УДК 517.5

С. А. Пичугов (Днепропетр. нац. ун-т ж.-д. транспорта)

НЕРАВЕНСТВО МАРШО ДЛЯ КРАТНЫХ МОДУЛЕЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

For periodic functions of one variable in the metric spaces $L_\Psi[0, 2\pi]$, we establish an analog of Marshoud's inequality for multiple modules of continuity.

Для періодичних функцій однієї змінної в метричних просторах $L_\Psi[0, 2\pi]$ доведено аналог нерівності Маршо для кратних модулів неперервності.

Пусть для действительнозначных функций $f(x),\ x \in R^1$, имеющих период 1,

$$\Delta_t f(x) = f(x+t) - f(x), \quad \Delta_t^k = \triangle_t \left(\Delta_t^{k-1}\right), \quad k \in \mathcal{N},$$

$$\omega_k(f,h)_X = \sup_{|t|\le h} \left\|\Delta_t^k f\right\|_X$$

— модуль непрерывности порядка k в пространстве X.

В случае $X = L_p,\ p \in [1,\infty]$, при $k < l,\ k,l \in \mathcal{N}$, наряду с очевидным неравенством $\omega_l(f,h)_{L_p} \le 2^{l-k}\omega_k(f,h)_{L_p}$ справедливо неравенство Маршо [1]

$$\omega_k(f,h)_{L_p} \le C_l h^k \int\limits_h^1 \frac{\omega_l(f,s)_{L_p}}{s^k}\,\frac{ds}{s}, \tag{1}$$

где $h \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right]$, C_l — положительная константа, не зависящая от p, h и f.

В случае $p \in (1,\infty)$ М. Ф. Тиман [2; 3, с. 41] доказал более точные неравенства: для $h \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ при $k < l$

$$C_{p,k} h^k \left(\int\limits_h^1 \frac{\omega_l(f,s)_{L_p}^{\beta_1}}{s^{\beta_1 k}}\,\frac{ds}{s}\right)^{1/\beta_1} \le \omega_k(f,h)_{L_p} \le B_{p,k} h^k \left(\int\limits_h^1 \frac{\omega_l(f,s)_{L_p}^{\beta_2}}{s^{\beta_2 k}}\,\frac{ds}{s}\right)^{1/\beta_2}, \tag{2}$$

где $\beta_1 = \max(2,p),\ \beta_2 = \min(2,p),\ C_{p,k},\ B_{p,k} > 0$.

Неравенства (2) доказаны с помощью прямых и обратных неравенств Джексона для приближений функций тригонометрическими полиномами.

Этим же методом мы докажем аналог неравенства Маршо (1) в метрических пространствах L_Ψ.

Пусть Ω — множество функций $\Psi : R^1_+ \to R^1_+$, являющихся модулем непрерывности, т. е. Ψ — непрерывная неубывающая функция, $\Psi(0) = 0$, $\Psi(x+y) \le \Psi(x)+\Psi(y)$ для всех $x, y \in R^1_+$;

L_0 — множество почти всюду конечных на периоде и измеримых функций. Для $\Psi \in \Omega$ множество

$$L_\Psi = \left\{ f \in L_0 : \|f\|_\Psi = \int\limits_0^1 \Psi(|f(x)|)dx < \infty \right\}$$

является линейным метрическим пространством с метрикой $\rho(f, g)_\Psi = \|f - g\|_\Psi$;

$$M_\Psi(s) := \sup_{t>0} \frac{\Psi(st)}{\Psi(t)}, \quad s \in (0, \infty)$$

— функция растяжения Ψ [4] (гл. II, § 1).

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть* $k, l \in \mathcal{N}$, $k < l$, $M_\Psi\left(\frac{1}{2}\right) < 1$. *Тогда для всех* $h \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ *выполняются неравенства*

$$\omega_k(f, h)_\Psi \le C \int\limits_h^1 M_\Psi\left(\left(\frac{h}{s}\right)^k\right) \omega_l(f, s)_\Psi \frac{ds}{s}, \tag{3}$$

где константа C *не зависит от* f *и* h.

При доказательстве используем следующие результаты из теории приближения функций в L_Ψ. Пусть

$$E_n(f)_\Psi = \inf_{\{c_k\}} \left\| f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik2\pi x} \right\|_\Psi$$

— наилучшее приближение f тригонометрическими полиномами степени не выше n в L_Ψ.

Теорема А [5, 6]. *Пусть* $\Psi \in \Omega$, $M_\Psi\left(\frac{1}{2}\right) < 1$, $k \in \mathcal{N}$. *Тогда*

$$\sup_n \sup_{f \in L_\Psi, f \ne \mathrm{const}} \frac{E_{n-1}(f)_\Psi}{\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_\Psi} < \infty, \tag{4}$$

$$\omega_k(f, h)_\Psi \le C \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{h}\right]} \frac{M_\Psi\left((\nu h)^k\right)}{\nu} E_{\nu-1}(f)_\Psi, \tag{5}$$

где константа $C = C(k, \Psi)$ *не зависит от* f *и* h.

Заметим, что ранее эти утверждения были доказаны для пространств $L_p, p \in (0, 1)$ [7–9].

***Доказательство теоремы* 1.** Обозначим для краткости

$$\omega_k(h) := \omega_k(f, h)_\Psi, \quad \omega_l(h) := \omega_l(f, h)_\Psi.$$

Далее все константы C_j зависят только от k, l и Ψ.

Для оценки сверху $\omega_k\left(\frac{1}{2^n}\right)$ применим последовательно неравенства (5) и (4):

$$\omega_k\left(\frac{1}{2^n}\right)\le C_1\sum_{\nu=1}^{n+1}M_\Psi\left(2^{(\nu-n)k}\right)E_{2^{\nu-1}-1}(f)_\Psi\le C_2\sum_{\nu=1}^{n+1}M_\Psi(2^{(\nu-n)k})\omega_l\left(\frac{1}{2^{\nu-1}}\right). \tag{6}$$

Поскольку функция M_Ψ полумультипликативна [4] (гл. II, § 1), то

$$M_\Psi\left(2^{(\nu-n)k}\right)=M_\Psi\left(2^{(\nu-1-n)k}2^k\right)\le M_\Psi\left(2^{(\nu-1-n)k}\right)M_\Psi\left(2^k\right)=C_3M_\Psi\left(2^{(\nu-1-n)k}\right).$$

Далее,

$$\omega_l\left(\frac{1}{2^{\nu-1}}\right)\le C_4\omega_l\left(\frac{1}{2^\nu}\right).$$

Поэтому из (6) следует, что

$$\omega_k\left(\frac{1}{2^n}\right)\le C_5\sum_{\nu=1}^{n+1}M_\Psi\left(2^{(\nu-1)k}\frac{1}{2^{nk}}\right)\omega_l\left(\frac{1}{2^\nu}\right). \tag{7}$$

Используем монотонность функций M_Ψ и ω_l:

$$J_\nu:=\int\limits_{\frac{1}{2^\nu}}^{\frac{1}{2^{\nu-1}}}M_\Psi\left(\left(\frac{1}{2^n}\frac{1}{s}\right)^k\right)\omega_l(s)\frac{ds}{s}\ge C_6\omega_l\left(\frac{1}{2^\nu}\right)M_\Psi\left(2^{(\nu-1)k}\frac{1}{2^{nk}}\right).$$

Тогда из (7) получаем (3) при $h=\frac{1}{2^n}$:

$$\omega_k\left(\frac{1}{2^n}\right)\le C_7\sum_{\nu=1}^{n+1}J_\nu=C_7\int\limits_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{1}M_\Psi\left(\left(\frac{1}{2^n}\frac{1}{s}\right)^k\right)\omega_l(s)\,\frac{ds}{s}.$$

Теперь для произвольного h рассуждения стандартны. Пусть $h\in\left[\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}\right]$, тогда

$$\omega_k(h)\le\omega_k\left(\frac{1}{2^n}\right)\le C_7\int\limits_{\frac{1}{2^{n+1}}}^{1}M_\Psi\left(\left(\frac{1}{2^n}\frac{1}{s}\right)^k\right)\omega_l(s)\,\frac{ds}{s}\le C_7\int\limits_{\frac{h}{2}}^{1}M_\Psi\left(\left(2h\frac{1}{s}\right)^k\right)\omega_l(s)\frac{ds}{s}\le$$

$$\le C_7M_\Psi(4^k)\int\limits_h^1 M_\Psi\left(\left(\frac{h}{s}\right)^k\right)\omega_l(s)\,\frac{ds}{s}.$$

Теорема 1 доказана.

***Замечание* 1.** Неравенство (3) неулучшаемо в следующем смысле:

$$\sup_{h\in\left(0,\frac{1}{2}\right)} \sup_{f\in L_\Psi, f\neq\mathrm{const}} \frac{\omega_k(f,h)_\Psi}{\int_h^1 M_\Psi\left(\left(\dfrac{h}{s}\right)^k\right)\omega_l(f,s)_\Psi\,\dfrac{ds}{s}} > 0. \tag{8}$$

Пусть для заданного $h \in \left(0, \dfrac{1}{l}\right)$ $f(x) = \chi_{[0,h]}(x)$ — характеристическая функция отрезка $[0,h]$ и $s > h$. Тогда

$$\omega_k(f,h)_\Psi = \left\|\Delta_h^k f\right\|_\Psi = \left\|\sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} C_k^j f(x+jh)\right\|_\Psi = \sum_{j=0}^k \Psi\left(C_k^j\right) h,$$

$$\omega_l(f,s)_\Psi \le \sum_{\nu=0}^l \|C_l^\nu f(x+s)\|_\Psi = \sum_{\nu=0}^l \Psi\left(C_l^\nu\right) h,$$

$$\int\limits_h^1 M_\Psi\left(\left(\frac{h}{s}\right)^k\right)\omega_l(f,s)_\Psi \frac{ds}{s} \le \sum_{\nu=0}^l \Psi\left(C_l^\nu\right) h \frac{1}{k}\int\limits_{h^k}^1 M_\Psi(t)\,\frac{dt}{t}.$$

Отсюда следует (8), если

$$\int\limits_0^1 M_\Psi(t)\,\frac{dt}{t} < \infty.$$

Известно [4] (гл. II, § 1), что для функции растяжения M_Ψ существует нижний показатель растяжения Υ_Ψ такой, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется постоянная $C_\varepsilon > 0$ такая, что для всех $t \in (0,1]$ выполняются неравенства $t^{\Upsilon_\Psi} \le M_\Psi(t) \le C_\varepsilon t^{\Upsilon_\Psi - \varepsilon}$. Если $\Psi \in \Omega$, то $\Upsilon_\Psi \in [0,1]$. Но из условия $M_\Psi\left(\dfrac{1}{2}\right) < 1$ следует, что $\Upsilon_\Psi > 0$. Поэтому при достаточно малом ε

$$\int\limits_0^1 M_\Psi(t)\,\frac{dt}{t} \le C_\varepsilon \int\limits_0^1 t^{\gamma_\Psi-\varepsilon}\frac{dt}{t} < \infty.$$

***Замечание* 2.** Если $\displaystyle\int_0^1 M_\Psi\left(t^k\right) M_{\omega_l}\left(\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t} < \infty$, то $\omega_k(f,h)_\Psi \asymp \omega_l(f,h)_\Psi$.

Действительно, так как

$$\omega_l(f,s)_\Psi = \omega_l\left(f, h\,\frac{s}{h}\right)_\psi \le \omega_l(f,h)_\Psi M_{\omega_l}\left(\frac{s}{h}\right)_\Psi,$$

то

$$\frac{\omega_k(f,h)_\Psi}{\omega_l(f,h)_\Psi} \le C\int\limits_h^1 M_\Psi\left(\left(\frac{h}{s}\right)^k\right) M_{\omega_l}\left(\frac{s}{h}\right)\frac{ds}{s} = C\int\limits_h^1 M_\Psi(t^k) M_{\omega_l}\left(\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t}.$$

В частности, если $M_{\omega_l}(y) \le K y^{\delta_l}$ при $y \ge 1$, то из условия $\delta_l < k\Upsilon_\Psi$ следует, что $\omega_k(f,h)_\Psi \asymp$ $\asymp \omega_l(f,h)_\Psi$.

Это утверждение приведено в [5].

Литература

1. *Marshoud A.* Sur les derivees et sur differences des fonction variab variables reeles // J. Math. Pures et Appl. –1927. – **6**. – P. 337 – 425.
2. *Тиман М. Ф.* Особенности основных теорем конструктивной теории функций в пространствах L_p и некоторые приложения: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Тбилиси, 1962.
3. *Тиман М. Ф.* Аппроксимация и свойства периодических функций. — Днепропетровск: Полиграфист, 2000. – 320 с.
4. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
5. *Пичугов С. А.* Кратные модули непрерывности и наилучшие приближения периодических функций в метрических пространствах // Укр. мат. журн. – 2018. – **70**, № 5. – С. 699 – 707.
6. *Пичугов С. А.* Обратные теоремы Джексона в пространствах с интегральной метрикой // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 3. – С. 351 – 362.
7. *Иванов В. И.* Прямые и обратные теоремы теории приближения в метрике L_p для $0 < p < 1$ // Мат. заметки. – 1975. – **18**, № 5. – С. 641 – 658.
8. *Стороженко Э. А., Кротов В. Г., Освальд П.* Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах $L_p,\ 0 < p < 1$ // Мат. сб. – 1975. – **98**, № 3. – С. 395 – 415.
9. *Стороженко Э. А., Освальд П.* Теорема Джексона в пространствах $L_p(R^k),\ 0 < p < 1$ // Сиб. мат. журн. – 1978. – **19**, № 4. – С. 888 – 901.

Получено 15.05.18