pi}{3}, 6\pi\right), (\pi, 16\pi).$$

2. Точність нерівності (3) достатньо довести лише для непарних k; звідси буде випливати точність і для парних k. Точніше, якщо деяка функція g екстремальна в (3) для $2k+1$, то вона є екстремальною і для $2k+2$: оскільки $\omega_{2k+2}(g, h) \le 2\omega_{2k+1}(g, h)$ і $2C_{2k+1}^k = C_{2k+2}^{k+1}$, то

$$\frac{e_0(g)}{\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \omega_{2k+2}(g, h) dh} \ge \frac{e_0(g)}{\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \omega_{2k+1}(g, h) dh} = \frac{1}{2C_{2k+1}^k} = \frac{1}{C_{2k+2}^{k+1}}.$$

3. Теорема, очевидно, є правильною і для простору $L_1[-\pi, \pi]$. При парних k екстремальною функцією буде також $\sin x$, а при непарних k екстремальною, можливо, буде функція $\varphi_0(x) = \operatorname{sign}\sin x$.

Література

1. С. М. Никольский, *Ряд Фурье функций с данным модулем непрерывности*, Докл. АН СССР, **52**, 191 – 193 (1946).
2. В. А. Юдин, *О модуле непрерывности в* L_2, Сиб. мат. журн., **20**, 449 – 450 (1979).
3. С. В. Конягин, *О модулях непрерывности функций*, Тез. докл. Всесоюз. школы по теории функций (Кемерово, 1983) (1983), с. 59.
4. В. И. Иванов, *О модуле непрерывности в* L_p, Мат. заметки, **41**, № 5, 682 – 686 (1987).
5. Н. М. Рыжик, И. С. Градштейн, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Гостехтеориздат, Москва (1951).

Одержано 09.05.22