DOI: 10.37863/umzh.v74i9.7234

УДК 517.9

О. Є. Гентош (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів),
Я. А. Прикарпатський[1] (Ін-т математики НАН України, Київ та Університет рільництва, Краків, Польща),
О. А. Балінський (Мат. ін-т Університету Кардіфф, Великобританія),
А. К. Прикарпатський (Ін-т математики Краків. ун-ту технологій, Польща)

ГЕОМЕТРИЧНІ СТРУКТУРИ НА ОРБІТАХ ПЕТЕЛЬНИХ ГРУП ДИФЕОМОРФІЗМІВ ТА АСОЦІЙОВАНІ ІНТЕГРОВНІ ГАМІЛЬТОНОВІ СИСТЕМИ „НЕБЕСНОГО” ТИПУ. II

A review of differential-geometric and Lie-algebraic approaches to the study of a broad class of nonlinear integrable differential systems of “heavenly” type associated with Hamiltonian flows on the spaces conjugated to the loop Lie algebras of vector fields on the tori. These flows are generated by the corresponding orbits of the coadjoint action of the diffeomorphism loop group and satisfy the Lax – Sato-type vector-field compatibility conditions. The corresponding hierarchies of conservation laws and their relationships with Casimir invariants are analyzed. Typical examples of these systems are considered and their complete integrability is established by using the developed Lie-algebraic construction. We describe new generalizations of the integrable dispersion-free systems of “heavenly” type for which the corresponding generating elements of orbits have a factorized structure, which allows their extension to the multidimensional case.

Наведено огляд диференціально-геометричних і Лі-алгебраїчних підходів до вивчення широкого класу нелінійних інтегровних диференціальних систем „небесного” типу, асоційованих із гамільтоновими потоками на спряжених просторах до петельних алгебр Лі векторних полів на торах. Ці потоки породжуються відповідними орбітами коприєднаної дії петельної групи дифеоморфізмів і задовольняють векторно-польові умови сумісності типу Лакса – Сато. Проаналізовано відповідні ієрархії законів збереження і їхній зв’язок з інваріантами Казиміра. Розглянуто типові приклади таких систем і встановлено їхню повну інтегровність за допомогою розвиненої Лі-алгебраїчної конструкції. Описано нові узагальнення інтегровних бездисперсійних систем „небесного” типу, для яких відповідні породжуючі елементи орбіт мають факторизовану структуру, що допускає їхнє розширення на багатовимірний випадок.

1. Багатовимірні системи „небесного” типу: модифікована Лі-алгебраїчна схема. Нехай $\widetilde{\mathrm{Diff}}_{\pm}(\mathbb{T}^n),\ n\in\mathbb{Z}_+,$ позначає підгрупи петельної групи дифеоморфізмів $\widetilde{\mathrm{Diff}}(\mathbb{T}^n):=\{\mathbb{C}\supset\supset\mathbb{S}^1\to Diff(\mathbb{T}^n)\}$, голоморфно продовжені відповідно у внутрішню $\mathbb{D}^1_+\subset\mathbb{C}$ та зовнішню $\mathbb{D}^1_-\subset\mathbb{C}$ області центрального одиничного диска $\mathbb{D}^1\subset\mathbb{C}^1$ таким чином, що для будь-якого $\tilde g(\lambda)\in\widetilde{\mathrm{Diff}}_-(\mathbb{T}^n),\ \lambda\in\mathbb{D}^1_-,\ \tilde g(\infty)=1\in\mathrm{Diff}(\mathbb{T}^n)$. Відповідні підалгебри Лі $\widetilde{\mathrm{diff}}_{\pm}(\mathbb{T}^n)\simeq\simeq\widetilde{\mathrm{Vect}}_{\pm}(\mathbb{T}^n)$ петельних підгруп дифеоморфізмів $\widetilde{\mathrm{Diff}}_{\pm}(\mathbb{T}^n)$ утворюють векторні поля на $\mathbb{T}^n$, які є голоморфними відповідно на областях $\mathbb{D}^1_{\pm}\subset\mathbb{C}^1$, де для будь-якого $\tilde a(\lambda)\in\widetilde{\mathrm{diff}}_-(\mathbb{T}^n)$ маємо $\tilde a(\infty)=0$.

Алгебра Лі $\widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^n)$ допускає розбиття у пряму суму двох підалгебр Лі:

$$\widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^n)=\widetilde{\mathrm{diff}}_+(\mathbb{T}^n)\oplus\widetilde{\mathrm{diff}}_-(\mathbb{T}^n).$$

Її регулярний спряжений простір $\widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^n)^*$ відносно згортки:

$$(\tilde l|\tilde a):=\operatorname*{res}_{\lambda\in\mathbb{C}}(l(x;\lambda)|a(x;\lambda))_{H^0},\tag{1.1}$$

[1] Відповідальний за листування, e-mail: yarpry@imath.kiev.ua.

де

$$(l(x;\lambda)|a(x;\lambda))_{H^0} := \int\limits_{\mathbb{T}^n} dx \langle l(x;\lambda), a(x;\lambda)\rangle$$

є звичайним скалярним добутком на просторі Гільберта $H^0 := L_2(\mathbb{T}^n;\mathbb{R}^n)$ для будь-яких елементів $\tilde{l} \in \widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^n)^*$ та $\tilde{a} \in \widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^n)$, які мають вигляд

$$\tilde{a} = \sum_{j=1}^{n} a^{(j)}(x;\lambda)\frac{\partial}{\partial x_j} := \left\langle a(x;\lambda), \frac{\partial}{\partial x}\right\rangle,$$

$$\tilde{l} = \sum_{j=1}^{n} l_j(x;\lambda) dx_j := \langle l(x;\lambda), dx\rangle,$$

можна ототожнити з самою алгеброю Лі $\widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^n)^*$. Тут

$$\frac{\partial}{\partial x} := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\intercal}$$

позначає оператор градієнта в евклідовому просторі $(\mathbb{E}^n; \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Комутатор Лі будь-яких векторних полів $\tilde{a}, \tilde{b} \in \widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^n)$ знаходиться за правилом

$$[\tilde{a}, \tilde{b}] = \tilde{a}\tilde{b} - \tilde{b}\tilde{a} = \left\langle \left\langle a(x;\lambda), \frac{\partial}{\partial x}\right\rangle b(x;\lambda), \frac{\partial}{\partial x}\right\rangle -$$

$$- \left\langle \left\langle b(x;\lambda), \frac{\partial}{\partial x}\right\rangle a(x;\lambda), \frac{\partial}{\partial x}\right\rangle.$$

Крім того, має місце таке ототожнення для регулярних спряжених підпросторів:

$$\widetilde{\mathrm{diff}}_+(\mathbb{T}^n)^* \simeq \widetilde{\mathrm{diff}}_-(\mathbb{T}^n), \quad \widetilde{\mathrm{diff}}_-(\mathbb{T}^n)^* \simeq \widetilde{\mathrm{diff}}_+(\mathbb{T}^n),$$

де будь-яке $\tilde{l}(\lambda) \in \widetilde{\mathrm{diff}}_-(\mathbb{T}^n)^*$ задовольняє умову $\tilde{l}(0) = 0$.

Побудуємо петельну алгебру Лі $\tilde{\mathcal{G}} := \widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^n) \ltimes \widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^n)^*$ як напівпряму суму алгебри Лі $\widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^n)$ та її регулярного спряженого простору $\widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^n)^*$, на якій комутатор Лі для будь-якої пари елементів $(\tilde{a}_1 \ltimes \tilde{l}_1), (\tilde{a}_2 \ltimes \tilde{l}_2) \in \tilde{\mathcal{G}}$ задається правилом

$$[\tilde{a}_1 \ltimes \tilde{l}_1, \tilde{a}_2 \ltimes \tilde{l}_2\ ] := [\tilde{a}_1, \tilde{a}_2] \ltimes (ad^*_{\tilde{a}_2}\tilde{l}_1 - ad^*_{\tilde{a}_1}\tilde{2}_1), \tag{1.2}$$

де $ad^*_{\widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^n)} : \widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^n)^* \to \widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^n)^*, (ad^*_{\tilde{a}}\tilde{l}|\tilde{b}) := (\tilde{l}|[\tilde{a}, \tilde{b}])$ для $\tilde{l} \in \widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^n)^*$ та будь-яких $\tilde{a}, \tilde{b} \in$ $\in \widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^n)$ — стандартне коприєднане відображення алгебри Лі $\widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^n)$ на її регулярному спряженому просторі $\widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^n)^*$ щодо згортки (1.1). На алгебрі Лі $\tilde{\mathcal{G}}$ можна ввести ad-інваріантний невироджений скалярний добуток у вигляді

$$(\tilde{a}_1 \ltimes \tilde{l}_1 | \tilde{a}_2 \ltimes \tilde{l}_2) := (\tilde{l}_2|\tilde{a}_1)\ + (\tilde{l}_1|\tilde{a}_2), \tag{1.3}$$

де $\tilde{a}_1 \ltimes \tilde{l}_1,\ \tilde{a}_2 \ltimes \tilde{l}_2 \in \tilde{\mathcal{G}}$, який дозволяє ототожнити регулярний спряжений простір $\tilde{\mathcal{G}}^*$ щодо (1.3) до алгебри Лі $\tilde{\mathcal{G}}$ з цією алгеброю Лі, тобто $\tilde{\mathcal{G}}^* \simeq \tilde{\mathcal{G}}$.

Алгебру Лі $\tilde{\mathcal{G}}$ можна розбити на пряму суму двох підалгебр Лі [1 – 3]: $\tilde{\mathcal{G}} = \tilde{\mathcal{G}}_+ \oplus \tilde{\mathcal{G}}_-$, де

$$\tilde{\mathcal{G}}_+ := \widetilde{\operatorname{diff}}(\mathbb{T}^n)_+ \ltimes \widetilde{\operatorname{diff}}(\mathbb{T}^n)^*_-, \quad \tilde{\mathcal{G}}_- := \widetilde{\operatorname{diff}}(\mathbb{T}^n)_- \ltimes \widetilde{\operatorname{diff}}(\mathbb{T}^n)^*_+.$$

Це дозволяє задати на $\tilde{\mathcal{G}}$ новий комутатор Лі у вигляді

$$[\tilde{w}_1, \tilde{w}_2]_{\mathcal{R}} := [\mathcal{R}\tilde{w}_1, \tilde{w}_2] + [\tilde{w}_1, \mathcal{R}\tilde{w}_2],$$

де $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2 \in \tilde{\mathcal{G}}$, $\mathcal{R} := (P_+ - P_-)/2$ — стандартний $\mathcal{R}$-операторний гомоморфізм [10, 11, 15] на $\tilde{\mathcal{G}}$ і, за означенням, $P_\pm : \tilde{\mathcal{G}} \to \tilde{\mathcal{G}}_\pm \subset \tilde{\mathcal{G}}$, і застосувати до алгебри Лі $\tilde{\mathcal{G}}$ класичну АКС-теорію (Адлера – Костанта – Саймза) для побудови гамільтонових систем на регулярному спряженому просторі $\tilde{\mathcal{G}}^* \simeq \tilde{\mathcal{G}}$ за допомогою ієрархій інваріантів Казиміра щодо базового комутатора Лі (1.2).

Щоб детально описати відповідну Лі-алгебраїчну схему, знайдемо інваріанти Казиміра $h \in \in I(\tilde{\mathcal{G}}^*)$, які, за означенням, задовольняють співвідношення

$$ad^*_{\nabla h(\tilde{l};\tilde{a})}(\tilde{l};\tilde{a}) = 0,$$

яке можна записати у комутаторному вигляді

$$[\nabla h(\tilde{l};\tilde{a}), \tilde{a} \ltimes \tilde{l}] = 0, \tag{1.4}$$

де $\nabla h(\tilde{l};\tilde{a}) := \nabla h_{\tilde{l}} \ltimes \nabla h_{\tilde{a}} \in \widetilde{\operatorname{diff}}(\mathbb{T}^n) \ltimes \widetilde{\operatorname{diff}}(\mathbb{T}^n)^* = \tilde{\mathcal{G}}$ — градієнт інваріанта Казиміра $h \in I(\tilde{\mathcal{G}}^*)$ у точці $(\tilde{l};\tilde{a}) \in \tilde{\mathcal{G}}^* \simeq \tilde{\mathcal{G}}$. Співвідношення (1.4) еквівалентне системі диференціально-алгебраїчних рівнянь

$$[\nabla h_{\tilde{l}}; \tilde{a}] = 0, \quad ad^*_{\nabla h_{\tilde{l}}} \tilde{l} - ad^*_{\tilde{a}} \nabla h_{\tilde{a}} = 0.$$

У явному вигляді ці рівняння записуються так:

$$\begin{gathered}\langle \nabla h_l, \partial/\partial x\rangle a - \langle a, \partial/\partial x\rangle \nabla h_l = 0,\\ \langle \partial/\partial x, \nabla h_l\rangle l + \langle l, (\partial/\partial x)\nabla h_l)\rangle -\\ - \langle \partial/\partial x, a\rangle \nabla h_a - \langle \nabla h_a, (\partial/\partial x) a\rangle = 0,\end{gathered} \tag{1.5}$$

де

$$\nabla h_{\tilde{l}} := \langle \nabla h_l, \partial/\partial x\rangle, \quad \tilde{l} := \langle l, dx\rangle,$$
$$\nabla h_{\tilde{a}} := \langle \nabla h_a, dx\rangle, \quad \tilde{a} := \langle a, \partial/\partial x\rangle.$$

Систему лінійних рівнянь (1.5) для заданого елемента $\tilde{a} \ltimes \tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}$, яка є сингулярною при $|\lambda| \to \infty$, можна розв'язати за допомогою асимптотичних розвинень

$$\nabla h_l \sim \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \nabla h_l^{(j)} \lambda^{-j}, \quad \nabla h_a \sim \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \nabla h_a^{(j)} \lambda^{-j}\,, \tag{1.6}$$

які дозволяють отримати нескінченну ієрархію градієнтів $\nabla h^{(p)}(\tilde{l};\tilde{a}) = \lambda^p \nabla h(\tilde{l};\tilde{a}) \in \tilde{\mathcal{G}}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, для відповідних інваріантів Казиміра $h^{(p)} \in I(\tilde{\mathcal{G}}^*), p \in \mathbb{Z}_+$. Якщо заданий елемент $\tilde{a} \ltimes \tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}$ є сингулярним при $|\lambda| \to 0$, систему лінійних рівнянь (1.5) можна розв'язати за допомогою асимптотичних розвинень

$$\nabla h_l \sim \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \nabla h_l^{(j)} \lambda^{j}, \quad \nabla h_a \sim \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \nabla h_a^{(j)} \lambda^{j}, \tag{1.7}$$

які дозволяють побудувати нескінченну ієрархію градієнтів $\nabla h^{(p)}(\tilde{l};\tilde{a}) = \lambda^{-p} \nabla h(\tilde{a},\tilde{l}) \in \tilde{\mathcal{G}}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, для відповідних інваріантів Казиміра $h^{(p)} \in I(\tilde{\mathcal{G}}^*), p \in \mathbb{Z}_+$.

Далі будемо вважати, що знайдено градієнти $\nabla h^{(y)}(\tilde{a};\tilde{l}) := \lambda^{p_y} \nabla h^{(1)}(\tilde{a},\tilde{l})$, $\nabla h^{(t)}(\tilde{a};\tilde{l}) :=$ $:= \lambda^{p_y} \nabla h^{(2)}(\tilde{a};\tilde{l}) \in \tilde{\mathcal{G}}$ для двох інваріантів Казиміра $h^{(1)}, h^{(2)} \in I(\tilde{\mathcal{G}}^*)$ (необов'язково різних) для деяких цілих $p_y, p_t \in \mathbb{Z}$, які задовольняють рівняння (1.5). Тоді, використавши класичну АКС-теорію, побудуємо два комутуючі потоки щодо еволюційних параметрів $y, t \in \mathbb{R}$ на регулярному спряженому просторі $\tilde{\mathcal{G}}^* \simeq \tilde{\mathcal{G}}$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\tilde{a} = -\left[\nabla h^{(y)}_{\tilde{l},+}, \tilde{a}\right], \quad \frac{\partial}{\partial t}\tilde{a} = -[\nabla h^{(t)}_{\tilde{l},+}, \tilde{a}] \tag{1.8}$$

і

$$\frac{\partial}{\partial y}\tilde{l} = -ad^*_{\nabla h^{(y)}_{\tilde{l},+}}\tilde{l} + ad^*_{\tilde{a}}(\nabla h^{(y)}_{\tilde{a},+}), \quad \frac{\partial}{\partial t}\tilde{l} \;= -ad^*_{\nabla h^{(t)}_{\tilde{l},+}}\tilde{l} + ad^*_{\tilde{a}}(\nabla h^{(t)}_{\tilde{a},+}), \tag{1.9}$$

де $(\nabla h^{(y)}_{\tilde{l},+} \ltimes \nabla h^{(y)}_{\tilde{a},+}) := P_+ \nabla h^{(y)}(\tilde{a};\tilde{l}) \in \tilde{\mathcal{G}}_+$ і $(\nabla h^{(t)}_{\tilde{l},+} \ltimes \nabla h^{(t)}_{\tilde{a},+}) := P_+ \nabla h^{(t)}(\tilde{a};\tilde{l}) \in \tilde{\mathcal{G}}_+$ — проєкції відповідних асимптотичних розвинень (1.6), (1.7). Для вибраного елемента $\tilde{a} \ltimes \tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}^* \simeq \tilde{\mathcal{G}}$ потоки (1.8) і (1.9) є результатом гамільтонових потоків

$$\frac{\partial}{\partial y}(\tilde{a} \ltimes \tilde{l}) = \{\tilde{a} \ltimes \tilde{l}, h^{(y)}\}_{\mathcal{R}}, \quad \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{a} \ltimes \tilde{l}) = \{\tilde{a} \ltimes \tilde{l}, h^{(t)}\}_{\mathcal{R}}, \tag{1.10}$$

породжених $\mathcal{R}$-деформованою дужкою Лі–Пуассона [10–12, 15]:

$$\{h, f\}_{\mathcal{R}} := \left(\tilde{a} \ltimes \tilde{l}, [\nabla h(\tilde{l};\tilde{a}), \nabla f(\tilde{l},\tilde{a})]_{\mathcal{R}}\right) \tag{1.11}$$

на регулярному спряженому просторі $\tilde{\mathcal{G}}^* \simeq \tilde{\mathcal{G}}$. Тут $h, f \in D(\tilde{\mathcal{G}}^*)$ — деякі гладкі за Фреше функціонали. Умова комутування цих потоків еквівалентна системі двох рівнянь

$$\left[\nabla h^{(y)}_{\tilde{l},+}, \nabla h^{(t)}_{\tilde{l},+}\right] - \frac{\partial}{\partial t}\nabla h^{(y)}_{\tilde{l},+} + \frac{\partial}{\partial y}\nabla h^{(t)}_{\tilde{l},+} = 0 \tag{1.12}$$

і

$$ad^*_{\tilde{a}}\tilde{P}=0,$$
$$\tilde{P}=ad^*_{\nabla h^{(y)}_{\tilde{l},+}}(\nabla h^{(t)}_{\tilde{a},+})-ad^*_{\nabla h^{(t)}_{\tilde{l},+}}(\nabla h^{(y)}_{\tilde{a},+})-\frac{\partial}{\partial t}\nabla h^{(y)}_{\tilde{a},+}+\frac{\partial}{\partial y}\nabla h^{(t)}_{\tilde{a},+}$$

для будь-якого елемента $\tilde{a}\ltimes\tilde{l}\in\tilde{\mathcal{G}}$.

Отже, справедливим є таке твердження

Твердження 1.1. *Гамільтонові потоки* (1.10) *на регулярному спряженому просторі* $\tilde{\mathcal{G}}^*\simeq\simeq\tilde{\mathcal{G}}$ *породжують системи комутуючих еволюційних рівнянь* (1.8) *і* (1.9). *Умова комутування еволюційних рівнянь* (1.8) *еквівалентна умові сумісності Лакса – Сато* (1.12) *для деякої системи нелінійних рівнянь з частинними похідними „небесного” типу.*

Описану вище схему побудови гамільтонових потоків на регулярному спряженому просторі $\tilde{\mathcal{G}}^*$ узагальнимо таким чином.

Параметризуємо алгебру Лі $\tilde{\mathcal{G}}$ за допомогою точкового добутку $\tilde{\mathcal{G}}^{\mathbb{S}^1}:=\prod_{z\in\mathbb{S}^1}\tilde{\mathcal{G}}$ і розглянемо його центральне розширення 2-коциклом Маурера – Картана $\tilde{\omega}_2:\tilde{\mathcal{G}}\times\tilde{\mathcal{G}}\to\mathbb{C}$:

$$\tilde{\omega}_2(\tilde{a}_1\ltimes\tilde{l}_1,\tilde{a}_2\ltimes\tilde{l}_2):=\int\limits_{\mathbb{S}^1}[(l_1,\partial\tilde{a}_2/\partial z)-(l_2,\partial\tilde{a}_1/\partial z)],$$

де $\tilde{a}_1\ltimes\tilde{l}_1,\tilde{a}_2\ltimes\tilde{l}_2\in\tilde{\mathcal{G}}$. На центральному розширенні $\tilde{\mathfrak{G}}:=\tilde{\mathcal{G}}\oplus\mathbb{C}$ комутатор задається правилом

$$[(\tilde{a}_1\ltimes\tilde{l}_1;\alpha_1),(\tilde{a}_2\ltimes\tilde{l}_2;\alpha_1)]:=([\tilde{a}_1,a_2]\ltimes(ad^*_{\tilde{a}_1}\tilde{l}_2-ad^*_{\tilde{a}_2}\tilde{l}_1);\tilde{\omega}_2(\tilde{a}_1\ltimes\tilde{l}_1,\tilde{a}_2\ltimes\tilde{l}_2))$$

для будь-якої пари елементів $(\tilde{a}_1\ltimes\tilde{l}_1;\alpha_1),(\tilde{a}_2\ltimes\tilde{l}_2;\alpha_1)\in\tilde{\mathfrak{G}}$.

$\mathcal{R}$-деформована дужка Лі – Пуассона (1.11) для будь-яких гладких функціоналів $h,f\in\in D(\mathfrak{G}^*)$ на регулярному спряженому просторі $\tilde{\mathfrak{G}}^*$ має вигляд

$$\begin{gathered}\{h,f\}_{\mathcal{R}}:=(\tilde{a}\ltimes\tilde{l},[\nabla h(\tilde{l};\tilde{a}),\nabla f(\tilde{l};\tilde{a})]_{\mathcal{R}})+\\+\tilde{\omega}_2(\mathcal{R}\nabla h(\tilde{l};\tilde{a}),\nabla f(\tilde{l},\tilde{a}))+\tilde{\omega}_2(\nabla h(\tilde{l};\tilde{a}),\mathcal{R}\nabla f(\tilde{l};\tilde{a})).\end{gathered}\tag{1.13}$$

Відповідні інваріанти Казиміра $h^{(p)}\in I(\tilde{\mathfrak{G}}^*),\ p\in\mathbb{Z}_+$, визначаються за допомогою стандартної дужки Лі – Пуассона:

$$\begin{gathered}\{h^{(p)},f\}=0,\\(\tilde{a}\ltimes\tilde{l},[\nabla h^{(p)}(\tilde{l},\tilde{a}),\nabla f(\tilde{a},\tilde{l})])+\tilde{\omega}_2(\nabla h^{(p)}(\tilde{a},\tilde{l}),\nabla f(\tilde{a},\tilde{l})),\end{gathered}\tag{1.14}$$

для всіх гладких функціоналів $f\in D(\tilde{\mathfrak{G}}^*)$. З рівності (1.14) знаходимо, що градієнти $\nabla h^{(p)}\in\tilde{\mathfrak{G}}$ інваріантів Казиміра $h^{(p)}\in I(\tilde{\mathfrak{G}}^*),\ p\in\mathbb{Z}_+$, задовольняють рівняння

$$[\nabla h_{\tilde{l}}\tilde{a}]-\frac{\partial}{\partial z}\nabla h_{\tilde{l}}=0,\ \ ad^*_{\nabla h_{\tilde{l}}}\tilde{l}-ad^*_{\tilde{a}}\nabla h_{\tilde{a}}-\frac{\partial}{\partial z}\nabla h_{\tilde{a}}=0$$

для будь-якого вибраного елемента $\tilde{a} \ltimes \tilde{l} \in \bar{\mathcal{G}}^*$. За допомогою деяких знайдених інваріантів Казиміра $h^{(y)}, h^{(t)} \in I(\tilde{\mathfrak{G}}^*)$ побудуємо, з використанням формули (1.13), комутуючі гамільтонові потоки на регулярному спряженому просторі $\tilde{\mathfrak{G}}^*$:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\tilde{a} \ltimes \tilde{l}) = \{\tilde{a} \ltimes \tilde{l}, h^{(y)}\}_{\mathcal{R}}, \quad \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{a} \ltimes \tilde{l}) = \{\tilde{a} \ltimes \tilde{l}, h^{(t)}\}_{\mathcal{R}}, \tag{1.15}$$

які є еквівалентними системі еволюційних рівнянь

$$\frac{\partial}{\partial y}\tilde{a} = -[\nabla h^{(y)}_{\tilde{l},+}, \tilde{a}] + \frac{\partial}{\partial z}\nabla h^{(y)}_{\tilde{l},+}, \quad \frac{\partial}{\partial t}\tilde{a} = -[\nabla h^{(t)}_{\tilde{l},+}, \tilde{a}] + \frac{\partial}{\partial z}\nabla h^{(t)}_{\tilde{l},+} \tag{1.16}$$

і

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial y}\tilde{l} = -ad^*_{\nabla h^{(y)}_{\tilde{l},+}}\tilde{l} + ad^*_{\tilde{a}}(\nabla h^{(y)}_{\tilde{a},+}) + \frac{\partial}{\partial z}\nabla h^{(y)}_{\tilde{a},+}, \\ \frac{\partial}{\partial t}\tilde{l} = -ad^*_{\nabla h^{(t)}_{\tilde{l},+}}\tilde{l} + ad^*_{\tilde{a}}(\nabla h^{(t)}_{\tilde{a},+}) + \frac{\partial}{\partial z}\nabla h^{(t)}_{\tilde{a},+}.\end{gathered} \tag{1.17}$$

Умова комутування цих потоків задається системою двох рівнянь

$$[\nabla h^{(y)}_{\tilde{l},+}, \nabla h^{(t)}_{\tilde{l},+}] - \frac{\partial}{\partial t}\nabla h^{(y)}_{\tilde{l},+} + \frac{\partial}{\partial y}\nabla h^{(t)}_{\tilde{l},+} = 0$$

і

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z} + ad^*_{\tilde{a}}\tilde{P} = 0,$$

$$\tilde{P} = ad^*_{\nabla h^{(y)}_{\tilde{l},+}}(\nabla h^{(t)}_{\tilde{a},+}) - ad^*_{\nabla h^{(t)}_{\tilde{l},+}}(\nabla h^{(y)}_{\tilde{a},+}) - \frac{\partial}{\partial t}\nabla h^{(y)}_{\tilde{a},+} + \frac{\partial}{\partial y}\nabla h^{(t)}_{\tilde{a},+}$$

для будь-якого $\tilde{a} \ltimes \tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}$. Перше з цих рівнянь можна розглядати як умову сумісності типу Лакса еволюційних рівнянь (1.16). Як наслідок, можна сформулювати таке твердження.

Твердження 1.2. *Гамільтонові потоки* (1.15) *на регулярному спряженому просторі* $\tilde{\mathfrak{G}}^* \simeq \simeq \tilde{\mathfrak{G}}$ *породжують системи комутуючих еволюційних рівнянь* (1.16) *і* (1.17). *Умова комутування еволюційних рівнянь* (1.16) *є умовою сумісності для множини лінійних векторно-польових рівнянь*

$$\partial\psi/\partial y + \nabla h^{(y)}_{\tilde{l},+}\psi = 0, \qquad \partial\psi/\partial z + \tilde{a}\psi = 0, \qquad \partial\psi/\partial t + \nabla h^{(t)}_{\tilde{l},+}\psi = 0 \tag{1.18}$$

для всіх $(y,t;\lambda,z,x) \in \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{C} \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{T}^n)$ *і функції* $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2 \times (\mathbb{C} \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{T}^n);\mathbb{C})$, *а на орбітах коприєднаної дії алгебри Лі* $\tilde{\mathfrak{G}}$ *редукується до системи нелінійних рівнянь з частинними похідними „небесного" типу.*

В межах описаного вище Лі-алгебраїчного підходу кожний інваріант Казиміра $h^{(j)} \in \in I(\mathfrak{G}^*),\ j \in \mathbb{Z}_+$, для елемента $\tilde{a} \ltimes \tilde{l} \in \mathfrak{G}^*$ породжує на регулярному спряженому просторі $\mathfrak{G}^*$ ієрархію комутуючих гамільтонових потоків:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt_j}\tilde{a} = -[\nabla h^{(j)}_{\tilde{l},+}, \tilde{a}] + \frac{\partial}{\partial z}\nabla h^{(j)}_{\tilde{l},+}, \\ \frac{d}{dt_j}\tilde{l} = -ad^*_{\nabla h^{(j)}_{\tilde{l},+}}\tilde{l} + ad^*_{\tilde{a}}(\nabla h^{(j)}_{\tilde{a},+}) + \frac{\partial}{\partial z}\nabla h^{(j)}_{\tilde{a},+}.\end{gathered} \tag{1.19}$$

Ієрархію потоків (1.19) можна записати за допомогою генеруючого векторного поля $\dfrac{\partial}{\partial t} := := \sum_{j\in\mathbb{Z}_+}\mu^{-j}\dfrac{\partial}{\partial t_j}$ у вигляді

$$\frac{d}{dt}\tilde{a}(\lambda) = -\frac{\mu}{\mu-\lambda}[\nabla h_{\tilde{l}}(\mu), \tilde{a}(\lambda)| + \frac{\mu}{\mu-\lambda}\frac{\partial}{\partial z}\nabla h_{\tilde{l}}(\mu) \tag{1.20}$$

і

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}(\tilde{l}(\lambda)|\tilde{Y}(\lambda)) = \frac{\mu}{\mu-\lambda}(\tilde{l}(\lambda)|[\nabla h_{\tilde{l}}(\mu)), \tilde{Y}(\lambda)]) + \\ + \frac{\mu}{\mu-\lambda}(\nabla h_{\tilde{a}}(\lambda)|[\tilde{a}(\mu), \tilde{Y}(\lambda)]) - \frac{\mu}{\mu-\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial z}\nabla h_{\tilde{l}}(\mu)|\tilde{Y}(\lambda)\right) = \\ = (i_{\frac{\mu}{\mu-\lambda}\nabla h_{\tilde{l}}(\mu)} d\tilde{l}(\lambda)|\tilde{Y}(\lambda)) + (d\, i_{\frac{\mu}{\mu-\lambda}\nabla h_{\tilde{l}}(\mu)}\tilde{l}(\lambda)|\tilde{Y}(\lambda)) - \\ - \frac{\mu}{\mu-\lambda}(\langle d/dx, \nabla h_{\tilde{l}}(\mu)\rangle\tilde{l}(\lambda)|\tilde{Y}(\lambda)) - \frac{\mu}{\mu-\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial z}\nabla h_{\tilde{a}}(\mu)|\tilde{Y}(\lambda)\right) - \\ - (i_{\frac{\mu}{\mu-\lambda}\tilde{a}(\mu)} d\nabla h_{\tilde{a}}(\lambda)|\tilde{Y}(\lambda)) + (d\, i_{\frac{\mu}{\mu-\lambda}\tilde{a}(\mu)}\nabla h_{\tilde{a}}(\lambda)|\tilde{Y}(\lambda)),\end{gathered} \tag{1.21}$$

де $\tilde{Y}(\lambda) \in \mathfrak{G}$, а $\mu \in \mathbb{C}$ є таким, що $|\lambda/\mu| < 1$ при $|\lambda|,\ |\mu| \to \infty$. Тут $\widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^n) \simeq \tilde{\Gamma}(\mathbb{T}^n)$ і $\widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^n)^* \simeq \tilde{\Lambda}^1(\mathbb{T}^n)$. Для породжуючого елемента $\tilde{a}(\lambda) \ltimes \tilde{l}(\lambda) \in \tilde{\Gamma}(\mathbb{T}^n) \ltimes \tilde{\Lambda}^1(\mathbb{T}^n)$ співвідношення (1.20) і (1.21) можна записати у вигляді

$$\frac{d}{dt}\tilde{a}(\lambda) = \frac{\partial}{\partial z}\tilde{K}(\mu, \lambda) \tag{1.22}$$

і

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\tilde{l}(\lambda) = \frac{\mu}{\mu-\lambda}\langle d/dx, \nabla h_l(\mu)\rangle\tilde{l}(\lambda) + L_{\tilde{A}(\mu,\lambda)}\nabla h_{\tilde{a}}(\mu) + \\ + \frac{\partial}{\partial z}\nabla h_{\tilde{a}}(\mu) := \mathrm{div}\,\tilde{K}(\mu,\lambda)\ \tilde{l}(\lambda) + \frac{d}{dz}\nabla h_{\tilde{a}}(\mu),\end{gathered} \tag{1.23}$$

де $d/dt := \partial/\partial t + L_{\tilde{K}(\mu,\lambda)}$, $d/dz := \dfrac{\mu}{\mu-\lambda}\partial/\partial z + L_{\tilde{A}(\mu,\lambda)}$, а також $L_{\tilde{K}(\mu,\lambda)} = i_{\tilde{K}(\mu,\lambda)}d + di_{\tilde{K}(\mu,\lambda)}$ і $L_{\tilde{A}(\mu,\lambda)} = i_{\tilde{A}(\mu,\lambda))}d + di_{\tilde{A}(\mu,\lambda)}$ — вирази Картана [11, 13, 14] для похідних уздовж векторних полів

$$\tilde{K}(\mu,\lambda) := \frac{\mu}{\mu-\lambda}\nabla h_{\tilde{l}}(\mu) = \frac{\mu}{\mu-\lambda}\left\langle \nabla h_l(\mu), \frac{d}{dx}\right\rangle$$

і

$$\tilde{A}(\mu,\lambda) := \frac{\mu}{\mu-\lambda}\tilde{a}(\mu) = \frac{\mu}{\mu-\lambda}\left\langle a(\mu), \frac{d}{dx}\right\rangle$$

відповідно, для яких $|\lambda/\mu| < 1$ при $|\mu|,\ |\lambda| \to \infty$ і які є еквівалентними до ієрархій рівнянь Лакса – Сато [5, 6, 8, 9, 16 – 18] для генеруючих потоків (1.23) і (1.22). Такі потоки можна інтерпретувати за допомогою класичного принципу Лагранжа – Даламбера [13] подібно до того, як це зроблено у статті [4].

За допомогою запропонованої Лі-алгебраїчної схеми можна побудувати широкий клас інтегровних багатовимірних систем „небесного” типу на функціональних просторах.

1.1. Приклад: нове модифіковане рівняння Михальова – Павлова у чотиривимірному просторі. Якщо породжуючий елемент $\tilde{a} \ltimes \tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}^*$ гамільтонових потоків на регулярному спряженому просторі $\tilde{\mathfrak{G}}^*$ вибрано у вигляді

$$\tilde{a} \ltimes \tilde{l} = ((u_x + v_x\lambda - \lambda^2)\partial/\partial x \ltimes (w_x + \zeta_x\lambda)dx), \tag{1.24}$$

де $u, v, w, \zeta \in C^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{T}^1; \mathbb{R})$, то асимптотичні розвинення координат градієнта відповідного єдиного функціонально незалежного інваріанта Казиміра $h \in I(\tilde{\mathfrak{G}}^*)$ при $|\lambda| \to \infty$ записуються так:

$$\begin{gathered}\nabla h_{\tilde{l}} \simeq 1 - v_x\lambda^{-1} - u_x\lambda^{-2} - v_z\lambda^{-3} - (u_z + v_xv_z - 2(\partial_x^{-1}v_{xx}v_z))\lambda^{-4} + \\ + v_y\lambda^{-5} - (-u_y - v_xv_y + 2(\partial_x^{-1}v_{xx}v_y))\lambda^{-6} + \ldots, \\ \nabla h_{\tilde{a}} \simeq -\zeta_x\lambda^{-1} - w_x\lambda^{-2} - \zeta_z\lambda^{-3} - (w_z - \zeta_xv_z + 2v_x\zeta_z + (\partial_x^{-1}v_x\zeta_x)_z)\lambda^{-4} + \\ + \zeta_y\lambda^{-5} - (-w_y + \zeta_xv_y - 2v_x\zeta_y + (\partial_x^{-1}v_x\zeta_x)_y)\lambda^{-6} + \ldots .\end{gathered}$$

У випадку, коли

$$\begin{gathered}\nabla h^{(y)}_{\tilde{l},+} := \lambda^4 - v_x\lambda^3 - u_x\lambda^2 - v_z\lambda - (u_z + v_xv_z - 2(\partial_x^{-1}v_{xx}v_z)), \\ \nabla h^{(y)}_{\tilde{a},+} := -\zeta_x\lambda^3 - w_x\lambda^2 - \zeta_z\lambda - (w_z - \zeta_xv_z + 2v_x\zeta_z - (\partial_x^{-1}v_x\zeta_x)_z)\end{gathered}$$

і

$$\begin{gathered}\nabla h^{(t)}_{\tilde{l},+} := \lambda^6 - v_x\lambda^5 - u_x\lambda^4 - v_z\lambda^3 - (u_z + v_xv_z - 2(\partial_x^{-1}v_{xx}v_z))\lambda^2 + \\ + v_y\lambda - (-u_y - v_xv_y + 2(\partial_x^{-1}v_{xx}v_y)), \\ \nabla h^{(t)}_{\tilde{a},+} := -\zeta_x\lambda^5 - w_x\lambda^4 - \zeta_z\lambda^3 - (w_z - \zeta_xv_z + 2v_x\zeta_z - (\partial_x^{-1}v_x\zeta_x)_z)\lambda^2 +\end{gathered}$$

$$+ \zeta_y\lambda - (-w_y + \zeta_x v_y - 2v_x\zeta_y + (\partial_x^{-1} v_x\zeta_x)_y),$$

умова комутування гамільтонових потоків (1.15) редукується до системи рівнянь

$$\begin{gathered}
u_{zt} + u_{yy} = -u_y u_{xz} + u_z u_{xy} - v_y v_{xy} + v_z v_{xt} - u_z v_y v_{xx} + u_y v_z v_{xx} - \\
- v_x^2 v_z v_{xy} + v_x^2 v_y v_{xz} - 2e u_{xy} - 2s u_{xz} + 2e_t - 2s_y + 2e v_y v_{xx} + 2s v_z v_{xx}, \\
v_{zt} + v_{yy} = -u_y v_{xz} + u_z v_{xy} - v_y u_{xz} + v_z u_{xy} - 2e v_{xy} - 2s v_{xz} - \\
- 2v_x v_y v_{xz} + 2v_x v_z v_{xy}, \\
-u_{xy} - u_{zz} = u_x u_{xz} - u_z u_{xx} - u_{xx} v_x v_z + u_x v_{xz} v_x - u_x v_{xx} v_z + \\
+ (v_x v_z)_z + 2u_{xx} e - 2e_z, \qquad (1.25) \\
-v_{xy} - v_{zz} = u_{xz} v_x - u_z v_{xx} - u_{xx} v_z + u_x v_{xz} - 2v_{xx} v_x v_z + v_x^2 v_{xz} + 2v_{xx} e, \\
-u_{xt} + u_{yz} = -u_x u_{xy} + u_y u_{xx} + u_{xx} v_x v_y - u_x v_{xy} v_x + u_x v_{xx} v_y - \\
- (v_x v_y)_z + 2u_{xx} s - 2s_z, \\
-v_{xt} + v_{yz} = -u_{xy} v_x + u_y v_{xx} + u_{xx} v_y - u_x v_{xy} + 2v_{xx} v_x v_y - v_x^2 v_{xy} + 2v_{xx} s, \\
e_x = v_{xx} v_z, \quad s_x = -v_{xx} v_y.
\end{gathered}$$

Наклавши редукцію $v = 0$, отримаємо набір незалежних диференціальних співвідношень, одержаних у працях [18 – 20]: два рівняння просторово чотиривимірні

$$u_{zt} + u_{yy} = -u_y u_{xz} + u_z u_{xy} \qquad (1.26)$$

і

$$-u_{xt} + u_{yz} = -u_x u_{xy} + u_y u_{xx} \qquad (1.27)$$

та одне просторово тривимірне

$$-u_{xy} - u_{zz} = u_x u_{xz} - u_z u_{xx}. \qquad (1.28)$$

Зокрема, при редукції незалежних просторових змінних $x \to y \in \mathbb{R}$, $t \to z \in \mathbb{R}$ рівняння (1.27) тривіалізується, а рівняння (1.26) і (1.28) зводяться до рівняння типу Михальова – Павлова

$$u_{zz} + u_{yy} = -u_y u_{yz} + u_z u_{yy}. \qquad (1.29)$$

Твердження 1.3. *Модифікована система рівнянь Михальова – Павлова* (1.25) *має векторно-польове зображення Лакса – Сато із „спектральним" параметром $\lambda \in \mathbb{C}$ і породжуючим елементом $\tilde{a} \ltimes \tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}^*$ у вигляді* (1.24).

Породжуючий елемент (1.24) можна записати у вигляді

$$\tilde{a} \ltimes \tilde{l} := \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} \ltimes d\tilde{\rho}, \quad \tilde{\eta} = u + v\lambda - \lambda^2 x, \quad \tilde{\rho} = w + \zeta\lambda, \qquad (1.30)$$

явно пов'язаному з простором модулів калібрувальних зв'язностей для коприєднаної дії відповідних інваріантів Казиміра. Це дозволяє побудувати багатовимірні узагальнення системи (1.30), вибравши породжуючий елемент у вигляді

$$\tilde{a} \ltimes \tilde{l} := \langle \nabla\tilde{\eta}, \nabla\rangle \ltimes d\tilde{\rho}, \tag{1.31}$$

де $\tilde{\eta}, \tilde{\rho} \in \Omega^0(\mathbb{T}^n) \otimes \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$. Випадок (1.31) буде проаналізовано у наступних публікаціях.

1.2. Приклад: нове модифіковане рівняння Мартінеса Алонсо – Шабата у п'ятивимірному просторі. Для породжуючого елемента $\tilde{a} \ltimes \tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}^*$ у вигляді

$$\begin{gathered}\tilde{a} \ltimes \tilde{l} = (((u_{x_1} + cu_{x_2}) + \lambda)\partial/\partial x_1 + ((v_{x_1} + cv_{x_2}) + c\lambda)\partial/\partial x_2)\ltimes \\ \ltimes((w_{x_1} + cw_{x_2})dx_1 + (\zeta_{x_1} + c\zeta_{x_2})dx_2),\end{gathered} \tag{1.32}$$

де $u, v, w, \zeta \in C^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{T}^2; \mathbb{R}),\ c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, отримуємо такі асимптотичні розвинення координат градієнтів відповідних двох незалежних інваріантів Казиміра $h^{(1)},\ h^{(2)} \in I(\tilde{\mathfrak{G}}^*)$ при $|\lambda| \to \infty$:

$$\nabla h^{(1)}_{\tilde{l}} \simeq \begin{pmatrix} 1 + (u_{x_1} + cu_{x_2})\lambda^{-1} - u_z\lambda^{-2} + \ldots \\ c + (v_{x_1} + cv_{x_2})\lambda^{-1} - v_z\lambda^{-2} + \ldots \end{pmatrix},$$

$$\nabla h^{(1)}_{\tilde{a}} \simeq \begin{pmatrix} (w_{x_1} + cw_{x_2})\lambda^{-1} - w_z\lambda^{-2} + \ldots \\ (\zeta_{x_1} + c\zeta_{x_2})\lambda^{-1} - \zeta_z\lambda^{-2} + \ldots \end{pmatrix}$$

і

$$\nabla h^{(2)}_{\tilde{l}} \simeq \begin{pmatrix} 1 + (u_{x_1} - cu_{x_2})\lambda^{-1} + \kappa\lambda^{-2} + \ldots \\ -c + (v_{x_1} - cv_{x_2})\lambda^{-1} + \omega\lambda^{-2} + \ldots \end{pmatrix},$$

$$\nabla h^{(2)}_{\tilde{a}} \simeq \begin{pmatrix} (w_{x_1} - cw_{x_2})\lambda^{-1} + \varrho\lambda^{-2} + \ldots \\ (\zeta_{x_1} - c\zeta_{x_2})\lambda^{-1} + \chi\lambda^{-2} + \ldots \end{pmatrix},$$

де

$$\begin{gathered}\kappa_{x_1} + c\kappa_{x_2} = -(u_{zx_1} - cu_{zx_2}) + 2c(u_{x_1}u_{x_1x_2} - u_{x_2}u_{x_1x_1} + v_{x_1}u_{x_2x_2} - v_{x_2}u_{x_1x_2}), \\ \omega_{x_1} + c\omega_{x_2} = -(v_{zx_1} - cv_{zx_2}) + 2c(u_{x_1}v_{x_1x_2} - u_{x_2}v_{x_1x_1} + v_{x_1}v_{x_2x_2} - v_{x_2}v_{x_1x_2})\end{gathered} \tag{1.33}$$

і

$$\begin{gathered}\varrho_{x_1} + c\varrho_{x_2} = -(w_{zx_1} - cw_{zx_2}) + 2c(u_{x_1}w_{x_1x_2} - u_{x_2}w_{x_1x_1} + 2w_{x_2}u_{x_1x_1} - \\ - 2w_{x_1}u_{x_1x_2} + v_{x_1}w_{x_2x_2} - v_{x_2}w_{x_1x_2} + w_{x_2}v_{x_1x_2} - w_{x_2}v_{x_2x_2} + \zeta_{x_2}v_{x_1x_1} - \zeta_{x_1}v_{x_1x_2}), \\ \chi_{x_1} + c\chi_{x_2} = -(\zeta_{zx_1} - c\zeta_{zx_2}) + 2c(v_{x_1}\zeta_{x_2x_2} - v_{x_2}\zeta_{x_1x_2} + 2\zeta_{x_2}v_{x_1x_2} - \\ - 2\zeta_{x_1}v_{x_2x_2} + u_{x_1}\zeta_{x_1x_2} - u_{x_2}\zeta_{x_1x_1} + \zeta_{x_2}u_{x_1x_1} - \zeta_{x_1}u_{x_1x_2} + w_{x_2}u_{x_1x_2} - w_{x_1}u_{x_2x_2}).\end{gathered}$$

Якщо

$$\nabla h^{(y)}_{\tilde{l},+} := \begin{pmatrix} \lambda^2 + (u_{x_1} + cu_{x_2})\lambda - u_z \\ c\lambda^2 + (v_{x_1} + cv_{x_2})\lambda - v_z \end{pmatrix},$$

$$\nabla h^{(y)}_{\tilde{a},+} := \begin{pmatrix} (w_{x_1} + cw_{x_2})\lambda - w_z \\ (\zeta_{x_1} + c\zeta_{x_2})\lambda - \zeta_z \end{pmatrix}$$

і

$$\nabla h^{(t)}_{\tilde{l},+} := \begin{pmatrix} \lambda^2 + (u_{x_1} - cu_{x_2})\lambda + \kappa \\ -c\lambda^2 + (v_{x_1} - cv_{x_2})\lambda + \omega \end{pmatrix},$$

$$\nabla h^{(t)}_{\tilde{a},+} := \begin{pmatrix} (w_{x_1} - cw_{x_2})\lambda + \varrho \\ (\zeta_{x_1} - c\zeta_{x_2})\lambda + \chi \end{pmatrix},$$

то умова комутування гамільтонових потоків (1.15) редукується до системи рівнянь „небесного” типу

$$\begin{aligned} u_{zt} + \kappa_y &= -u_{zx_1}\kappa - u_{zx_2}\omega + u_z\kappa_{x_1} + v_z\kappa_{x_2}, \\ v_{zt} + \omega_y &= -v_{zx_1}\kappa - v_{zx_2}\omega + u_z\omega_{x_1} + v_z\omega_{x_2}, \\ u_{yx_1} + cu_{yx_2} &= -(u_{x_1} + cu_{x_2})u_{zx_1} - (v_{x_1} + cv_{x_2})u_{zx_2} + (u_{x_1x_1} + cu_{x_1x_2})u_z + \\ &\quad + (u_{x_1x_2} + cu_{x_2x_2})v_z - u_{zz}, \\ v_{yx_1} + cv_{yx_2} &= -(u_{x_1} + cu_{x_2})v_{zx_1} - (v_{x_1} + cv_{x_2})v_{zx_2} + (v_{x_1x_1} + cv_{x_1x_2})u_z + \\ &\quad + (v_{x_1x_2} + cv_{x_2x_2})v_z - v_{zz}, \\ u_{tx_1} + cu_{tx_2} &= (u_{x_1} + cu_{x_2})\kappa_{x_1} + (v_{x_1} + cv_{x_2})\kappa_{x_2} - (u_{x_1x_1} + cu_{x_1x_2})\kappa - \\ &\quad - (u_{x_1x_2} + cu_{x_2x_2})\omega + \kappa_z, \\ v_{tx_1} + cv_{tx_2} &= (u_{x_1} + cu_{x_2})\omega_{x_1} + (v_{x_1} + cv_{x_2})\omega_{x_2} - (v_{x_1x_1} + cv_{x_1x_2})\kappa - \\ &\quad - (v_{x_1x_2} + cv_{x_2x_2})\omega + \omega_z. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Отже, справджується таке твердження.

Твердження 1.4. *Побудована система рівнянь „небесного” типу* (1.34), (1.33) *має векторно-польове зображення Лакса – Сато із „спектральним” параметром $\lambda \in \mathbb{C}$, яке пов'язане з елементом $\tilde{a} \ltimes \tilde{l} \in \tilde{\mathcal{G}}^*$ у вигляді* (1.32).

При $v = u,\ \omega = \kappa$ і $c = 1$ систему (1.34), (1.33) можна редукувати до такої:

$$\begin{aligned} u_{zt} + \kappa_y &= -(u_{zx_1} + u_{zx_2})\kappa + u_z(\kappa_{x_1} + \kappa_{x_2}), \\ \kappa_{x_1} + \kappa_{x_2} &= -(u_{zx_1} - u_{zx_2}) - 2((u_{x_1}u_{x_2})_{x_1} - (u_{x_1}u_{x_2})_{x_2}). \end{aligned} \tag{1.35}$$

Додаткові в'язі $u_z = u_{x_1} + u_{x_2}$ для (1.35) приводять до системи

$$\begin{aligned} (u_{\tilde{t}x_1} + u_{\tilde{t}x_2}) - (u_{\tilde{y}x_1} - u_{\tilde{y}x_2}) &= u_{x_1x_2}(u_{x_1} - u_{x_2}) - u_{x_1x_1}u_{x_2} + u_{x_2x_2}u_{x_1} - \\ &\quad - u_{x_1x_2}(u_{x_1}^2 - u_{x_2}^2) - u_{x_1x_1}u_{x_2}(u_{x_1} + u_{x_2}) + u_{x_2x_2}u_{x_1}(u_{x_1} + u_{x_2}) - \\ &\quad - 2\rho_{\tilde{y}} + (u_{x_1x_1} + 2u_{x_1x_2} + u_{x_2x_2})\rho, \\ \rho_{x_1} + \rho_{x_2} &= (u_{x_1}u_{x_2})_{x_1} - (u_{x_1}u_{x_2})_{x_2}, \end{aligned}$$

де $\tilde{t} = 2t,\ \tilde{y} = 2y$, яку можна розглядати як деяку модифікацію системи рівнянь „небесного” типу Мартінеса Алонсо – Шабата [21].

2. Багатовимірні системи „небесного” типу: узагальнені Лі-алгебраїчні структури. Для подальшого узагальнення Лі-алгебраїчної схеми, пов'язаної з петельною групою $\widetilde{\mathrm{Diff}}(\mathbb{T}^n)$ на торі $\mathbb{T}^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, можна використати підхід, який раніше розглядався у статті [5].

Оскільки алгебру Лі $\widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^n)$ утворюють елементи петельної групи, аналітично продовжені з кола $\mathbb{S}^1 := \partial\mathbb{D}^1$, який є межею центрального одиничного диска $\mathbb{D}^1 \subset \mathbb{C}$, за допомогою комплексної „спектральної” змінної $\lambda \in \mathbb{C}$ як у внутрішню $\mathbb{D}^1_+ \subset \mathbb{C}$, так і зовнішню $\mathbb{D}^1_- \subset \mathbb{C}$ області диска $\mathbb{D}^1 \subset \mathbb{C}$, то вона є аналітично інваріантною щодо групи дифеоморфізмів кола $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$. Ця властивість дозволяє розглядати розширену алгебру Лі $\mathrm{diff}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{C}) = \widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^n \times \times \mathbb{D}^1_+) \oplus \widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{D}^1_-)$ голоморфних векторних полів на декартовому добутку $\mathbb{T}^n_{\mathbb{C}} := \mathbb{D}^1_\pm \times \mathbb{T}^n$, елементами якої є векторні поля у вигляді

$$\bar{a}(x;\lambda) := a_0(x;\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda} + \left\langle a(x;\lambda), \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\right\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j(x;\lambda)\frac{\partial}{\partial x_j},$$

де $x \in \mathbb{T}^n$, $a(\lambda;x) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}^n$ — вектори на $\mathbb{E} \times \mathbb{E}^n$, голоморфні щодо $\lambda \in \mathbb{D}^1_\pm$, а також

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} := \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\intercal}$$

позначає оператор градієнта в евклідовому просторі $\mathbb{E} \times (\mathbb{E}^n; \langle\cdot,\cdot\rangle)$ щодо векторної змінної $\mathrm{x} := (\lambda, x) \in \mathbb{T}^n_{\mathbb{C}}$.

Розглянемо напівпряму суму $\bar{\mathcal{G}} := \mathrm{diff}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{C}) \ltimes \mathrm{diff}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{C})^*$ петельної алгебри Лі $\mathrm{diff}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{C})$ та її регулярного спряженого простору $\mathrm{diff}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{C})^*$ щодо згортки:

$$(\bar{l}|\bar{a}) := \operatorname*{res}_{\lambda\in\mathbb{C}} (l(\mathrm{x})|a(\mathrm{x}))_{H^0}$$

для будь-яких $\bar{l} \in \mathrm{diff}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{C})^*$ й $\bar{a} \in \mathrm{diff}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{C})$. Тут кожний елемент $\bar{l} \in \mathrm{diff}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{C})^*$ має вигляд

$$\bar{l} := \langle l(x;\lambda), d\mathrm{x}\rangle = l_0(x;\lambda)d\lambda + \sum_{j=1}^{n} l_j(x;\lambda)dx_j.$$

Комутатор на петельній алгебрі Лі $\bar{\mathcal{G}}$ для будь-яких її елементів $\bar{a}_1 \ltimes \bar{l}_1,\ \bar{a}_2 \ltimes \bar{l}_2 \in \bar{\mathcal{G}}$ задається правилом

$$[\bar{a}_1 \ltimes \bar{l}_1, \bar{a}_2 \ltimes \bar{l}_2] := [\bar{a}_1, a_2] \ltimes ad^*_{a_1}\bar{l}_2 - ad^*_{a_2}\bar{l}_1.$$

Розбиття алгебри Лі $\bar{\mathcal{G}}$ на пряму суму двох підалгебр Лі: $\bar{\mathcal{G}} = \bar{\mathcal{G}}_+ \oplus \bar{\mathcal{G}}_-$ дозволяє побудувати R-деформований комутатор

$$[\bar{a}_1 \ltimes \bar{l}_1, \bar{a}_2 \ltimes \bar{l}_2]_R := [R(\bar{a}_1 \ltimes \bar{l}_1), \qquad \bar{a}_2 \ltimes \bar{l}_2\ ] + [\ \bar{a}_1 \ltimes \bar{l}_1, R(\bar{a}_2 \ltimes \bar{l}_2)],$$

де $\bar{a}_1 \ltimes \bar{l}_1,\ \bar{a}_2 \ltimes \bar{l}_2 \in \bar{\mathcal{G}},\ R := (P_+ - P_-)/2$ і $P_\pm\bar{\mathcal{G}} := \bar{\mathcal{G}}_\pm \subset \bar{\mathcal{G}}$.

На алгебрі Лі $\bar{\mathcal{G}}$ можна ввести ad-інваріантний невироджений скалярний добуток

$$(\bar{a} \ltimes \bar{l}|\bar{r} \ltimes \bar{m}) := \operatorname*{res}_{\lambda\in\mathbb{C}} (\bar{a} \ltimes \bar{l}|\bar{r} \ltimes \bar{m})_{H^0},$$

де, за означенням,

$$(\bar{a} \ltimes \bar{l}|\bar{r} \ltimes \bar{m})_{H^0} = (\bar{m}|\bar{a})_{H^0} + (\bar{l}|\bar{r})_{H^0} \tag{2.1}$$

для будь-якої пари елементів $\bar{a} \ltimes \bar{l}$, $\bar{r} \ltimes \bar{m} \in \bar{\mathcal{G}}$, за допомогою якого можна ототожнити її регулярний спряжений простір $\bar{\mathcal{G}}^*$ із самою алгеброю Лі: $\bar{\mathcal{G}}^* \simeq \bar{\mathcal{G}}$.

Для довільних гладких функціоналів $f, g \in \mathrm{D}(\bar{\mathcal{G}}^*)$ можна побудувати дві дужки Лі – Пуассона:

$$\{f, g\} := (\bar{a} \ltimes \bar{l}|[\nabla f(\bar{l}; \bar{a}), \nabla g(\bar{l}; \bar{a})])$$

і

$$\{f, g\}_R := (\bar{a} \ltimes \bar{l}|[\nabla f(\bar{l}; \bar{a}), \nabla g(\bar{l}; \bar{a})]_R), \tag{2.2}$$

де $\nabla f(\bar{l}; \bar{a}) := \nabla f_{\bar{l}} \ltimes \nabla f_{\bar{a}} \simeq \langle \nabla f(l; a), (\partial/\partial \mathrm{x}, d\mathrm{x})^{\intercal} \rangle \in \bar{\mathcal{G}}$ і $\nabla g(\bar{l}; \bar{a}) := \nabla g_{\bar{l}} \ltimes \nabla g_{\bar{a}} \simeq \langle \nabla g(l; a), (\partial/\partial \mathrm{x}, d\mathrm{x})^{\intercal} \rangle \in \bar{\mathcal{G}}^*$ — градієнти функціоналів $f, g \in \mathrm{D}(\bar{\mathcal{G}}^*)$ щодо скалярного добутку (2.1) у точці $\bar{a} \ltimes \bar{l} \in \bar{\mathcal{G}}^* \simeq \bar{\mathcal{G}}$. Тут $\nabla f_{\bar{l}} = \langle \nabla f_l, \partial/\partial \mathrm{x} \rangle$, $\nabla f_{\bar{a}} = \langle \nabla f_a, d\mathrm{x} \rangle$ і $\nabla g_{\bar{l}} = \langle \nabla g_l, \partial/\partial \mathrm{x} \rangle$, $\nabla g_{\bar{a}} = \langle \nabla g_a, d\mathrm{x} \rangle$.

Нехай гладкий функціонал $h \in I(\bar{\mathcal{G}}^*)$ є інваріантом Казиміра, тобто

$$ad^*_{\nabla h(\bar{l}, \bar{a})}(\bar{a} \ltimes \bar{l}) = 0 \tag{2.3}$$

для вибраного елемента $\bar{a} \ltimes \bar{l} \in \bar{\mathcal{G}}^* \simeq \bar{\mathcal{G}}$. Оскільки для будь-якого елемента $\bar{a} \ltimes \bar{l} \in \bar{\mathcal{G}}^* \simeq \bar{\mathcal{G}}$ і довільного гладкого функціонала $f \in \mathrm{D}(\bar{\mathcal{G}}^*)$ коприєднане відображення має вигляд

$$ad^*_{\nabla f(\bar{l}, \bar{a})}(\bar{a} \ltimes \bar{l}) = ([\nabla h_{\tilde{l}}, \tilde{a}] \ltimes (ad^*_{\nabla h_{\tilde{l}}} \tilde{l} + ad^*_{\tilde{a}} \nabla h_{\tilde{a}}),$$

умову (2.3) записуємо так:

$$[\nabla h_{\tilde{l}}, \tilde{a}] = 0, \qquad ad^*_{\nabla h_{\tilde{l}}} \tilde{l} - ad^*_{\tilde{a}} \nabla h_{\tilde{a}} = 0.$$

При цьому інваріант Казиміра $h \in I(\bar{\mathcal{G}}^*)$ задовольняє систему рівнянь

$$\begin{gathered} \langle \nabla h_l, \partial/\partial \mathrm{x} \rangle a - \langle a, \partial/\partial \mathrm{x} \rangle \nabla h_l = 0, \\ \langle \partial/\partial \mathrm{x}, \circ \nabla h_l \rangle l + \langle l, (\partial/\partial \mathrm{x} \nabla h_l) \rangle + \\ + \langle \partial/\partial \mathrm{x}, \circ a \rangle \nabla h_a + \langle a, (\partial/\partial \mathrm{x} \nabla h_a) \rangle = 0. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Для будь-якого інваріанта Казиміра $h \in \mathrm{D}(\bar{\mathcal{G}}^*)$ систему рівнянь (2.4) можна розв'язати аналітично. Якщо елемент $\bar{l} \ltimes \bar{a} \in \bar{\mathcal{G}}^*$ має особливість при $|\lambda| \to \infty$, то для кожного $p \in \mathbb{Z}_+$ цей розв'язок знаходимо з використанням асимптотичного розвинення

$$\nabla h^{(p)}(l; a) \sim \lambda^p \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} (\nabla h^{(p)}_{l;j}; \nabla h^{(p)}_{a;j}) \lambda^{-j}, \tag{2.5}$$

яке потрібно підставити у систему рівнянь (2.4). Тобто асимптотичні розв'язки системи (2.4) можна отримати за допомогою рекурентних співвідношень.

Далі будемо вважати, що для деяких інволютивних щодо дужки Лі – Пуассона (2.2) інваріантів Казиміра $h^{(y)}, h^{(t)} \in I(\bar{\mathcal{G}}^*)$ генератори гамільтонових векторних полів вибрано у вигляді

$$\nabla h^{(y)}(\bar{l}; \bar{a})_+ := (\nabla h^{(p_y)}(\bar{l}; \bar{a}))_+, \qquad \nabla h^{(t)}(\bar{l}; \bar{a})_+ := (\nabla h^{(p_t)}(\bar{l}; \bar{a}))_+, \tag{2.6}$$

де $\nabla h^{(y)}(\bar{l};\bar{a})_+ := (\nabla h^{(y)}_{\bar{l},+} \ltimes \nabla h^{(y)}_{\bar{a},+}) \in \bar{\mathcal{G}}_+$, $\nabla h^{(t)}(\bar{l};\bar{a})_+ := (\nabla h^{(t)}_{\bar{l},+} \ltimes \nabla h^{(t)}_{\bar{a},+}) \in \bar{\mathcal{G}}_+$, $p^{(y)}, p^{(t)} \in \mathbb{Z}_+$. Ці інваріанти за допомогою дужки Лі–Пуассона (2.2) породжують комутуючі гамільтонові потоки

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(\bar{a} \ltimes \bar{l}) &= -ad^*_{\nabla h^{(y)}(\bar{l},\bar{a})_+}(\bar{a} \ltimes \bar{l}), \\ \frac{\partial}{\partial t}(\bar{a} \ltimes \bar{l}) &= -ad^*_{\nabla h^{(t)}(\bar{l},\bar{a})_+}(\bar{a} \ltimes \bar{l}) \end{aligned} \tag{2.7}$$

для будь-якого елемента $\bar{a} \ltimes \bar{l} \in \bar{\mathcal{G}}^* \simeq \bar{\mathcal{G}}$ щодо еволюційних параметрів $y, t \in \mathbb{R}$. Побудовані потоки (2.6) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \partial a/\partial y &= -\left\langle \nabla h^{(y)}_l, \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \right\rangle a + \left\langle a, \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \right\rangle \nabla h^{(y)}_l, \\ \partial a/\partial t &= -\left\langle \nabla h^{(t)}_l, \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \right\rangle a + \left\langle a, \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \right\rangle \nabla h^{(t)}_l \end{aligned} \tag{2.8}$$

і

$$\begin{aligned} \partial l/\partial y = &-\left\langle \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}, \nabla h^{(y)}_l \right\rangle l - \left\langle l, \left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \nabla h^{(y)}_l \right) \right\rangle + \\ &+ \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}, a \right\rangle \nabla h^{(y)}_a + \left\langle a, \left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \nabla h^{(y)}_a \right) \right\rangle, \\ \partial l/\partial t = &-\left\langle \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}, \nabla h^{(t)}_l \right\rangle l - \left\langle l, \left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \nabla h^{(t)}_l \right) \right\rangle + \\ &+ \left\langle \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}, a \right\rangle \nabla h^{(t)}_a + \left\langle a, \left(\frac{\partial}{\partial x} \nabla h^{(t)}_a \right) \right\rangle. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Умова комутування потоків (2.6) еквівалентна системі рівностей

$$[\nabla h^{(y)}_{\bar{l},+}, \nabla h^{(t)}_{\bar{l},+}] - \frac{\partial}{\partial t} \nabla h^{(y)}_{\bar{l},+} + \frac{\partial}{\partial y} \nabla h^{(t)}_{\bar{l},+} = 0 \tag{2.10}$$

і

$$\begin{gathered} ad^*_{\bar{a}} \bar{P} = 0, \\ \bar{P} = ad^*_{\nabla h^{(y)}_{\bar{l},+}}(\nabla h^{(t)}_{\bar{a},+}) - ad^*_{\nabla h^{(t)}_{\bar{l},+}}(\nabla h^{(y)}_{\bar{a},+}) - \frac{\partial}{\partial t} \nabla h^{(y)}_{\bar{a},+} + \frac{\partial}{\partial y} \nabla h^{(t)}_{\bar{a},+}, \end{gathered}$$

де $\bar{a} \ltimes \bar{l} \in \bar{\mathcal{G}}$. Крім того, рівність (2.10) є умовою сумісності трьох лінійних векторно-польових рівнянь

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} + \nabla h^{(y)}_{\bar{l},+} \psi = 0, \quad \langle a, \partial/\partial \mathrm{x} \rangle \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla h^{(t)}_{\bar{l},+} \psi = 0 \tag{2.11}$$

для деякої функції $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^n_{\mathbb{C}}; \mathbb{C})$, усіх $y, t \in \mathbb{R}$ і будь-якого $\mathrm{x} \in \mathbb{T}^n_{\mathbb{C}}$. Отримані результати можна сформулювати у вигляді такого твердження.

Твердження 2.1. *Нехай $h^{(y)}, h^{(t)} \in I(\bar{\mathcal{G}}^*)$ — деякі інваріанти Казиміра для петельної алгебри Лі $\bar{\mathcal{G}}$ щодо скалярного добутку $(\cdot,\cdot)$ у точці $\bar{a} \ltimes \bar{l} \in \bar{\mathcal{G}}^*$ регулярного спряженого простору $\bar{\mathcal{G}}^* \simeq \bar{\mathcal{G}}$ цієї алгебри Лі. Тоді еволюції* (2.7) *на $\bar{\mathcal{G}}^*$ є комутуючими гамільтоновими потоками, еквівалентними системі еволюційних рівнянь* (2.8), (2.9). *Умова комутування еволюційних рівнянь* (2.8) *є умовою сумісності трьох лінійних векторно-польових рівнянь* (2.11).

Зауважимо, що у випадку, коли породжуючий елемент $\bar{a} \ltimes \bar{l} \in \bar{\mathcal{G}}^*$ сингулярний при $|\lambda| \to 0$, асимптотичне розвинення (2.5) потрібно замінити формулою

$$\nabla h^{(p)}(\bar{l},\bar{a}) \sim \lambda^{-p} \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \nabla h_j^{(p)}(\bar{l},\bar{a})\lambda^j$$

для кожного $p \in \mathbb{Z}_+$. Відповідні комутуючі гамільтонові потоки для вибраних цілих чисел $p_y, p_t \in \mathbb{Z}_+$ мають вигляд

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{a} \ltimes \bar{l}) = ad^*_{\nabla h^{(t)}(\bar{l},\bar{a})_-}(\bar{a} \ltimes \bar{l}), \quad \frac{\partial}{\partial y}(\bar{a} \ltimes \bar{l}) = ad^*_{\nabla h^{(y)}(\bar{l},\bar{a})_-}(\bar{a} \ltimes \bar{l}),$$

де

$$\nabla h^{(y)}(\bar{l},\bar{a})_- := \lambda(\lambda^{-p_y-1}\nabla h^{(p_y)}(\bar{l},\bar{a}))_-, \quad \nabla h^{(t)}(\bar{l},\bar{a})_- := \lambda(\lambda^{-p_t-1}\nabla h^{(p_t)}(\bar{l},\bar{a}))_-,$$

а також $y, t \in \mathbb{R}$.

Подібно до того, як це зроблено у пункті 3, розглянемо центральне розширення точкового добутку $\bar{\mathcal{G}}^{\mathbb{S}^1} := \prod_{z\in\mathbb{S}^1} \bar{\mathcal{G}}$ голоморфної петельної алгебри Лі $\bar{\mathcal{G}}$ 2-коциклом Маурера – Картана $\bar{\omega}_2 : \bar{\mathcal{G}} \times \bar{\mathcal{G}} \to \mathbb{C}$ у вигляді

$$\bar{\omega}_2(\bar{a}_1 \ltimes \bar{l}_1, \bar{a}_2 \ltimes \bar{l}_2) := \int_{\mathbb{S}^1} [(\bar{l}_1, \partial\bar{a}_2/\partial z)_1 - (\bar{l}_2, \partial\bar{a}_1/\partial z)_1],$$

де $\bar{a}_1 \ltimes \bar{l}_1, \bar{a}_2 \ltimes \bar{l}_2 \in \bar{\mathcal{G}}$.

$\mathcal{R}$-деформована дужка Лі – Пуассона для будь-яких гладких функціоналів $h, f \in D(\bar{\mathfrak{G}}^*)$ на регулярному спряженому просторі $\bar{\mathfrak{G}}^*$ до центрально розширеної голоморфної петельної алгебри Лі $\bar{\mathfrak{G}} := \bar{\mathcal{G}} \oplus \mathbb{C}$ записується так:

$$\begin{aligned}\{h,f\}_{\mathcal{R}} &:= (\bar{a} \ltimes \bar{l}, [\nabla h(\bar{l},\bar{a}), \nabla f(\bar{l},\bar{a})]_{\mathcal{R}}) + \\ &+ \bar{\omega}_2(\mathcal{R}\nabla h(\bar{l},\bar{a}), \nabla f(\bar{l},\bar{a})) + \bar{\omega}_2(\nabla h(\bar{l},\bar{a}), \mathcal{R}\nabla f(\bar{l},\bar{a})).\end{aligned} \tag{2.12}$$

Відповідні інваріанти Казиміра $h^{(p)} \in I(\bar{\mathfrak{G}}^*)$, $p \in \mathbb{Z}_+$, визначаються за допомогою стандартної дужки Лі – Пуассона таким чином:

$$\{h^{(p)}, f\} := (\bar{a} \ltimes \bar{l}, [\nabla h^{(p)}(\bar{l},\bar{a}), \nabla f(\bar{l},\bar{a})]) + \bar{\omega}_2(\nabla h^{(p)}(\bar{l},\bar{a}), \nabla f(\bar{l},\bar{a})) = 0$$

для будь-якого гладкого функціонала $f \in D(\bar{\mathfrak{G}}^*)$.

З рівності (1.18) випливає, що градієнти $\nabla h^{(p)} \in \bar{\mathcal{G}}$ інваріантів Казиміра $h^{(p)} \in I(\bar{\mathfrak{G}}^*)$, $p \in \mathbb{Z}_+$, задовольняють рівняння

$$[\nabla h_{\bar{l}}, \bar{a}] - \frac{\partial}{\partial z}\nabla h_{\bar{l}} = 0, \quad ad^*_{\nabla h_{\bar{l}}}\bar{l} - ad^*_{\bar{a}}\nabla h_{\bar{a}} - \frac{\partial}{\partial z}\nabla h_{\bar{a}} = 0$$

у точці $\bar{a} \ltimes \bar{l} \in \bar{\mathcal{G}}^*$.

Для деяких інваріантів Казиміра $h^{(y)}, h^{(t)} \in I(\bar{\mathfrak{G}}^*)$ побудуємо за допомогою дужки Лі–Пуассона (2.12) комутуючі гамільтонові потоки на $\bar{\mathfrak{G}}^*$:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\bar{a} \ltimes \bar{l}) = \{\bar{a} \ltimes \bar{l}, h^{(y)}\}_{\mathcal{R}}, \quad \frac{\partial}{\partial t}(\bar{a} \ltimes \bar{l}) = \{\bar{a} \ltimes \bar{l}, h^{(t)}\}_{\mathcal{R}}, \tag{2.13}$$

які еквівалентні еволюційним рівнянням

$$\frac{\partial}{\partial y}\bar{a} \ = -[\nabla h^{(y)}_{\bar{l},+}, \bar{a}] + \frac{\partial}{\partial z}\nabla h^{(y)}_{\bar{l},+}, \quad \frac{\partial}{\partial t}\bar{a} \ = -[\nabla h^{(t)}_{\bar{l},+}, \bar{a}] + \frac{\partial}{\partial z}\nabla h^{(t)}_{\bar{l},+} \tag{2.14}$$

і

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\bar{l} &= -ad^*_{\nabla h^{(y)}_{\bar{l},+}}\bar{l} + ad^*_{\bar{a}}(\nabla h^{(y)}_{\bar{a},+}) + \frac{\partial}{\partial z}\nabla h^{(y)}_{\bar{a},+}, \\ \frac{\partial}{\partial t}\bar{l} &= -ad^*_{\nabla h^{(t)}_{\bar{l},+}}\bar{l} + ad^*_{\bar{a}}(\nabla h^{(t)}_{\bar{a},+}) + \frac{\partial}{\partial z}\nabla h^{(t)}_{\bar{a},+}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Умова комутування цих потоків еквівалентна системі рівнянь

$$\left[\nabla h^{(y)}_{\bar{l},+}, \nabla h^{(t)}_{\bar{l},+}\right] - \frac{\partial}{\partial t}\nabla h^{(y)}_{\bar{l},+} + \frac{\partial}{\partial y}\nabla h^{(t)}_{\bar{l},+} = 0 \tag{2.16}$$

і

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + ad^*_{\bar{a}}\bar{P} = 0,$$

$$\bar{P} = ad^*_{\nabla h^{(y)}_{\bar{l},+}}(\nabla h^{(t)}_{\bar{a},+}) - ad^*_{\nabla h^{(t)}_{\bar{l},+}}(\nabla h^{(y)}_{\bar{a},+}) - \frac{\partial}{\partial t}\nabla h^{(y)}_{\bar{a},+} + \frac{\partial}{\partial y}\nabla h^{(t)}_{\bar{a},+}$$

для будь-якого $\bar{a} \ltimes \bar{l} \in \bar{\mathcal{G}}$.

Отже, справджується таке твердження.

Твердження 2.2. *Гамільтонові потоки* (2.13) *на регулярному спряженому просторі* $\bar{\mathfrak{G}}^*$ *породжують системи комутуючих еволюційних рівнянь* (2.14), (2.15). *Умова комутування еволюційних рівнянь* (2.14) *еквівалентна зображенню Лакса – Сато* (2.16) *для деякої системи нелінійних рівнянь з частинними похідними „небесного” типу і є умовою сумісності трьох лінійних векторно-польових рівнянь*

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} + \nabla h^{(y)}_{\bar{l},+}\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} + \langle a, \partial/\partial \mathrm{x}\rangle\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla h^{(t)}_{\bar{l},+}\psi = 0$$

для всіх $(y, t, z; \mathrm{x}) \in (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1) \times \mathbb{T}^n_{\mathbb{C}}$ *і деякої функції* $\psi \in C^2((\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1) \times \mathbb{T}^n_{\mathbb{C}}; \mathbb{C})$.

2.1. Приклад: нове узагальнене рівняння Михальова – Павлова у чотиривимірному просторі. Якщо породжуючий елемент $\bar{a} \ltimes \bar{l} \in \bar{\mathcal{G}}^*$ вибрано у вигляді

$$\bar{a} \ltimes \bar{l} = ((u_x - \lambda)\partial/\partial x + v_x\partial/\partial\lambda) \ltimes (w_x dx + \xi_x d\lambda), \tag{2.17}$$

де $u, v, w, \xi \in C^2(\mathbb{R}^2 \times (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{T}^1); \mathbb{R})$, то асимптотичні розвинення координат градієнтів інваріантів Казиміра $h^{(p)} \in I(\bar{\mathfrak{G}}^*)$, $p \in \mathbb{Z}_+$, при $|\lambda| \to \infty$ записуються так:

$$\nabla h_{\tilde{l}} \simeq \lambda^p \begin{pmatrix} 1 - u_x\lambda^{-1} + (-u_z + (p-1)v)\lambda^{-2} + (u_y + (p-2)(-u_x v + \kappa))\lambda^{-3} + \ldots \\ -v_x\lambda^{-1} - v_z\lambda^{-2} + (v_y - (p-2)v_x v)\lambda^{-3} + \ldots \end{pmatrix},$$

$$\nabla h_{\tilde{a}} \simeq \lambda^p \begin{pmatrix} -w_x\lambda^{-1} - w_z\lambda^{-2} + (w_y - (p-2)(wv)_x)\lambda^{-3} + \ldots \\ -\xi_x\lambda^{-1} - (\xi_z + (p-1)w)\lambda^{-2} + (\xi_y - (p-2)(-u_x w + v\xi_x + \omega))\lambda^{-3} + \ldots \end{pmatrix},$$

де $p \in \mathbb{Z}_+$, а також

$$\kappa_x = v_z + u_x v_x, \quad \omega_x = w_z - u_x w_x - v_x \xi_x. \tag{2.18}$$

У випадку, коли

$$\nabla h^{(y)}_{\tilde{l},+} := \begin{pmatrix} \lambda^2 - u_x\lambda + (-u_z + v) \\ -v_x\lambda - v_z \end{pmatrix},$$

$$\nabla h^{(y)}_{\tilde{a},+} := \begin{pmatrix} -w_x\lambda - w_z \\ -\xi_x\lambda - (\xi_z + w) \end{pmatrix}$$

і

$$\nabla h^{(t)}_{\tilde{l},+} := \begin{pmatrix} \lambda^3 - u_x\lambda^2 + (-u_z + 2v)\lambda + (u_y - u_x v + \kappa) \\ -v_x\lambda^2 - v_z\lambda + (v_y - v_x v) \end{pmatrix},$$

$$\nabla h^{(t)}_{\tilde{a},+} := \begin{pmatrix} -w_x\lambda^2 - w_z\lambda + (w_y - (wv)_x) \\ -\xi_x\lambda^2 - (\xi_z + 2w)\lambda + (\xi_y + u_x w - v\xi_x - \omega) \end{pmatrix},$$

умова комутування гамільтонових потоків (2.13) редукується до системи еволюційних рівнянь

$$\begin{gathered} u_{zt} + u_{yy} = -u_y u_{zx} + u_z u_{xy} - u_{xy} v - u_{zz} v - \kappa u_{xz}, \\ v_{zt} + v_{yy} = v v_x^2 - v_z^2 - v v_{xy} - v v_{zz} - u_y v_{xz} + u_z v_{xy} - u_z v_x^2 - \kappa v_{xz}, \\ -u_{xy} - u_{zz} = u_x u_{xz} - u_z u_{xx} + u_{xx} v, \\ -v_{xy} - v_{zz} = v_x^2 + v_{xx} v + u_x v_{xz} - u_z v_{xx}, \\ -u_{xt} + u_{yz} = -u_x u_{xy} + u_y u_{xx} + u_{xz} v + u_{xx}\kappa, \\ -v_{xt} + v_{yz} = -u_x v_{xy} + u_y v_{xx} + u_x v_x^2 + v_{xz} v + \kappa v_{xx} + 2 v_x v_z. \end{gathered} \tag{2.19}$$

При $v = 0$ знову отримуємо систему (1.29).

Отже, справджується таке твердження.

Твердження 2.3. *Узагальнена система Михальова – Павлова* (2.19), (2.18) *має векторно-польове зображенням Лакса – Сато* (2.16) *із „спектральним" параметром* $\lambda \in \mathbb{C}$, *яке породжене елементом* $\bar{a} \ltimes \bar{l} \in \bar{\mathcal{G}}^*$ *у вигляді* (2.17).

Елемент (2.17) можна записати у вигляді

$$\tilde{a} \ltimes \tilde{l} := \left(\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\xi}_0}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \ltimes \left(d_x \tilde{\rho} + \frac{\partial \tilde{\rho}_0}{\partial \lambda} \right),$$

$$\tilde{\eta} = u - \lambda x, \quad \tilde{\eta}_0 = \lambda v_x, \quad \tilde{\rho} = w, \quad \tilde{\rho}_0 = \lambda \xi_x,$$

де $d := d_x + d_\lambda$, який пов'язаний із геометрією простору модулів калібрувальних зв'язностей, що відповідають коприєднаним діям інваріантів Казиміра.

За допомогою елемента $\tilde{a} \ltimes \tilde{l} \in \bar{\mathcal{G}}^*$ у вигляді

$$\tilde{a} \ltimes \tilde{l} := \left(\langle \nabla_x \tilde{\eta}, \nabla_x \rangle + \frac{\partial \tilde{\eta}_0}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \ltimes \left(d_x \tilde{\rho} + \frac{\partial \tilde{\rho}_0}{\partial \lambda} \right),$$

де $\tilde{\eta}, \tilde{\eta}_0, \tilde{\rho}, \tilde{\rho}_0 \in \Omega^0(\mathbb{T}^n) \otimes \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N},\ N > 2$, можна отримати інтегровний за Лаксом – Сато багатовимірний аналог узагальненої системи Михальова – Павлова (2.19), (2.18) у $(n+3)$-вимірному просторі, де $n > 2$. Цей випадок буде розглянуто у подальших публікаціях.

3. Висновки. Наведено огляд диференціально-геометричних та Лі-алгебраїчних підходів до конструювання інтегровних за Лаксом – Сато диференціальних систем рівнянь „небесного” типу, що ґрунтуються на розвитку конструкції Адлера – Костанта – Саймза та асоційованих з нею R-операторних структур. Запропоновано розвиток цієї конструкції на випадок центральних розширень петельних алгебр Лі $\tilde{\mathcal{G}} := \widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^n) \ltimes \widetilde{\mathrm{diff}}(\mathbb{T}^n)^*$ та їхніх голоморфних розширень $\bar{\mathcal{G}} := \mathrm{diff}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{C}) \ltimes \mathrm{diff}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{C})^*$. В межах розвинутого підходу відповідні системи рівнянь „небесного” типу виникають з умови комутування двох гамільтонових потоків на регулярних спряжених просторах до цих алгебр Лі як однопараметричні орбіти коприєднаної дії голоморфної групи дифеоморфізмів. Зокрема, розв'язки таких систем можна знайти в багатьох випадках за допомогою відповідної версії методу оберненої задачі розсіяння [7]. Використання цього підходу дозволило отримати інтегровні за Лаксом – Сато модифіковану й узагальнену „небесні” системи Михальова – Павлова у чотиривимірному просторі, модифіковану „небесну” систему Мартінеса Алонсо – Шабата у п'ятивимірному просторі та відповідні ієрархії законів збереження, а також розглянути можливість побудови їхніх інтегровних аналогів у просторах вищої розмірності. Крім того, на основі запропонованого авторами підходу можна знайти гамільтонові зображення для побудованих „небесних” систем як результат редукування R-деформованих дужок Лі – Пуассона на фазовий простір породжуючого елемента. Це буде предметом наших подальших досліджень.

Автори статті вдячні М. Блашаку, Є. Цєслінському та Б. Шабліковському за корисне обговорення результатів статті під час симпозіуму „Інтегровні системи” (29 – 30 червня 2018 р., Познань (Польща)) та Дж. Голдіну й А. Одзієвичу за конструктивні коментарі та зауваження під час XXXVII Міжнародного семінару з геометричних методів у фізиці (30 червня – 7 липня 2019 р., Бяловєжа (Польща)).

Література

1. V. Ovsienko, C. Roger, *Looped cotangent Virasoro algebra and non-linear integrable systems in dimension* $2+1$, Commun. Math. Phys., **273**, № 2, 357 – 378 (2007).
2. V. Ovsienko, *Bi-Hamiltonian nature of the equation* $u_{tx} = u_{xy}u_y - u_{yy}u_x$, Adv. Pure and Appl. Math., **1**, № 1, 7 – 10 (2008); arXiv:0802.1818v1 (2008).
3. A. Sergyeyev, B. M. Szablikowski, *Central extensions of cotangent universal hierarchy:* $(2+1)$*-dimensional bi-Hamiltonian systems*, Phys. Lett. A, **372**, № 47, 7016 – 7023 (2008).
4. A. K. Prykarpatski, O. Ye. Hentosh, Ya. A. Prykarpatsky, *The differential-geometric and algebraic aspects of the Lax – Sato theory*, Mathematics, **5**, № 4, MDPI, Basel, Switzerland (2017).

5. O. Ye. Hentosh, Ya. A. Prykarpatsky, D. Blackmore, A. K. Prykarpatski, *Dispersionless completely integrable heavenly type Hamiltonian flows and their differential-geometric structure*, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Appl., **15**, Article 079 (2019); https://doi.org/10.3842/SIGMA.2019.079.
6. O. Ye. Hentosh, Ya. A. Prykarpatsky, D. Blackmore, A. K. Prykarpatski, *Lie-algebraic structure of Lax – Sato integrable heavenly equations and the Lagrange – d'Alembert principle*, J. Geom. and Phys., **120**, 208 – 227 (2017); https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2017.06.003.
7. S. V. Manakov, P. M. Santini, *Inverse scattering problem for vector fields and the Cauchy problem for the heavenly equation*, Phys. Lett. A, **359**, № 6, 613 – 619 (2006).
8. K. Takasaki, T. Takebe, $SDiff(2)$ *Toda equation – hierarchy, tau function and symmetries*, Lett. Math. Phys., **23**, № 3, 205 – 214 (1991).
9. K. Takasaki, T. Takebe, *Integrable hierarchies and dispersionless limit*, Rev. Math. Phys., **7**, № 5, 743 – 808 (1995).
10. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход к теории солитонов*, Наука, Москва (1986).
11. D. Blackmore, A. K. Prykarpatsky, V. Hr. Samoylenko, *Nonlinear dynamical systems of mathematical physics: spectral and symplectic integrability analysis*, World Sci., Hackensack (2011).
12. М. А. Семенов-Тян-Шанский, *Что такое классическая r-матрица?*, Функц. анализ и его прил., **17**, № 4, 17 – 33 (1983).
13. R. Abraham, J. Marsden, *Foundations of mechanics*, 2nd ed., Addison-Wesley Publ. Co., Inc., Redwood City, CA (1978).
14. C. Godbillon, *Geometrie differentielle et mecanique analytique*, Hermann, Paris (1969).
15. M. Blaszak, *Multi-Hamiltonian theory of dynamical systems*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1998).
16. Л. В. Богданов, *Интерполирующие дифференциальные редукции многомерных интегрируемых иерархий*, Теор. и мат. физика, **167**, № 3, 705 – 713 (2011).
17. L. V. Bogdanov, B. G. Konopelchenko, *On the heavenly equation and its reductions*, J. Phys. A: Math. and Gen., **39**, 11793 – 11802 (2006).
18. L. V. Bogdanov, M. V. Pavlov, *Linearly degenerate hierarchies of quasiclassical SDYM type*, J. Math. Phys., **58**, № 9, Article 093505 (2017).
19. B. Doubrov, E. V. Ferapontov, *On the integrability of symplectic Monge – Ampère equations*, J. Geom. and Phys., **60**, 1604 – 1616 (2010); arXiv:0910.3407v2 [math.DG] 13 Apr 2010.
20. E. V. Ferapontov, J. Moss, *Linearly degenerate PDEs and quadratic line complexes*; arXiv:1204.2777v1 [math.DG] 12 Apr 2012.
21. Л. Мартинес Алонсо, А. Б. Шабат, *Гидродинамические редукции и решения универсальной иерархии*, Теор. и мат. физика, **140**, № 2, 216 – 229 (2004).

Одержано 07.06.22